EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

ORIGINE,

TRASPORTO IN ITALIA,

PRIMI PROGRESSI IN ESSA

DELL' ALGEBRA.

STORIA CRITICA

DI NUOVE DISQUISIZIONI

ANALITICHE E METAFISICHE ARRICCHITA

DI

D. PIETRO COSSALI C. R.

VOLUME II.

DALLA REALE TIPOGRAFIA

PARMENSE

cIↃ. IↃCC. XCIX.

PROSPETTO DE' CAPI

DEL VOLUME II.

CAPO I.

Metodi di eliminazione primi. Disquisizione generale su gli antichi, ed i moderni.

Preliminare: Metodi primi, tra' quali uno elegantissimo per certi casi. Disquisiz. generale. Articolo I. Metodo antico di uguagliamento ampiamente dal Newton, e dallo Bezout esteso. §. I. Via dal Bezout tenuta non sicura dai fattori alteranti. II. Via al parer dell'Eulero tenuta dal Newton producente fattori alteranti. III. Doppio ordinato sviluppo di quella tra le finali bezoutiane per due equazioni di 3.° grado, che riesce pura; e doppia finale indi dedotta per il caso di due equazioni, una di 3.°, l'altra di 2.° grado. Art. II. Metodo di continuo inserimento del Bezout producente o divisore inutile, o fattore alterante. Art. III. Metodo di continua divisione promosso nella teoria; ma dimostrato produrre tutt' insieme e divisore comunemente inutile, e fattore alterante. Art. IV. Metodo di continua condizione dell'Eulero di nuove viste, e finali equazioni arricchito, producente però fattori alteranti. Art. V. Metodo di prodotto non producente che divisori, ma comunemente inutili. §. I. Fondamenti del metodo per l'Eulero; calcolo di lui; e cose desiderate alla perfezione di esso. II. Calcolo del Cramer mancante di una esatta general dimostrazione. III. Calcolo composto di quelli di Eulero e Cramer perfezionati. IV. Calcolo del la Grange corretto e semplificato nelle dimostrazioni, e nelle operazioni. Confronto generale delle finali equazioni dai diversi metodi provenienti. — Dei fattori alteranti. — Equazione finale di eliminamento per le equazioni di 4.° grado — ed a questo proposito illustrazione più ampia dei due teoremi, mercè de' quali si è perfezionato il calcolo di Cramer, e dimostrazion de' pregj di lui a tal perfezione recato. — Conclusione. —

CAPO II.

Analisi delle equazioni di terzo grado.

Parte Storica. §. I. Passo importante di Frate Luca, nel quale accenna delle soluzioni particolari a tentone di equazioni di 3.° grado, e lungi dal dare per impossibile, come a mendicata sua scusa adduce Cardano, una regola certa e generale, l'asserisce possibile. II. Scipione dal Ferro bolognese fu il primo a sciogliere con regola certa le equazioni di 3.° grado della forma $x^3 + px = q$. III. Non fu il del Fiore, ma Zuanne de Tonini da Coi, che primamente provocò il Tartaglia allo scioglimento di problemi di 3.° grado, e le equazioni, su le quali cadde la provoca, furon quelle della forma $x^3 + mx^2 = n$, trovato lo scioglimento della quale passò subito Tartaglia a quello della forma $x^3 + n = mx^2$. IV. Tartaglia previene la sfida di Antonio Maria del Fiore discepolo di Scipione del Ferro con investigare celeremente la regola per sciogliere le equazioni della forma $x^3 + px = q$, e non solo la trova per questa, ma anche per quelle della forma $x^3 = px + q$. Sfida e vittoria di Tartaglia. V. Modi ed umili, ed aspri del da Coi con Tartaglia per ottener le regole di lui. Si arrende a comunicargli la soluzione di un problema su la forma $x^3 + mx^2 = n$, per cui quegli ricava una regola, ma da appellarsi di composizione piuttosto che di soluzion di equazione. Tali dovean anch'esser sino a quel giorno le regole di Tartaglia per ambedue le forme $x^3 + mx^2 = n$, $x^3 + n = mx^2$. Nè sin allora era giunto a scoprir l'artificio di togliere il termine secondo mx^2, come meglio si prova nel paragrafo seguente. Qualificando Montucla il de Coi di Avventuriere, si prende occasione di esporre il costume di allora nei Matematici, di passare o spontanei, o a breve condotta chiamati, di città in città a spiegar le dottrine loro, e ciò comunemente nelle chiese. VI. Arti di ogni maniera adoperate da Cardano per istrappar da Tartaglia le invenzioni di lui; franchezza e costanza di questo in ismentirle e deluderle; risentimenti e sfide tra loro. Cardano si volge alle suppliche ed alle lusinghe, e con l'invito a nome del ricco signore March. del Vasto tira Tartaglia a Milano. Colloquio tra Tartaglia, e Cardano in casa di questo, in esito del quale Cardano giura segretezza, e Tartaglia gli scrive di sua mano in Capitolo rimato le tre regole per sciogliere le tre equazioni $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$, che poi dopo la partenza da Milano, pregato da Cardano per lettera, gli rischiara. Tartaglia vien avvisato, che Cardano è per tradir con le stampe la data fede. Cardano cade nel caso della implicazione immaginaria, e ricorre per lo scioglimento a Tartaglia il quale tenta, ma indarno, di fargli smarrir la strada, con dargli a credere che non avea ben penetrate le regole. VII. Dialogo di Tartaglia con l'inglese Ventuorthe, dal quale rilevasi l'artificio, a cui Tartaglia era giunto di togliere il secondo termine dalle equazioni cubiche di esso fornite, ed il nuovo sistema, in cui per tale scoperta avea poste le soluzioni. Si nota però un errore, nel quale Tartaglia in esso dialogo cade, ed un falso vanto, che si dà su le equazioni derivative di 2.° grado. VIII. Cardano viola il giuramento, e stampa le regole insegnategli da Tartaglia con non attribuirgliene che una. Solenne sfida tra Tartaglia, e Cardano unitamente al suo discepolo Lodovico Ferrari nella Chiesa del Giardino di Milano, alla quale però Cardano si sottrae. IX. Tartaglia si appigliò a mal consiglio ritardando a stampare le sue invenzioni a corona del suo *General Trat-*

tato, il che dalla morte prevenuto non potè effettuare. X. Errori gravi del Wallis. Torti di Montucla a Tartaglia, ed a Cardano. Scorsi dell'Ab. Andres. XI. Serie cronologica delle soluzioni di Tartaglia.

Parte Teorica. — Cammino speculativo di Tartaglia. Lamento del la-Grange che si ignorasse. In che il metodo di Tartaglia differisca da quello di Hudde dal la-Grange stimato il più naturale. Errori del Gua-de-Malves. — Dottrina di Cardano, e prime risoluzioni generali, con censura del contrario asserir di Montucla, e dell'onor non dovuto dato al suo Vieta, e con l'aggiunta di una formola generale di scioglimento di una equazione cubica di tutti i suoi quattro termini fornita; poi soluzioni speciali in tre Manipoli, il 1.° spettante le equazioni $x^3 + q = px$, $x^3 = px + q$, il 2.° le equazioni $x^4 + q = nx^3$, $x^4 + nx^3 = q$; il 3. le equazioni di 3.° grado complete, o quadrinomie: difetto di Montucla in non darne cenno di alcuna.

CAPO III.

Industrie degli antichi analisti per isfuggire ne' problemi le equazioni di alto grado.

Classe I. Industrie di posizione. — Posizione uguale. — Posizione recante a frazioni reciproche. — Posizione di aggregato, o raccolta. — Posizione per + e — proporzionata. — Posizione di regresso. — A queste abbassanti il grado dell'equazione ne aggiugne Cardano altre diminuenti il numero de' termini; e sono Posizione indeterminatamente accresciuta, ed indeterminatamente scemata. — Posizione incrociata. — Posizione quadrata. — Posizione dipendente. Classe II. Industrie di soluzione divisa o a due colpi. Modo 1.°, abbassando di grado le condizioni del problema. — Modo 2.°, sostituendo ad un ignoto moltinomio una rappresentazion semplice. — Modo 3.°, spezzando in due nuove incognite la quantità data del problema, col qual modo fu da' nostri antichi per equazioni di 2.° grado sciolto un bel problema per via ordinaria di 4.° dal Saunderson recato qual prova dell'analitica destrezza ed eleganza di Moivre. — Di altro Modo da Cardano detto di più posizioni: esame e correzione della dottrina di Cardano; e casi ne' quali veramente può tornar utile.

CAPO IV.

Teoria delle irrazionali quantità presso gli antichi da numeri a generali algebraiche specie trasferita.

Errore assurdo del Gua-de-Malves, che nell'opera del Bombelli sia per la prima volta comparso il calcolo dei radicali evidentemente confutato con la distinzione seguente di tre tempi:

Tempo I. sino alla stampa del volume di Frate Luca. §. I. Calcolo delle irrazionali quantità semplici. II. Calcolo delle quantità irrazionali composte, comprendente anche l'arte di razionalizzare il denominator irrazionale nelle frazioni, e non solo essendo il radicale di 2.°, ma anche di 4.° grado, ed anche essendo uniti: s'ingannò però Frate Luca in volere illimitato a qualunque numero di termini nel denominatore l'artificio: piena teorìa su di ciò, e stabilimento dei limiti. III. Progressione geometrica di quantità binomiali senza frazioni, bellissimo problema, ma tenebrosissimo, presso Frate Luca, recato però alla massima luce, ed ampiezza. IV. Libro X di Euclide in algebraico quadro. Specie di linee e di spazj semplici. — Relazioni di linee. — Linee composte con aggiugnerne alle euclidee alcune dalle formole algebraiche somministrate. — Podestà e radici delle linee composte, e superficie di una in altra. —

Tempo II. Invenzioni di Tartaglia, e di Cardano. §. I. Bel problema di Tartaglia, di cui dovrebbesi arricchire ogni libro dottrinal di algebra. II. Specolazioni di Cardano, fanno per la sottilità grande onore al Cardano, il quale però cade in due luoghi, e vien corretto. III. Calcolo delle radici universali o legate.

Tempo III. Leggieri aggiunte di Bombelli.

CAPO V.

Calcolo delle radici immaginarie presso Cardano, e Bombelli.

Cardano trattò problemi conducenti a radice di meno, e questa che da noi chiamasi radice immaginaria fu da lui chiamata *meno sofistico*; e Cardano stesso seppe a dovere moltiplicare una quantità immaginaria positiva per altra negativa. Il caso già da Cardano avvertito delle radici immaginarie nella formola tartagliana involte, indussero Bombelli a studiare di proposito su le radici immaginarie, e fabbricar una ordinata teorìa delle operazioni su di esse. Le regole sono conformi alla giusta metafisica. Erronea dottrina di alcuni moderni, e caduta di Eulero. Niun mistero, che dalla moltiplica di due quantità immaginarie risulti una reale. Assurdo ripiego del Wolfio per evitar tal mistero. Bombelli si estende ad estrarre la radice cubica dai binomj e recisi immaginarj, ma con metodo imperfetto, che perciò si perfeziona, ed amplifica. La formola tartagliana vien da Bombelli ridotta nel caso, che a quantità razionale è riducibile. Wallis facendo da storico non dovea ignorare tal riduzione, di cui si è dato vanto.

CAPO VI.

Analisi di forma finita delle equazioni di 4.° grado per quelle di 3.°. Ed analisi di approssimazione indefinita rispetto alle radici irrazionali delle une, e delle altre.

Parte I. Analisi in finita forma delle equazioni di 4.° grado per quelle di 3.°. §. I. Erroneo sentimento di Cardano sul limite della utile analisi al terzo grado, estendendosi i problemi su le quantità proporzionali a qualunque grado. II. Problema su di esse di 4.° grado proposto dal de Tonini da Coi a Tartaglia, ma da questo non sciolto, sebben conosciuto possibile a sciogliersi. III. Sagacità di Lodovico Ferrari bolognese per ischivare il secondo termine contenente x^3, e doppio artificio per risolvere in genere le equazioni di forma $x^4 + nx^2 + q = px$, estesi poi agli altri casi dell' equazion $x^4 \pm nx^2 \pm px \pm q = 0$, eccetto il solo $x^4 + nx^2 + px + q = 0$. IV.

Trasformazion dell' equazione $x^4 \pm m x^3 \pm q = 0$ nella $y^4 \pm m y \pm \sqrt[3]{q} = 0$, e della $x^4 + n x^2 + q = m x^3$ in $y^4 + n y^2 + q = m y \sqrt{q}$, e quindi scioglimento loro. V. Risoluzion da Cardano recata di una equazione di forma $x^4 - m x^3 - q = 0$, senza spogliarla del secondo termine. VI. Alcune soluzioni particolari, cioè supposti tra i coefficienti di una equazione di 4.° grado certi rapporti. VII. Analisi delle equazioni di 4.° grado a compimento condotta per Bombelli, abbracciando in un metodo ugualmente le equazioni tutte e trinomie e quadrinomie e quinomie. VIII. A ricchezza dell'analisi Bombelli semplifica le trasformazioni esposte dal Cardano. IX. Soluzioni particolari dal Bombelli aggiunte. X. Occasion data si presenta un metodo fecondissimo per ricavare formole speciali di equazioni di 4.° grado con le rispettive risoluzioni loro. XI. Palmari falsità del Wallis, e del Gua-de-Malves.

Parte II. Analisi di indefinita approssimazione rispetto alle radici irrazionali delle equazioni. Questa analisi da Cardano insegnata in un capo intitolato *De Regula aurea* sfuggì d' occhio al Wallis, al Gua-de-Malves, al Montucla. — Esposizione di essa, e suo fondamento nella regola della *Doppia falsa Posizione*. Confronto della medesima con il metodo di Newton, Halley, Raphson. Avvertenza di Cardano sul potersi essa applicare all'estrazione prossima della radice da numeri che non l'ammettono esatta. Ingiusta gloria da Montucla attribuita a Vieta di essere stato il primo a ricorrere alle approssimazioni. — In Cardano si ha il primo esempio del trasportare ad una parte tutti i termini dell'equazione, ugualgliandone l'aggregato a zero; il che il Wallis esalta qual cosa affatto nuova in un capo del suo Harriot.

CAPO VII.

Teoremi, o semi di teoremi intorno alla natura delle equazioni sparsi per le opere di Cardano.

Articolo I. Composizione delle equazioni: Cardano conobbe tre precipui teoremi, che la risguardano. Art. II. Radici positive e negative, reali ed immaginarie. Cardano fece talor conto delle radici negative, che che dica Montucla, in mancanza cioè delle positive; e seppe egli determinare nelle equazioni cubiche i casi di tre, e di una sola radice reale. Art. III. Rapporto del numero delle radici reali positive e di quello delle negative alle alternazioni e successioni de' segni + e —. Spinse Cardano le sue viste sino al famoso teorema Cartesiano. Le proposizioni di Cardano si illustrano, e poi si raccolgono in una tavola. Art. IV. Radici uguali. A torto scrive Montucla non essere state da Cardano distinte. Art. V. Trasformazioni delle equazioni: specie 4. Specie 1.ª Trasformazione a radici in aritmetica ragione, o sia per addizione, o sottrazione, accresciute, o diminuite. Specie 2.ª Trasformazione a radici alterate in geometrica proporzione. Specie 3.ª Trasformazione a radici per geometrica proporzione reciproca cangiate. Specie 4.ª Trasformazione a taluna delle radici permanente. Art. VI. Radici irrazionali, Grado, Specie, Numero dei termini loro: Schiere tre di teoremi. Schiera I. Teoremi su le sei specie di binomj, e recisi euclidei in quanto abili ad esser radici delle equazioni, con illustramenti, e qualche emendamento. Schiera II.: Teoremi su le altre linee euclidee rispetto alle equazioni. Schiera III.: Teoremi speciali riguardanti l'equazione $x^3 = px \pm q$. Cardano prevenne il Venini nell'esame delle forme radicali idonee a soddisfarla, e nell' escluderle tutte, fuori della forma $\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$, nel caso, che questa appunto per il metodo tartagliano riesce d'immaginarj implicata. Schiera IV.: Teoremi spettanti le equazioni cubiche trinomie di secondo termine fornite, e le quadrinomie. Art. VII. Specolazioni e viste varie: le specolazioni sotto i num. 8.° e 9.° si debbon congiungere con quelle riferite sotto il n. 3.° dell'Art. I. su la composizione delle equazioni. Art. VIII. Modi di promovere l'analisi: nel 5.° dei sei modi, dopo aver mostrato come Cardano si avanzò a sciogliere qualche equazione di 6.° grado fornita del terzo, del quarto, e del quinto termine, si espone una di lui osservazione degna di singolar lode e riflesso. A tratti a tratti nel decorso del Capo si nota il silenzio di Montucla su tante belle cose di Cardano.

CAPO VIII.

Congiungimento, e vantaggio mutuo dell'Algebra, e della Geometrìa.

§. I. Sentimenti intorno a ciò di Leonardo Pisano, e poi di Frate Luca. Quantità di problemi geometrici sciolti per algebra da questo. Scielta di 8. II. Maraviglia come un capo, che nel volume di Frate Luca porta in fronte il titolo di problemi geometrici trattati *per viam algebrae*, e come una lunga serie di foglj per essi, ed altri molti simili in altri capi occupati, sieno state cose invisibili all'occhio di Montucla. III. Nella 6.ª Parte del *Gen. Tratt.* di Tartaglia tessuta dalle carte da lui lasciate vi sono molti problemi geometrici algebraicamente sciolti, tra' quali alcuno di quei di Frate Luca a maggiore estensione recato, e si ricava da un luogo la intenzione di lui di applicare alla geometrìa anche la sua teorìa delle equazioni cubiche. IV. Un problema geometrico, cui Tartaglia scioglie algebraicamente, e poi costruisce geometricamente, con che resta smentito il detto di Montucla, che niuno avanti Vieta abbia pensato a costruire geometricamente il valore algebraicamente trovato. V. Cardano, non meno di Frate Luca dal Montucla ommesso nel novero di quelli che applicarono l'algebra alla geometrìa, non solo fece ciò, ma prese ad ajutar reciprocamente con la geometrìa l'algebra, riducendo al problema di dividere in certo modo una data retta l'equazione $x^3 + q = px$ nel caso, in cui algebraicamente si cade nella implicazione immaginaria, e, quel che è più, spingendosi a costruire in simil caso geometricamente per l'intersecamento di una parabola e di una iperbola l'equazione $x^3 + q = nx^2$. — Si aggiungono: Massimi da Cardano dimostrati ed usati. —

CAPO IX.

Indagini di Cardano, e Bombelli sul caso irreducibile.

§. I. Il libro *De Regula Aliza* non citato da Montucla è il più oscuro dei libri di Cardano, ma il più onorifico insieme per il sottile investigatore ingegno, che vi dispiega. Formano parte delle indagini sul caso irreducibile la Schiera III. dei teoremi sotto l'Art. VI del Capo VII, e la costruzione geometrica dell'equazione $x^3 + q = n x^2$ sotto il §. V del Capo VIII, ed anche la riduzion dell'equazione $x^3 + q = p x$ al geometrico problema III nel luogo stesso. II. Trasformata l'equazione $x^3 = p x + q$, con fare $x = y + z$, in $y^3 + 3 y^2 z + 3 y z^2 + z^3 = p (y + z) + q$, Cardano vede potersi in molti diversi modi spezzare in due, e sceglie sette spezzamenti, de' quali assegna la natura e l'estensione. III. Si supplisce un passo ommesso da Cardano, illustrasi e si riduce a veri termini la dottrina di lui, e si mette in piena luce il perchè dalla risoluzione tartagliana escano reali le parti y, z nei casi $\frac{1}{4} q^2 \geqq \frac{1}{27} p^3$, all'incontro immaginarie nel caso $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$. IV. Dagli stessi principj si deducono i limiti della grandezza di x corrispondentemente ai tre casi. V. Si calcola il numero di tutti gli spezzamenti astrattamente possibili, e si escludono i ripugnanti in effetto. Si procede ad esibire uno spezzamento generico, e di esso si dà l'equazione finale occupante tre intere pagine. Lo spezzamento generico si divide gradatamente in classi, ed in specie, e poi in spezzamenti particolari, e corrispondentemente si riduce la gran finale generica. Note su la dottrina di Cardano nel §. II esposta. VI. Cardano cerca la comunicazione tra lo spezzamento tartagliano ed il suo contrario, e tocca anche quella tra esso ed i suoi affini: si estende il metodo. VII. Per soddisfare alla pienezza della storia si spiegano alcune denominazioni, ed alcune relative forme di operare da Cardano introdotte senza frutto verun della scienza, ma nelle quali si ha l'epoca prima del nome di *Radice* a significare il valor dell' incognita dell'equazione di 3.° grado, con l'aggiunto di *Solida*, che pare più acconcio, che quello di cubica. VIII. Non contento Cardano di avere assegnati i limiti dell'uso degli spezzamenti, per lui distinti, dipendentemente dalle grandezze di p, q nell' equazione $x^3 = p x + q$, investigò anche quelli dipendenti dalla specie di x, e delle parti y, z: perfezionata questa investigazione si conchiude, che nella combinazione di non aver l'equazione alcuna radice razionale, di esser q razionale, ed $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$, gli spezzamenti che parevano promettere miglior sussidio non sono idonei a prestarne alcuno, ed in genere resta perduta la speranza, che la moltitudine degli spezzamenti potea aver destata di vincere il caso irreducibile. IX. Caduti a vuoto i tentativi algebraici non resta che ricorrere alla geometria: Cardano vi ricorse; si ritorna su la costruzione da lui esibita della equazione $x^3 + q = n x^2$ per l'intersecamento di una parabola e di una iperbola, illustrasi, e si conduce a compimento discorrendo per i tre varj casi di un solo intersecamento, di un intersecamento, e di un osculo, e di tre intersecamenti. Si fa vedere come la costruzione dell'equazione $x^3 + q = nx^2$ contiene la costruzione della $x^3 = px \pm q$. Promovendo la riduzion, che fece Cardano dell'equazione $x^3 + q = px$ al problema riferito alla pag. 431 sotto il num. III, si giugne ad una costruzione di essa per seni e coseni circolari, che è la a lei più intrinseca, men però utile, e luminosa dell'odierna. X. La formola tartagliana nel caso $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$ è nelle due parti immaginaria, ma nell'intero reale, ed è ben lungi dal significare nell'equazione una impossibilità assoluta, una mancanza di radici reali, come significa nell'equazione di 2.° grado $x^2 + ax + b = 0$ la immaginarietà della formola di risoluzione, allor che $\frac{1}{4} a^2 < b$. Questo paragone non ingannò no il Cardano. Montucla gli fa in ciò manifesto torto: egli conobbe a pieno giorno, che nel caso appunto, che la formola tartagliana riesce implicata d'immaginarj, l'equazione cubica ha tutte e tre le sue radici reali. E congiungendo insieme tutti i suoi lumi pare doversi credere, che conosciuta abbia eziandio la realità di essa formola ad onta degli immaginarj, che involge. XI. Bombelli il primo con estrarre dagli immaginarj binomj tartagliani le radici cubiche nella formola segnate, pose col fatto sotto gli occhi la realità di essa formola. Si osserva però il limite dell'estrazione, e congiuntamente della prova. Si accennano altre prove o di fatto, o specolative, e se ne dà una così intrinseca, generale, e luminosa, che fa maraviglia non sia stata la prima a vedersi. XII. Nella combinazione di q razionale, di $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$, e di non avere l'equazione $x^3 = px + q$ alcuna radice razionale, è impossibile l'estrarre dagli immaginarj binomj tartagliani le radici cubiche nella formola segnate; laonde ella è veramente irreducibile. XIII. Anche pel caso di q irrazionale si dà il caso irreducibile, quando le radici cubiche non sieno possibili ad estrarsi. Idea e cagion generale della irreducibilità, la *incubicità* degli immaginarj binomj. Tutte le equazioni ad ultimo termine q irrazionale, in un con le tre irrazionali loro radici, esibite da varj analisti, si comprendono in una mia da intrinsechi principj tirata, ed altra volta prodotta, e si dimostra, che riguardo a questa, e conseguentemente a tutte quelle, gli immaginarj binomj tartagliani sono perfetti cubi. XIV. Diversi concetti del caso irreducibile in diverse età, e presso diversi analisti, de' quali si scoprono i difetti a fronte del vero. XV. Slancio in Cardano ad ideare, riguardo al caso irreducibile, una quantità *Silvestre*, cioè da qualunque genere di radicali differente, e lontana: fu quasi un barlume della quantità trascendente.

SOMMA DELL'OPERA.

Tenebre, ed errori, in cui giaceva immersa, la storia delle prime età dell'algebra. Difficoltà incontrate a tesserne una storia esatta, e come vinte. Arricchimento della storia per le nuove Disquisizioni Metafisiche, ed Analitiche, mercè le quali in un con la storia si ha del calcolo, cui essa riguarda, il perfezionamento, e la metafisica.

CAPO I.

Metodi di eliminazione primi.
Disquisizione generale su gli antichi, ed i moderni.

Trattarono i primi analisti problemi di due, di tre, di quattro incognite, ed ebbero perciò bisogno della eliminazione. Il metodo, che si presentò loro il primo, siccome il più naturale, fu quello di trarre da una delle equazioni una delle incognite espressa per le altre incognite e per le quantità note, e trasportarne tale espressione nelle altre equazioni. Nei casi non più difficili usaron far ciò mentalmente; e s'incontrano in Fra Luca de' separamenti e de' trasporti, ne' quali non si può non ammirare la contenzione, e la forza della mente. Non lasciarono di far per operazione spirituale di questa quanto era possibile nei casi più complicati, riducendo al menomo numero le incognite da esprimersi. Di queste chiamata la prima *cosa*, denominarono la seconda *quantità*, e la segnarono q^a, e facendo mestieri di esprimer una terza incognita le diedero il nome di *quantità seconda*, e segnaronla $q^a\ 2^a$, e così vadasi discorrendo. Nè l'additato metodo di eliminazion per trasporto si fermò alle equazioni di primo grado: Cardano nel capo X dell'*Arte magna* insegna ad adoperarlo nelle equazioni di secondo grado, scorrendo i varj casi, che io qui non schiererò, contento di accennar di volo la elegante speditezza che suggerisce nel caso $x^2 \mp m x y \mp q y = 0$; $x y = h$, di moltiplicare cioè l'equazion prima per x, e poi in essa trasferire dalla seconda il valor di $x y$, con che si ha tosto $x^3 \mp m h x \mp q h = 0$; e fissate per i diversi casi le regole, a quattro problemi particolari le applica egli, i quali sono 1° $x^2 + y^2 = 100$; $x y = 2(x + y)$: 2° $x^2 + y^2 = 100$; $x^2 = 4 x y + 8 x$, supposto $x > y$: 3° $x^2 + y^2 = 100$; $x y = 3 x^2 + 6$. 4° $x : y : z$; $x + y + z = 10$; $y = 2 y x + 4 x$ supponendo $x < y$.

Non fu tampoco il metodo *di trasporto* il metodo di eliminazione agli antichi italiani analisti, od almeno a Cardano sol cognito. Io osservo nel capo IX della sua *Arte magna* da lui spiegati e nelle equazioni di primo grado, quali le due $a x + b y = n$; $c x + d y = h$, posti in opera anche gli altri due metodi: e quello che chiamerò *di paragone* consistendo in cavar dalle due equazioni due espressioni differenti di una delle incognite, per esempio di x, e paragonarle tra loro; e quello che *di uguagliamento dei termini simili* appellerò; anzi tal uguagliamento si adempie da Cardano in due maniere. La prima si è il moltiplicar reciproco di un'equazione per il coefficiente della incognita da eliminarsi nell'altra equazione, come sarebbe, volendo eliminar x, il moltiplicare la prima equazione per c, la seconda per a, con che cangiati i termini $a x$, $c x$ in $c a x$, $a c x$, facendo poi la sottrazione di un'equazione dall'altra, essi per l'uguaglianza si abbattono e svaniscono, e si ottiene un'equazione libera da x; ed è ella questa la maniera anche da noi usitata. La seconda maniera praticata da Cardano è di moltiplicar solamente o la equazion prima per $\frac{c}{a}$, o la seconda per $\frac{a}{c}$, e torna utile allor quando $\frac{c}{a}$, ovvero $\frac{a}{c}$ riesce numero intero.

Ma questi non erano che albori dei metodi oggidì più comuni, ed il vanto di essi non è che la minor gloria degli antichi nostri analisti. Ciò in che più risplende l'ingegno loro, e di che possono a diritto andar alteri, si è una elegantissima spezie di eliminazione per certi casi, la quale a torto e con danno, abbandonando la lettura de' libri loro, si è lasciata cadere nell'obblivione, e che tanto più importa di risuscitare da essa, e ristabilire, quanto più comoda, e vantaggiosa. Tre esempj la dichiareranno.

Esempio I. Si cerchino due numeri x, y tali, che $(x+y)(x^2+y^2)=a$; $(x-y)(x^2-y^2)=b$. Diasi ai fattori di queste equazioni, e ad esse la forma, che segue $x\left(1+\frac{y}{x}\right).x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=a$; $x\left(1-\frac{y}{x}\right).x^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=b$. Pongasi $\frac{y}{x}=z$; e sarà z la ragione tra i due desiderati numeri x, y. Dividasi ora l'equazion prima per la seconda, con che si avrà $\frac{a}{b}=\frac{x^3(1+z)(1+z^2)}{x^3(1-z)(1-z^2)}=\frac{(1+z)(1+z^2)}{(1-z)(1-z^2)}=\frac{1+z^2}{(1-z)^2}$; onde ricavasi $z^2-\frac{2a}{a-b}z=1$; e risolvendo, $z=\frac{a}{a-b}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{(a-b)^2}-1\right)}$, che farò $=m$, e sarà il valor della ragione tra y ed x, cioè $m=\frac{y}{x}$, e perciò $mx=y$, e sostituendo questo valor di y in una delle due equazioni esprimenti le condizioni del problema, si determinerà x, per il quale verrà poi a determinarsi anche $y=mx$.

Esempio II. Si vogliano due numeri x, y tali, che $(x+y)(x^3+y^3)=a$; $(x-y)(x^3-y^3)=b$. A tenor della esposta trasformazione si avrà $\frac{a}{b} = \frac{x^4(1+z)(1+z^3)}{x^4(1-z)(1-z^3)} = \frac{(1+z)(1+z^3)}{(1-z)(1-z^3)}$, che ci condurrà all'equazione $z^4 - \frac{a+b}{a-b}z^3 - \frac{a+b}{a-b}z + 1 = 0$.

Esempio III. Sieno domandati due numeri x, y siffatti, che $x^5 + y^5 = a$, $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = b$. Seguendo lo stesso artificio, otterremo $\frac{a}{b} = \frac{x^5(1+z^5)}{x^5(1+z^2)(1+z^3)} = \frac{1+z^5}{(1+z^2)(1+z^3)} = \frac{1-z+z^2-z^3+z^4}{(1+z^2)(z^2-z+1)}$; e finalmente $z^4 - z^3 + \frac{2a-b}{a-b}z^2 - z + 1 = 0$.

È facile, penetrando la natura degli esempj recati, concepire l'idea specifica dei casi soggetti all'artificio: sono cioè tutti quelli, ne' quali per le condizioni del problema tutti i termini incogniti nell'una e nell'altra equazione salgono al medesimo grado, o sia gli esponenti delle incognite formano un ugual aggregato. Cardano chiama questo artificio la *Regola del Medio*, o sia *della Proporzione*; e la ragione è *quia medium requiritur scilicet proportio*; dove richiamisi a memoria che appresso di lui, siccome appresso tutti i primi analisti attenutisi ad Euclide, il vocabolo proporzione non vale, che quanto appresso di noi quel di ragione. È sottile poi, e degno d'esser notato certamente si è il riflesso di Cardano stesso su le equazioni risultanti in z. Dinotando questa nuova incognita una ragione, Cardano la riguarda egli come la ragione di una progressione geometrica cominciante dall'unità, e ravvisa nella equazione che esce di essa un problema spettante ad una progressione, o sia ad un certo numero di quantità continuamente proporzionali: così l'equazione $z^4 - z^3 + \frac{2a-b}{a-b}z^2 - z + 1 = 0$ involge questo problema: trovare cinque quantità continuamente proporzionali di tal fatta, che la somma della $1^a = 1$, della $5^a = z^4$, e del prodotto della $3^a = z^2$ in $\frac{2a-b}{a-b}$ si uguagli alla somma della $2^a = z$, e della $4^a = z^3$. Tal è lo spirito degl'insegnamenti di Cardano dall'oscurità cavati del linguaggio d'allora e del suo stile, ed a generale espressione recati.

Nè l'esposta specie di eliminazione in problemi della indicata indole a due incognite ristrignesi, ma a tre si estende eziandío, purchè a terza condizione si aggiunga, che esse tre incognite sieno continuamente proporzionali; che anzi con l'aggiunta sola di questa medesima condizione ad un numero indefinito, e qualunque di ignote quantità si estende. A somiglianza di fatti dell'esempio II.° si desiderino tre numeri x, y, u tali, che

$(x+y+u)(x^3+y^3+u^3)=a$; ed $(x\mp y\pm u)(x^3\mp y^3\pm u^3)=b$;

e debbano di più essere x, y, u in continua proporzione. Per questa ultima condizione cangiandosi u in $\frac{y^2}{x}$, le due equazioni cangiansi anch'esse in

$\left(x+y+\frac{y^2}{x}\right)\left(x^3+y^3+\frac{y^6}{x^3}\right)=a$; $\left(x\mp y\pm\frac{y^2}{x}\right)\left(x^3\mp y^3\pm\frac{y^6}{x^3}\right)=b$;

e per l'artifizio, di cui si tratta, in

$x^4\left(1+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(1+\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^6}{x^6}\right)=a$; $x^4\left(1\mp\frac{y}{x}\pm\frac{y^2}{x^2}\right)\left(1\mp\frac{y^3}{x^3}\pm\frac{y^6}{x^6}\right)=b$;

e ponendo $\frac{y}{x}=z$, e dividendo la prima equazione per la seconda svanirà x^4, e resterà $\frac{(1+z+z^2)(1+z^3+z^6)}{(1\mp z\pm z^2)(1\mp z^3\pm z^5)}=\frac{a}{b}$, equazione in sola z. Che se avrassi una quarta incognita t continua proporzionale dopo x, y, u, essendo $t=\frac{y^3}{x^2}$, fatte le sostituzioni, l'effetto sarà simile; e generalmente lo sarà qualunque sia il numero delle incognite, purchè continuamente proporzionali.

La condizione, che questo speciale metodo di eliminazione esige nei termini incogniti delle equazioni che esso riguarda, si accorgerà chi è nel calcolo integrale versato, esser quella, onde colà si distinguono le equazioni *omogenee*, e l'artifizio di porre $\frac{y}{x} = z$ esser per lo appunto quello ivi adoperato per fare svanire una delle incognite. Qual gloria pertanto degli antichi italiani analisti l'aver prevenuto l'ingegno di chi per tal artifizio all'integral calcolo assoggettò facilmente e generalmente le differenziali equazioni omogenee? E fu anche questi d'Italia illustre figlio, il celebre Gabriele Manfredi. In una equazione differenziale omogenea, essendo tutti i termini incogniti, fatta la sostituzione di z in luogo di $\frac{y}{x}$, la incognita x svanisce a dirittura; nelle due equazioni finite di termine noto dotate facea mestieri di un'altra industria, della divisione di un'equazione per l'altra: la scorsero gli antichi nostri analisti, e diedero all'artifizio tutto il compimento. Cardano nel capo LI della *Pratica dell'Aritmetica generale* narra di aver ricevuta la *Regola del Medio*, nome in allora di sì bell'artifizio, da Maestro Gabriele *de Aratoribus*, degli Aratori, e che questi ebbela da Frate Luca. L'utilità di essa si appaleserà chiaro applicando agli esempj, de' quali servito mi sono ad ispiegarla, qualsivoglia dei metodi, che nella seguente Disquisizione vo' ad esaminare.

DISQUISIZIONE GENERALE

SU I METODI DI ELIMINAZIONE

SI ANTICHI CHE MODERNI.

L'uso della eliminazione, che è per occorrere nei Capi, che succeder debbono, renderà giovevole l'aver qui inserita questa Disquisizione, la quale, anche senza ciò, ed assolutamente lusingomi poter tornare agli analisti gradita.

ARTICOLO I.

Metodo antico di uguagliamento ampiamente dal Newton, e dal Bezout esteso.

§. I.

Via dal Bezout tenuta non sicura dai fattori alteranti.

Newton fu il primo a dare nella sua *Aritmetica universale* formole di eliminazione in simboli generali, e sino al quarto grado si estese. Sebbene poi, non recandone dimostrazione, occultato abbia il metodo, per cui ad esse giunse, credesi cionondimeno comunemente, che servito siasi del metodo di uguagliamento; anzi, due essendo le vie che in esso batter si possono, pare, ignoro su qual fondamento, all'Eulero di poter assegnar quella dal grande uomo tenuta. Questa, a serbar l'ordine de' tempi, dovrebbe essere nella esposizione la prima: torna però meglio cominciare dall'altra, che il Bezout scelse; ed è ciò tanto più permesso, quanto che del cammino del Newton non si ha certezza. Date le due equazioni

(I.) $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$. (II.) $Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$, nelle quali A, B, C, D, P, Q, R, S comprendono quantità note, ed un'altra incognita y non più elevata che al terzo grado: in breve sono funzioni al terzo grado non superiori di y, ma tali che A non sia divisore di tutte tre insieme le B, C, D, nè P di tutte tre insieme le Q, R, S. Sottraendo dalla (I.) moltiplicata per P la (II.) moltiplicata per A, si ha per l'uguagliamento, ed abbattimento dei termini primi un'equazion di secondo grado: un'altra se ne cava sottraendo dalla (I.) moltiplicata per $Pz+Q$ la (II.) moltiplicata per $Az+B$; ed una terza se ne conseguisce sottraendo dalla (I.) moltiplicata per Pz^2+Qz+R la (II.) moltiplicata per Az^2+Bz+C. Ponendo per brevità $DP-AS=G$, $BP-AQ=H$, $DQ-BS=K$, $CP-AR=L$, $CQ-BR=M$, $DR-CS=N$, le tre equazioni di secondo grado sono:

$$(1.)\quad Hz^2+Lz+G=0.$$
$$(2.)\quad Lz^2+(G+M)z+K=0.$$
$$(3.)\quad Gz^2+Kz+N=0.$$

Da queste combinate a due a due moltiplicando reciprocamente per i coefficienti di z^2, e sottraendo poscia un' equazione dall'altra si traggono le tre di primo grado, che seguono:

$$(a)\quad (L^2-H(G+M))z+GL-HK=0,$$
$$(b)\quad (GL-HK)z+G^2-HN=0,$$
$$(c)\quad (G(G+M)-KL)z+GK-LN=0,$$

dalle quali ricavansi le tre espressioni di

$$z=\frac{HK-GL}{L^2-H(G+M)}=\frac{HN-G^2}{GL-HK}=\frac{LN-GK}{G(G+M)-LK},$$

le quali ordinatamente si rappresentin per (α), (β), (γ). Combinandole a due a due si ottengono tre equazioni libere da z, e in sola y, e quantità note.

La combinazione della (α) e della (β) somministra

(φ) $HG^3 + HMG^2 - HG(HN + 2KL) + H^2(K^2 - MN) + HL^2N = 0$.

La combinazione della (α) colla (γ) porge

(ψ) $LG^3 + LMG^2 - LG(HN + 2KL) - LH(K^2 - MN) + L^3N = 0$.

La combinazione delle due (β), (γ) produce

(ω) $G^3 + MG^2 - G(HN + 2KL) + H(K^2 - MN) + L^2N = 0$.

Si vede a primo colpo d'occhio che $\varphi = H(\omega)$, e $(\psi) = L(\omega)$. I fattori H, L sono di quelli, che dir si sogliono superflui, inutili: io li chiamerò alteranti, riserbandomi ad esaminar poi se abbiano, o no qualche utilità. Si commenda per altra parte l'esposto metodo di Bezout siccome esente da fattori alteranti, anzi siccome il migliore di quanti se ne siano sino ad ora escogitati. Ma se esso dona l'equazione finale (ω) al dovuto grado, esso medesimo ci offre eziandío le due alterate (φ), (ψ). E ciò che più contraddice alla lode si è, che la equazione immune da alteramento si è quella che proviene dalla combinazione della espressione prima di z colla terza tratta dalla equazione terza di primo grado, che comunemente non si calcola.

E chi dubiterà che il simile non sia per produr questo metodo in equazioni più alte? Che nel crescente numero delle finali non cresca la moltitudine delle alterate? Laonde necessario si fa il conchiudere, che esso metodo non è da fattori sicuro, in quanto che non n'è per ogni lato immune.

Applichiamo ora la finale (ω) alle due equazioni

(C) $z^3 - pz + y(y^2 - p) = 0$. (D) $3yz^2 + 3y^2z - q = 0$.

Sono queste le due equazioni che dalla $x^3 - px - q = 0$, trasformata in $z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 - pz - py - q = 0$ si tirano con uno spezzamento inverso a quello detto Cardanico. Paragonandosi (C) alla (I.) si ha $A = 1$, $B = 0$, $C = -p$, $D = y(y^2 - p)$.

E richiamandosi (D) alla (II.) con moltiplicarla per z, si avrà paragonando $P = 3y$, $Q = 3y^2$, $R = -q$: onde si cava $G = 3y^2(y^2 - p)$, $H = -3y^2$, $K = 3y^3(y^2 - p)$, $L = q - 3py$, $M = -3py^2$, $N = -qy(y^2 - p)$: sostituiti i quali valori nell'equazione (ω), ne proviene

$$y^9 - \frac{7}{3}py^7 + \frac{5}{3}p^2y^5 - \frac{2}{3^2}pqy^4 - \frac{3^2p^3 - q^2}{3^3}y^3 + \frac{2}{3^2}p^2qy^2 - \frac{1}{3^3}pq^2y = 0.$$

Or tosto si vede esser questa divisibile per y. Ma di più si può anche divider per $y^2 - p$, e per quoziente n'esce la equazione

$$(N) \quad y^6 - \frac{4}{3}py^4 + \frac{1}{3}p^2y^2 - \frac{2}{3^2}pqy + \frac{1}{3^3}q^2 = 0.$$

Come in altra mia Operetta fu da me trovato.

Anche dunque la finale (ω), che in generale non ha fattori che l'alteri, applicata alle particolari equazioni (C), (D) riesce avvolta di due fattori y, $y^2 - p$, i quali dal grado 6.°, proprio della giusta finale di esse (C), (D), la sollevano al grado 9.°. Se ne presenterà evidente agli occhi la ragione, sotto di essi schierando le tre espressioni (α), (β), (γ) di z particolari al caso nostro, e sono

$$z = \frac{3y^2(y^2-p)(-q-3y(y^2-p))}{(q-3py)^2+3^2y^4(y^2-p)-3^2py^4} = \frac{3y^2(y^2-p)(qy-3y^2(y^2-p))}{3y^2(y^2-p)(q+3y(y^2-p))} =$$

$$\frac{y(y^2-p)(q^2+3^2y^4(y^2-p)-3pqy)}{3y^2(y^2-p)(qy-3y^2(y^2-p))}.$$ Che anzi combinando la seconda e la terza di quest'espressioni, siccome per formare la generale equazione (ω) combinate si sono le generali espressioni (α), (γ), pare, che provenir ne dovrebbe un'equazione in y di grado 12.°; ma i termini di y^{11}, y^{10} spariscono distruggendosi i loro coefficienti, e il termine y^{12} non nasce.

Ma i fattori alteranti, de' quali esce avviluppata la finale (ω) nella particolare applicazione, che si viene dal farne, sono ad essa imputabili? possono volgersi eglino ad accusa del metodo? Sarà questo un altro punto, che dilucidérò a suo luogo. A tal dilucidamento apparecchierò intanto strada con osservare, che oltre al richiamare l'equazione particolare (D) alla generale (II.) con moltiplicare, come è più in costume, essa (D) per z, vi ha un altro modo di applicazione, qual è di richiamare inversamente la (II.) alla (D) facendo $P = 0$; con che si ha $Q = 3y$, $R = 3y^2$, $S = -q$, sussistendo i valori $A = 1$, $B = 0$, $C = -p$, $D = y(y^2 - p)$: con questa inverso modo di condur l'una all'altra le equazioni (II.), (D) cangiati i valori di P, Q, R, S, divenuto $G = -AS = q$, $H = -AQ = -3y$, $K = DQ = 3y^2(y^2 - p)$, $L = -AR = -3y^2$, $M = CQ = -3y$, $N = DR - CS = 3y^2(y^2 - p) - pq$, anche le tre espressioni di z si cangiano così:

$$z = \frac{3y(qy - 3y^2(y^2 - p))}{3y(q + 3y(y^2 - p))} = \frac{q^2 + 3^2y^4(y^2 - p) - 3pqy}{3y(qy - 3y^2(y^2 - p))} = \frac{3y^2(2pq - 3y^2(y^2 - p) - qy^2)}{q^2 + 3^2y^4(y^2 - p) - 3pqy}$$

delle quali si ha una combinazione, quella cioè della seconda e terza, relativa alla generale (ω), che dona l'equazione (N) senza verun fattore in y che ne alteri il grado; e la combinazion della prima con la seconda altera (N) con il fattore y; e quella della prima con la terza con il fattore di secondo grado y^2; ma niuna con il fattore $y^2 - p$.

§. II.

Via al parer dell'Eulero tenuta dal Nevvton producente fattori alteranti.

Eulero nella sua *Memoria su la eliminazione*, inserita negli Atti dell'Accademia di Berlino anno 1764, espone un metodo, con il quale pare, a suo dire, che il Newton determinasse le formole di eliminazione, che primo ci diede sino alle equazioni di quarto grado, che perciò giusta al parere di Eulero io denominerò Newtoniano. Consiste esso in rendere uguali per reciproca moltiplicazione i termini primi delle due equazioni, ed i termini ultimi, con che sottraendo dopo l'uguagliamento un'equazione dall'altra si avranno due equazioni di un grado più basso delle date, e replicando l'operazione ne proverrà un pajo parimenti di un grado ancor inferiori, e così via via sino a giugner a due di semplice primo grado. Vediamolo nelle equazioni di terzo grado:

(I.) $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$. (II.) $Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0$.

Rendendo uguali i primi termini ne nascerà per sottrazione la stessa equazione che nel metodo di Bezout, essendo stessissimo l'operare. Avremo dunque, compendiate come là le espressioni,

$$(1.)\quad Hz^2 + Lz + G = 0.$$

Si rendano ora uguali gli ultimi termini moltiplicando la equazione (I.) per S, e la (II.) vicendevolmente per (D): sottraendo questa da quella troveremo la

$$(3.)\quad Gz^2 + Kz + N = 0,$$

avuta nel metodo del Bezout alla terza reciproca moltiplica di (I.) per $Pz^2 + Qz + R$, e di (II.) per $Az^2 + Bz + C$. E chi porrà un po' d'attenzione agli effetti di quelle e di queste moltiplicazioni ne rileverà da sè, senza che io mi dilunghi a dimostrarla, la ragione.

Si trattino in simil modo le due equazioni (1.), (3.); cioè si uguaglino prima i termini di z^2, e si avrà, sottraendo, non altrimenti che nel metodo Bezoutiano per la combinazione medesima,

$$(b)\ (GL-HK)z+G^2-HN=0.$$

Ma rendendo uguali gli ultimi termini ne sortirà con la sottrazione un'equazione, che segnerò (d)

$$(d)\ (HN-G^2)z+LN-GK=0.$$

Finalmente rendendo uguali i primi termini delle due equazioni (b), (d) si conseguirà per finale equazione libera da z

$$(HN-G^2)^2+(LN-GK)(GL-HK)=0,$$

cioè svolgendo

$$(\Delta)\ G^4-G^2(2HN+KL)+G(HK^2+L^2N)+HN(HN-LK)=0.$$

Ecco una equazione di quarto grado in G, e che per conseguenza è certamente alterata da un fattore, poichè la finale (ω) del metodo Bezoutiano parimenti in G è di terzo, Eulero dice, che è divisibile per G, e si vede tosto che questa quantità deve certamente entrar nel fattore; ma non apparisce come essa sola esser possa il fattor tutto; soggiugne Eulero scoprirsi ciò sviluppando l'equazione, effettuando cioè dopo rimessi in luogo delle specie compendiose G, H, K.... che io uso, i valori loro, le potenze, ed i prodotti. Ma senza tutta questa pena io osservo essere $HN-KL=-MG$, cioè

$$(BP-AQ)(DR-CS)-(CP-AR)(DQ-BS)=-(CQ-BR)(DP-AS):$$

dunque avremo

$$G^4-G^2(2HN+KL)+G(HK^2+L^2N)-HMNG=0,$$

vale dire

$$G(G^3-G(2HN+KL)+H(K^2-MN)+L^2N)=0,$$

e nel moltiplicatore del termine in G, in luogo di un HN ponendo, $KL-MG$ verrà

$$G(G^3-G(HN+KL-MG+KL)+H(K^2-MN)+L^2N)=0,$$

per conseguenza $(\Delta)=G(\omega)$, siccome nel metodo Bezoutiano $(\phi)=H(\omega)$, $(\psi)=L(\omega)$.

Presentando dunque il metodo Newtoniano l'equazion finale alterata dal fattore G, egli è quindi che Eulero il rigetta, e ne deduce la necessità di proporre il suo, che poi vedremo. Qui permesso mi sia un riflesso sul calcolo, che Eulero medesimo fa del grado dell'equazione (Δ), ommesso il fattore G, che viene poi ad essere il grado della (ω). Dice che essendo G di secondo grado, sarà l'equazione (ω) che monta a G^3 di grado 6.°. Ma io ossérvo, che $G = D\,P - A\,S$, e D, P possono contenere ambedue y^3, e similmente contener lo possono le due A, S; dunque G può essere di grado 6.°, e per conseguenza G^3, e quindi l'equazione (ω) salire al grado 18.° Nel caso delle equazioni (C), $z\,(D)$, $G = 3\,y^2\,(y^2 - p)$ è di grado 4.°, e l'equazione (ω), che risultar dovrebbe di grado 12.°, risulta di 9.° sol perchè a ragione dei particolari rapporti delle quantità A, B, C, D, P, Q, R, S, e conseguentemente delle funzioni loro G, H, K .... si annullano i coefficienti di y^{12}, y^{10}, e non risulta termine in y^{11}.

Se tratto dall'equazione $H\,N - K\,L = - M\,G$ il valore $H\,N = K\,L - M\,G$ s'introduca nell'equazion (d), questa coinciderà con la (c) del metodo Bezoutiano, e per finale equazione invece di (Δ) proverrà a dirittura la Bezoutiana (ω). Dunque la equazion (d) non differisce dalla (c) che in aspetto, essendo in fondo la stessa, ed il metodo Bezoutiano non è in sostanza diverso da quello che sul parere di Eulero io ho chiamato Newtoniano, e non è che un' utile estensione di esso, la quale all'uguagliamento dei soli termini estremi sostituisce un ordinato uguagliamento continuo dai primi agli ultimi, e la quale moltiplica le finali equazioni, e ne produce una di giusto grado.

I tre fattori H, L, G, i due primi dal metodo Bezoutiano prodotti, il terzo dal Newtoniano, nell'applicazione alle due equazioni (C), (D) ricevono differenti valori secondo il differente modo di far convenire tra loro la (II.), e la (D), o elevando questa, con moltiplicarla per z, al grado della (II.), il che porta $S = 0$, od inversamente abbassando (II.) al grado della (D), con porre a dirittura $P = 0$.

Nel primo modo

$$H = -3y^2 .\ L = q - 3py .\ G = 3y^2(y^2 - p).$$

Nel secondo modo

$$H = -3y .\ L = -3y^2 .\ G = q .$$

Apparisce, che sebbene in genere G sia un fattor alterante, in qualche caso particolare però, rimanendo privo di termine in y, e non comprendendo che quantità nota, può perdere il carattere di fattor alterante, e la equazione (Δ) può riuscire affatto identica alla Bezoutiana (ω), e così accade nel caso delle equazioni (C), (D) applicando la (II.) alla (D) nel secondo modo. Chi sa estendere le idee, e spignerle per le infinite diverse combinazioni, comprenderà di leggieri, che l'avvenimento non ristrignesi al caso delle due equazioni, una di terzo, l'altra di secondo grado, ma che può aver eziandio luogo in due di terzo. Similmente i fattori Bezoutiani H, L possono convertirsi in quantità date e costanti, e perder la forza di alterare le equazioni (ϕ), (ψ), cosicchè queste riescano identiche di grado alla (ω). Non lascierò per questo di chiamar fattori di tal sorta alteranti, non attesi nella general considerazione i rari accidentali concorsi, ma avuto riguardo ai casi ordinarj più semplici, e più estesi. Poichè $(\Delta) = G(\omega)$, essa (Δ) rispetto alle due (C), (D) darà nel primo modo di applicazione $3y^2(y^2 - p) . y(y^2 - p)(N)$; e nel secondo $q(N)$, che non differisce in essenza da (N), poichè q, siccome quantità data, non induce alterazione.

Sin qui si son veduti gli effetti del riferire alle due (C), (D) tutto il calcolo delle due (I.), (II.) e del trarre la finale dell'eliminamento di z particolare dalle finali dell' eliminamento fatto in generale. Ma in verità essendo l'equazione (D) di secondo grado, dopo, che uguagliati i primi termini di (C), $z(D)$, ricavata siasi, sottraendo, l'equazione di secondo grado (1.), non vi ha ragione di procurarsi altra equazione di secondo grado, potendosi a dirittura dalla (1.), e da essa (D) ottenere le equazioni di primo grado necessarie a compiere la eliminazione. Or eguagliando i primi termini di (1.), e (D), e sottraendo si ha

$$(e)\ (3yL - 3y^2H)z + 3yG + qH = 0,$$

e moltiplicando la (1.) per $3yz + 3y^2$, e la (D) per $Hz + L$ giusta il metodo Bezoutiano, ovver semplicemente per $-q$ la (1.), e per G la (D), a norma del metodo Newtoniano: nell'uno e nell'altro modo, sottratto un prodotto dall'altro, si trova

$$(f)\ (Hq + 3yG)z + Lq + 3y^2G = 0,$$

dalle quali due equazioni di primo grado si cava

$$(3yL - 3y^2H)(Lq - 3y^2G) - (Hq + 3yG)^2 = 0,$$

che, per esser $G = 3y^2(y^2 - p)$, $H = -3y^2$, $L = q - 3py$, porge svolta

$$y^7 - \frac{4}{3}py^5 + \frac{1}{3}p^2y^3 - \frac{2}{3}pqy^2 + \frac{1}{3}q^2y = 0,$$

cioè $y\,(N)$.

Dunque il fare per le due equazioni (C), (D) un calcolo particolare più ristretto ed accomodato, sia giusta il Bezoutiano, sia giusta il Newtoniano metodo, non serve ad ischivare nella finale di eliminamento ogni alterante fattore. E non è maraviglia, partendo il calcolo particolare dall'innalzamento di (D) a $z(D)$, nel qual modo la stessa final Bezoutiana (ω) produce $y(y^2-p)(N)$: la particolarità pertanto, e contrazione del calcolo fa sfuggire il fattore y^2-p. Ma non vi ha altra via di ottener col metodo Bezoutiano esattamente la finale (N) che di discendere dalla (II.) alla (D) con fare $P=0$; via, che ha del pari esito felice nel metodo Newtoniano, convertendosi per la posizione di $P=0$ il G in q, e la (Δ) essenzialmente nella (ω), nella (N). Si renderà manifesta allo sguardo tal differenza dei due distinti modi di applicare alle equazioni (C), (D) le finali (ω), (Δ) con lo sviluppo che procedo a fare.

§. III.

Doppio ordinato sviluppo della finale Bezoutiana (ω), e doppia finale indi dedotta per il caso di due equazioni, una di terzo, l'altra di secondo grado.

Per isviluppo della equazione (ω) è chiaro altro non volersi significare che lo estenderla nei coefficienti proprj delle equazioni (I.), (II.), dalle quali fu derivata, rimettendo in luogo delle compendiose specie G, H, K . . . . i loro valori. Una farragine di termini ne nasce: a toglier la confusione, e rendere lo sviluppo utile conviene disporlo con qualche ordine. Primieramente io lo ordino così

$$(\omega')\quad \begin{array}{llll}
P^3D^3-P^2QCD^2 & +PQ^2BD^2 & -Q^3AD^2 & +R^3A^2D-S^3A^3 \\
+P^2R(C^2D-2BD^2) & -PR^2(2ACD-B^2D) & +Q^2RACD & -R^2SA^2C \\
-P^2S(C^3-3BCD+3AD^2) & -PS^2(3ABC-B^3-3A^2D) & -Q^2S(AC^2-2ABD) & +RS^2A^2B \\
 & -PQR(BCD-3AD^2) & -QR^2ABD & \\
 & +PQS(BC^2-2B^2D-ACD) & -QS^2(AB^2-2A^2C) & \\
 & -PRS(B^2C-2AC^2-ABD) & +QRS(ABC-3A^2D) &
\end{array} = 0$$

Il secondo ordine è di questo inverso

$$
(\omega'') \quad \begin{array}{llll}
S^3A^3 - S^2RA^2B & +SR^2A^2C & -R^3A^2D & +Q^3AD^2 - P^3D^3 \\
+S^2Q(AB^2-2A^2C) & +SQ^2(AC^2-2ABD) & +R^2QABD & -Q^2PBD^2 \\
+S^2P(3ABC-B^3-3A^2D) & +SP^2(C^3-3BCD+3AD^2) & +R^2P(2ACD-B^2D) & -QP^2CD^2 \\
 & -SRQ(ABC-3A^2D) & -RQ^2ACD & \\
 & +SRP(B^2C-2AC^2-ABD) & -RP^2(C^2D-2BD^2) & \\
 & -SQP(BC^2-2B^2D-ACD & +RQP(BCD-3AD^2) &
\end{array} = 0
$$

Dal primo ordinato sviluppo fatto $P = 0$, annullandosi i tre primi membri, per finale delle equazioni

$$(\mathrm{I}) \; Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0 \qquad (\mathrm{III}) \; Qz^2 + Rz + S = 0$$

si trae

$$
\begin{array}{ll}
-Q^3AD^2 & +R^3A^2D - S^3A^3 \\
+Q^2RACD & -R^2SA^2C \\
-Q^2S(AC^2-2ABD) & +RS^2A^2B \\
-QR^2ABD & \\
-QS^2(AB^2-2A^2C) & \\
+QRS(ABC-3A^2D) &
\end{array} = 0
$$

che è divisibile per A, fattore che nel caso delle due equazioni (C), (D) è $= 1$. Intendendo questa finale divisa per A la segnerò (Θ).

Dal secondo ordinato sviluppo, supposto $S = 0$, a finale delle due

$$(\mathrm{I}) \; Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0 \qquad (\mathrm{III}') \; Pz^3 + Qz^2 + Rz = 0$$

si tira

$$
\begin{array}{ll}
-R^3A^2D & +Q^3AD^2 \quad -P^3D^3 \\
+R^2QABD & -Q^2PBD^2 \\
+R^2P(2ACD-B^2D) & -QP^2CD^2 \\
-RQ^2ACD & \\
-RP^2(C^2D-2BD^2) & \\
+RQP(BCD-3AD^2) &
\end{array} = 0
$$

che ha il fattore D, il quale nel caso delle due equazioni (C) $z^3 - pz + y(y^2-p) = 0$, z (D) $3yz^2 + 3y^2z - qz = 0$, è $= y(y^2-p)$. Divisa questa finale per D segnisi (Θ').

Torneranno utili queste osservazioni su i fattori alteranti, allor che di essi tratterò di proposito.

ARTICOLO II.

Metodo di continuo inserimento del Bezout, producente o divisore inutile, o fattore alterante.

Prescrive il Bezout per il caso, che delle due equazioni date una sia di grado più basso che l'altra, una modificazion del suo general metodo, che viene ommessa nei libri di Analisi, e che io, riguardando come un metodo a parte, chiamo *metodo d'inserimento*, e premetto qui al metodo di *continua divisione*, avendo questi due metodi qualche cosa in che si congiungono, siccome in altro vincolo si legan quei di *continua divisione*, e di *continua condizione*. Qualora pertanto le due equazioni date sieno differenti di grado, l'una di grado maggiore n, l'altra di minor grado m, ordina Bezout, che dopo aver moltiplicato la seconda per z^{n-m}, e dopo d'aver procurato, con l'esposto metodo di uguagliamento ordinato e continuo, un numero m di equazioni di grado $n-1$ si sostituisca in ciascheduna di queste il valore di z^m tirato dalla men alta delle equazioni date, e si rinnovi la sostituzione sino a che in tutte le procurate equazioni z si abbassi alla potenza z^{m-1}, con che si verrà ad avere un numero m di equazioni di grado $m-1$, nelle quali considerando le potenze di z, z^{m-1}, z^{m-2}.... come tante incognite diverse di primo grado, si compierà con l'andamento di eliminazione usato per queste l'operazione. La rinnovata sostituzione del valore di z^m tratto dalla equazione data di grado minor m nelle procurate di grado $n-1$ sino ad abbassar queste al grado $m-1$ è ciò che io chiamo continuo inserimento.

Nel caso di $n=3$, $m=2$ ingiunge il Bezout di sostituir subito nell'equazione di terzo grado il valor di z^2 cavato da quella di secondo, con che essa di terzo discenderà a grado secondo, e di tornar a sostituire per deprimerla al primo: il che fatto, se traggasi da questa equazione di primo grado il valor di z, e si ponga nella data di secondo, la eliminazione di z sarà speditamente ottenuta.

Sieno in generale le due equazioni una di terzo, l'altra di secondo grado:

(I.) $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$. (III.) $Qz^2+Rz+S=0$.

Inserendo nella (I.) il valore di $z^2=\frac{-Rz-S}{Q}$ tratto dalla (III.), si ha $\frac{-ARz^2}{Q}+\left(C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}\right)z+D-\frac{BS}{Q}=0$,

ed inserendo di nuovo viene

$$\left(C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}\right)z+D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}=0,$$

onde $z=-\dfrac{D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}}{C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}}$

il qual valore di z inserito nella (III.) dona

$$\frac{Q\left(D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}\right)^2}{\left(C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}\right)^2}-\frac{R\left(D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}\right)}{C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}}+S=0,$$

che riducesi a

$$Q\left(D-\frac{BS}{Q}+\frac{ARS}{Q^2}\right)^2+\left(CS-\frac{AS^2}{Q}-DR\right)\left(C-\frac{AS}{Q}-\frac{BR}{Q}+\frac{AR^2}{Q^2}\right)=0;$$

ed eseguito, e moltiplicato per Q il quadrato, effettuato il prodotto, che gli vien dietro, scancellati i termini che si distruggono, trovasi resultare $\frac{1}{Q^2}\,(\Theta)$; dove il divisore Q^2 non reca alcun vantaggio, poichè a supporre che deprimesse il grado dell'equazione Θ dividendone tutti i termini, converrebbe in radice supporre per Q divisibili R, S, cioè l'equazione (III.) alla sua più semplice espression non ridotta. Se dopo ciascun inserimento, invece di conservar le frazioni, tolte le avessi, riuscito sarebbe Q^* (Θ).

ARTICOLO III.

Metodo di continua divisione promosso nella teoría. Produce tutt'insieme e divisore comunemente inutile e fattore alterante.

Il d'Alembert nella *Enciclopedia* all'articolo *Evanouir* non accenna che due metodi, uno che dir si può di alternativo paragone ed inserimento; l'altro che di *continua divisione* io chiamo, e di cui mi propongo ad un tempo promover la teoría, e notar il difetto. Suppone il celebre Enciclopedista, che le due equazioni date sieno di grado differente, oppure, essendo dello stesso, che con la liberazione, e separazione delle massime potenze dell'incognita da eliminarsi e col paragone dei valori loro se ne sia procurata una d'inferior grado. Si divida l'equazione di grado più alto per quella di minore data o procurata, questa per il residuo, questo trasferito di divisore in dividendo per il residuo secondo, e così via via il residuo secondo dividasi per il terzo, il terzo per il quarto ec. sino a giugnere ad un residuo senza l'incognita che si vuol eliminata, e sarà appunto tal residuo uguagliato a zero l'equazione libera da essa incognita che si desiderava. Questo metodo, che è in sostanza quello del ritrovamento del comun massimo divisore, ha sopra quelli sinora esposti il pregio di camminare ad una più chiara luce del principio intrinseco ad un problema comprendente due incognite, ed espresso per due equazioni. Queste equazioni sono due condizioni del problema che si devono insieme avverare, così che se espongasi per Y una funzione di y, che esprima il valore di z soddisfacente al problema, sostituito Y in luogo di z nelle due equazioni deve render vera sì l'una che l'altra. Dunque entrambe saran divisibili per $z - Y$, ossia $z - Y$ sarà comune lor divisore. Se il problema ammette diversi valori di y, ed altrettanti valori diversi di z corrispondenti, l'equazione $z - Y = 0$ darà per ciascheduno dei valori di y introdotto in Y il corrispondente valore di z; rappresenterà per conseguenza $z - Y = 0$ tutte le corrispondenti soluzioni, e ritenendo per qualunque delle determinazioni di y la proprietà di esser comune divisore delle due equazioni date ne sarà un comun divisore di primo grado, ma *vario*, o dir si voglia *multipollente*. Nella continuata divisione sarà esso l'ultimo divisore, ed il residuo della divisione per esso fatta, il qual sarà privo di z, essendo uguagliato a zero verrà ad essere l'equazione in sola y, che di questa determinerà i diversi valori. Se per la natura del problema ad un valore di y potrà corrispondere un valor doppio di z, il divisor comune delle due equazioni sarà un'equazion di secondo grado $z^2 + Yz + Y' = 0$; e se i valori di y possano essere più di uno, questa equazione sarà un divisor comune delle due del problema doppiamente vario, o multipollente. Così vadasi discorrendo se per natura del problema ad ogni valor diverso di y corrisponder potessero tre, quattro .... n valori di z: il divisor comune sarà di grado n, e sarà esso l'ultimo divisore della continua divisione, cioè là si fermerà l'operazion del dividere, inaspettatamente e di repente da un dividendo a z^n saltandosi ad un residuo senza z, annullandosi da lor medesimi ad un tratto tutti i coefficienti delle potenze di z inferiori ad n.

Veggo esser mestieri, che dopo aver così, con distinguer i possibili diversi gradi del comun divisore, promossa la teoría del metodo, la rischiari con gli esempj. Incominciamo ad applicare esso metodo alle due equazioni.

(I.) $Az^3 + Bz^2 + Cz\,D = 0$. (III.) $Qz^2 + Rz + S = 0$.

Dividendo (I.) per (III.) sarà il residuo

$$(r')\quad \left(C - \frac{AS}{Q} - \frac{R}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)\right)z + D - \frac{S}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)$$

Dividendo (III.) per (r') il residuo secondo senza z da porsi uguale a zero sarà

$$(r'')\quad S - \frac{R\left(D - \frac{S}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)\right)}{C - \frac{AS}{Q} - \frac{R}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)} + \frac{Q\left(D - \frac{S}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)\right)^2}{\left(C - \frac{AS}{Q} - \frac{R}{Q}\left(B - \frac{AR}{Q}\right)\right)^2} = 0$$

Questa è a puntino la equazione, che si è veduto sortire dal continuo inserimento, e si è osservato essere $= \frac{1}{Q^2}(\Theta)$. E ben penetrando si scopre la ragione dell'identico successo. Il continuo inserimento altro non è che una continua division compendiata. Se nella divisione di (I.) per (III.) si disponga (I.) così: $(Az + B)z^2 + Cz + D = 0$, il quoziente del primo atto di divisione essendo $\frac{Az+B}{Q}$, moltiplicato per (III.) produce a residuo di esso primo atto di divisione l'effetto del primo inserimento, e con il secondo atto di divisione si ha il residuo (r') corrispondente all'effetto dell' inserimento secondo. Similmente l'inserimento del valore di z nella (III.) è un compendio della divisione di (III.) per (r'). Ecco il vincolo, che io da principio accennai essere tra i due metodi.

Procediamo a determinare per mezzo del metodo di continua divisione la finale dell'eliminamento di z dalle due equazioni ambe di terzo grado.

(I.) $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$. (II.) $Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$.

Liberando, e lasciando soli in un membro li cubi z^3, e paragonandone i due valori, si otterrebbe l'equazione di secondo grado

$$\tfrac{1}{AP}\big((BP-AQ)z^2+(CP-AR)z+DP-AS\big)=\tfrac{1}{AP}(Hz^2+Lz+G)=0,$$

essendo $Hz^2+Lz+G=0$, l'equazione (1.) conseguita col metodo Bezoutiano, e col Newtoniano uguagliando per la reciproca moltiplica di (I.) per P, di (II.) per A i primi loro termini. Serviamoci della semplice $Hz^2+Lz+G=0$. Dividendo per questa la (I.) si avrà un residuo (R') simile affatto al (r') cangiato Q in H, R in L, S in G, sarà dunque

$$(R')\left(C-\tfrac{AG}{H}-\tfrac{L}{H}\left(B-\tfrac{AL}{H}\right)\right)z+D-\tfrac{G}{H}\left(B-\tfrac{AL}{H}\right),$$

e dividendo per questo (R') la $Hz^2+Lz+G=0$, si avrà a residuo (R''), ossia ad equazione finale

$$(R'')\ \left(CG-\tfrac{AG^2}{H}-DL\right)\left(C-\tfrac{AG}{H}-\tfrac{L}{H}\left(B-\tfrac{AL}{H}\right)\right)+H\left(D-\tfrac{G}{H}\left(B-\tfrac{AL}{H}\right)\right)^2=0$$

che con pazienza sviluppando, e confrontando si trova

$$=\tfrac{A^2}{H^2}(\omega)=\tfrac{A^2}{(BP-AQ)^2}(\omega).$$

Ecco una combinazione di fattore alterante, e di fattore deprimente, ossia divisore. Ma egli è evidente essere il deprimente H^2 inutile, se tutti i termini di ω non sieno per esso divisibili, che è un singolarissimo caso.

Avanziamoci ad un esempio, in cui le due equazioni date abbiano un divisor comune di secondo grado per esser il problema di tal natura, che ad ogni valor di y ne corrispondano due di z. Di sì fatta indole sono le due equazioni

(IV.) $z^3+yz^2-yz+b-2ay=0$. (V.) $z^3+(y-f)z^2-yz+b-(2a-f)y=0$.

Avendosi qui $A=1$, $B=y$, $C=-y$, $D=b-2ay$; $P=1$, $Q=y-f$, $R=-y$, $S=b-(2a-f)y$, e per le generali posizioni essendo $H=BP-AQ$, $L=CP-AR$, $G=DP-AS$, ne verrà $H=B-Q=f$, $L=C-R=0$, $G=D-S=-fy$, e quindi il primo divisore $Hz^2+Lz+G=fz^2-fy$, ed il primo residuo

$(R')=\left(-y+\frac{fy}{f}\right)z+b-2ay+y.y$, vale dire $0z+b-2ay+y^2$.

Dunque l'equazione $y^2-2ay+b=0$ sarà l'equazione finale libera da z, che ci darà i valori di y, e l'equazione $fz^2-fy=0$, ossia $z^2-y=0$ sarà il divisor comune di secondo grado delle due date equazioni (IV.), (V.), il quale per ciascun dei valori di y ci somministrerà due valori di z. Che z^2-y sia divisor comune delle equazioni (IV.), (V.) si vedrà cogli occhi instituendo le divisioni: la divisione di (IV.) darà per quoziente $z+y$, e per residuo $y^2-2ay+b$; e la divisione di (V.) darà di quoziente $z+y-f$, e di residuo $y(y-f)+b-(2a-f)y$, che per la elisione dei due termini $-fy$, $+fy$ ricade nell'antecedente $y^2-2ay+b$, il quale, essendo per ipotesi $=0$, rende ambe le divisioni perfette, e dimostra z^2-y comune divisore delle due equazioni.

Accennerò eziandío la maniera di costituire in genere le forme di due equazioni di terzo grado dell'esposta natura, ammettenti cioè un comun divisore di secondo grado, qual è $z^2+Yz+Y'=0$, intendendo per Y, Y' funzioni di y anche frazionarie. Supponendo le due equazioni desiderate essere

(I.) $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$. (II.) $Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$,

si cerca il conveniente rapporto tra le funzioni di y, A, B, C, D, P, Q, R, S.

Per render la determinazione di tal rapporto più agevole, e più chiara, si suppongano $A = P = 1$, e per non pregiudicar al tempo stesso alla generalità si concepiscano, se piace, le altre funzioni di y, cioè B, C, D, Q, R, S frazionarie. Confrontando $z^2 + Yz + Y'$ con $Hz^2 + Lz + G$, e modificando giusta l'ipotesi di $A = P = 1$ i generali valori H, L, G, si vedrà essere $1 = H = B - Q$; $Y = L = C - R$; $Y' = G = D - S$.

Ad esser poi $z^2 + Yz + Y'$ esatto divisore delle due equazioni (I.), (II.), dovendo nel residuo (R'') annullarsi da sè il coefficiente di z, ed essere l'altro termine una funzione di y (che segnerò Y'') da potersi costituire in equazione, si avrà

$$C - Y' - Y(B - Y) = 0. \quad D - Y'(B - Y) = Y''.$$

Cinque sono le equazioni, e sei le determinazioni da farsi, onde una resta libera, ed arbitraria: sciegliamo a fare $B = Y'''$: saranno quindi

$$B = Y'''; \quad C = Y' + Y(Y''' - Y); \quad D = Y'(Y''' - Y) + Y''$$
$$Q = Y''' - 1; \quad R = Y' + Y(Y''' - Y) - Y; \quad S = Y'(Y''' - Y) + Y'' - Y';$$

e perciò le due ricercate equazioni saranno

$$z^3 + Y'''z^2 + (Y' + Y(Y''' - Y))z + Y'(Y''' - Y) + Y'' = 0,$$
$$z^3 + (Y''' - 1)z^2 + (Y' + Y(Y''' - Y) - Y)z + Y'(Y''' - Y) - Y' + Y'' = 0.$$

Il comun lor divisore sarà $z^2 + Yz + Y'$; ed il residuo di ambe le divisioni determinante i valori di y sarà $Y'' = 0$; e per ciascun di questi valori di y l'equazione $z^2 + Yz + Y' = 0$ darà due valori di z.

ARTICOLO IV.

Metodo di continua condizione dell'Eulero, di nuove viste, e finali equazioni arricchito producente fattori alteranti.

Da quello del metodo di continua divisione non è diverso il fondamento del metodo dall'Eulero proposto nel volume dell'Accademia di Berlino per l'anno 1764. Ma Eulero vi aggiugne un nuovo luminoso riflesso, e ne fa un nuovo maneggio, di cui dà un esempio in due equazioni, una di terzo, l'altra di secondo grado. Sieno

$$(\text{I.})\ z^3+\frac{B}{A}z^2+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0.\quad (\text{III.})\ z^2+\frac{R}{Q}z+\frac{S}{Q}=0.$$

Dovendo le due equazioni verificarsi insieme, cioè l'una e l'altra per un certo valor di z, qual esprimasi per Y, dovendo per conseguenza ambedue le equazioni contener a fattore $z-Y$, d'altro non si tratta in cercare una equazione senza z, e solo composta dei coefficienti $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{Q}$, che di determinare il rapporto di questi tutti infra di loro, onde la condizione esposta abbia realmente luogo, cioè sia effettivamente $z-Y$ fattor comune delle due equazioni. Ecco in fondo, ed in ultima analisi l'oggetto della eliminazione di z: determinar l'equazione, che leghi in tal continuo rapporto i detti coefficienti tutti, che si avveri la condizione accennata; egli è di qui che io ho preso il titolo dato a questo metodo di Eulero di *continua condizione*.

Si ponga pertanto

$$(\text{I.})\ z^3+\frac{B}{A}z^2+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=(z^2+gz+h)(z-Y).$$

$$(\text{III.})\ z^2+\frac{R}{Q}z+\frac{S}{Q}=(z+f)(z-Y).$$

Moltiplicando reciprocamente (I.) per $z+f$, e (III.) per z^2+gz+h, dovranno i prodotti riuscir uguali, siccome ambedue $=z-Y$.

Paragonando quinci i coefficienti dei termini simili di essi prodotti, si avranno le quattro equazioni

$$1.^a\ \frac{R}{Q}+g=\frac{B}{A}+f. \qquad 2.^a\ \frac{S}{Q}+\frac{R}{Q}g+h=\frac{C}{A}+\frac{B}{A}f.$$

$$3.^a\ \frac{S}{Q}g+\frac{R}{Q}h=\frac{D}{A}+\frac{C}{A}f. \quad 4.^a\ \frac{S}{Q}h=\frac{D}{A}f,$$

per mezzo delle quali, discacciate f, g, h, si otterrà l'equazione desiderata: e siccome il discacciamento si fa con un continuo processo, che va continuamente legando fra loro nel rapporto alla mentovata condizion necessario i divisati coefficienti; così giusto mi par, che sempre meglio apparisca il titolo di *continua condizione*, onde questo metodo ho distinto. Il calcolo poi per giugnere alla bramata equazione, espulse f, g, h, è agevole e senza ostacolo veruno, non avendosi a maneggiare che equazioni semplici. Tratta dalla 1.ª la espressione di f, e trasportatala nella 2.ª, e da questa cavata l'espressione di h, ed introdotte le espressioni di f, e di h nella 3.ª si troverà

$$g=\frac{B}{A}-\frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)+\frac{D}{A}}{\frac{R}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)-\left(\frac{S}{Q}-\frac{C}{A}\right)}, \text{ che porrò } =\frac{B}{A}-\frac{t}{u}.$$

E con le medesime espressioni di f, ed h introdotte nella 4.ª proviene

$$g=\frac{B}{A}-\frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{S}{Q}-\frac{C}{A}\right)+\frac{R}{Q}\cdot\frac{D}{A}}{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)+\frac{D}{A}}, \text{ che porrò } =\frac{B}{A}-\frac{v}{t};$$

onde ne deriva $\quad (\Sigma)\ \left(\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)+\frac{D}{A}\right)^2-$

$$\left(\frac{R}{Q}\left(\frac{R}{Q}-\frac{B}{A}\right)-\left(\frac{S}{Q}-\frac{C}{A}\right)\right)\left(\frac{S}{Q}\left(\frac{S}{Q}-\frac{C}{A}\right)+\frac{DR}{AQ}\right)=o.$$

Che se confrontisi, trovasi essere la equazione fornitaci dal continuo inserimento divisa per $A^2 Q$; onde $(\Sigma)=\frac{1}{A^2 Q^3}(\Theta)$.

Ommette l'Eulero la determinazione di Y rappresentante il valor di z soddisfacente ad ambe insieme le equazioni, giusta che il problema esige. Prendendo a supplirvi, per maggior comodo, in luogo dei coefficienti fratti sostituite delle spezie intere, rappresenterò le date equazioni (I.), (III.) così:

(I.) $z^3+\alpha z^2+\beta z+\gamma=o$. (III.) $z^2+\delta z+\varepsilon=o$.

Or si osservi che essendosi supposto

$$z^2+\delta z+\varepsilon=(z+f)(z-Y)=z^2+(f-Y)z-fY,$$

si ha conseguentemente $f-Y=\delta$, $-fY=\varepsilon$; onde

$Y=f-\delta=\frac{-\varepsilon}{f}$.

Ma $f=\delta-\alpha+g=\delta-\alpha+\alpha-\frac{t}{u}=\delta-\alpha+\alpha-\frac{v}{t}=\delta-\frac{t}{u}=\delta-\frac{v}{t}$.

Dunque $Y=-\frac{t}{u}=-\frac{v}{t}=\frac{-\varepsilon u}{\delta u-t}=\frac{-\varepsilon t}{\delta t-v}$.

Devesi riflettere, che $\frac{t}{u}=\frac{\varepsilon(\delta-\alpha)+\gamma}{\delta(\delta-\alpha)-(\varepsilon-\beta)}$; $\frac{v}{t}=\frac{\varepsilon(\varepsilon-\beta)+\delta\gamma}{\varepsilon(\delta-\alpha)+\gamma}$.

Per lo che trovasi, che la quarta espression di Y, vale dire $\frac{-\varepsilon t}{\delta t-v}$, coincide con la prima $\frac{-t}{u}$: cosicchè di quattro si riducono a tre: $Y=-\frac{t}{u}=-\frac{v}{t}=-\frac{\varepsilon u}{\delta u-t}$; e più distesamente

$$Y=-\frac{\varepsilon(\delta-\alpha)+\gamma}{\delta(\delta-\alpha)-(\varepsilon-\beta)}=-\frac{\varepsilon(\varepsilon-\beta)+\delta\gamma}{\varepsilon(\delta-\alpha)+\gamma}=-\frac{\varepsilon(\delta(\delta-\alpha)-(\varepsilon-\beta))}{\delta^2(\delta-\alpha)-\delta(\varepsilon-\beta)-\varepsilon(\delta-\alpha)-\gamma}$$

La terza espressione, se ben attendasi, nasce dalle due antecedenti, moltiplicando il numerator della prima per δ, e dal prodotto sottraendo il numerator della seconda, con che si ha il numerator della terza; moltiplicando il deno-

minator della prima parimenti per δ, e poi sottraendo dal prodotto il denominator della seconda, e la differenza costituisce il denominator della terza. La ragione s'intende da una equazione, a cui ci conduce la già notata coincidenza di $\frac{-\varepsilon t}{\delta t - v}$ con $\frac{-t}{u}$. Di qui cavasi $\varepsilon u = \delta t - v$: dunque $\frac{-\varepsilon u}{\delta u - t} = - \frac{\delta t - v}{\delta u - t}$, cioè la struttura della terza espressione, che ho descritto. Dalla equazione $\varepsilon u = \delta t - v$ tirasi anche reciprocamente $v = \delta t - \varepsilon u$; onde $\frac{v}{t} = \frac{\delta t - \varepsilon u}{t}$. Per la qual cosa essendo $\frac{t}{u} = \frac{v}{t}$ sarà $\frac{t}{u} = \frac{\delta t - \varepsilon u}{t}$, e quindi
$t^2 = u(\delta t - \varepsilon u)$.

Ecco in breve forma la finale equazione (Σ) costrutta pella sola frazione $\frac{t}{u}$, senza che vi entri il numeratore v della frazione $\frac{v}{t}$.

Poichè per Y abbiamo indicato il valor di z, avremo di questa tre espressioni

$$z = -\frac{t}{u} = -\frac{\delta t - \varepsilon u}{t} = -\frac{\varepsilon u}{\delta u - t}.$$

Combinandole a due a due si scopre tosto che la combinazione della prima con la seconda, e quella della prima con la terza coincidono in dare $t^2 - u(\delta t - \varepsilon u) = 0$. E la combinazione della seconda con la terza si trova produrre $\delta(t^2 - u(\delta t - \varepsilon u)) = 0$: laonde abbiamo da tutte e tre insieme le combinazioni

$$(\Sigma) \quad t^2 - u(\delta t - \varepsilon u) = 0. \qquad (\Sigma') = \delta(\Sigma).$$

L'equazione (Σ) darà i valori di y. Giusta il numero loro ciascheduna delle tre espressioni di z prenderà un numero di determinazioni diverse, ma per ciascuno ciascuna la determinazione medesima, ossia il medesimo valore. Le tre espressioni di z pei primitivi coefficienti delle equazioni (I.), (III.) saranno

$$z = \frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) + \frac{D}{A}}{\frac{R}{Q}\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) - \left(\frac{S}{Q} - \frac{C}{A}\right)} = - \frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{S}{Q} - \frac{C}{A}\right) + \frac{DR}{AQ}}{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) + \frac{D}{A}} =$$

$$- \frac{\frac{S}{Q}\left(\frac{R}{Q}\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) - \left(\frac{S}{Q} - \frac{C}{A}\right)\right)}{\left(\frac{R^2}{Q^2} - \frac{S}{Q}\right)\left(\frac{R}{Q} - \frac{B}{A}\right) - \frac{R}{Q}\left(\frac{S}{Q} - \frac{C}{A}\right) - \frac{D}{A}}.$$

Applicando il trovato sin qui alle due equazioni (C), (D), si avrà

$t = \frac{-q + 3y(y^2 - p)}{3}$; $u = \frac{q + 3y(y^2 - p)}{3y}$; $\delta t = \frac{-qy + 3y^2(y^2 + p)}{3}$;

$\delta u = \frac{q + 3y(y^2 - p)}{3}$; $\delta u - t = \frac{2}{3} q$; $\varepsilon u = \frac{-q^2 - 3qy(y^2 - p)}{3^2 y^2}$; $\delta t - \varepsilon u =$ $\frac{q^2 + 3^2 y^4 (y^2 - p) - 3pqy}{3^2 y^2}$; onde

$$z = \frac{\frac{1}{3}(-q + 3y(y^2 - p))}{\frac{1}{3y}(q + 3y(y^2 - p))} = - \frac{\frac{1}{3^2 y^2}(q^2 + 3^2 y^4 (y^2 - p) - 3pqy)}{\frac{1}{3}(-q + 3y(y^2 - p))} = - \frac{q + 3y(y^2 - p)}{6y^2}$$

l'equazione

$$(\Sigma)\ \left(\frac{-q + 3y(y^2 - p)}{3}\right)^2 - \left(\frac{q + 3y(y^2 - p)}{3y}\right)\left(\frac{q^2 + 3^2 y^4 (y^2 - p) - 3pqy}{3^2 y^2}\right) = 0.$$

E svolgendo si vedrà essere $(\Sigma) = \frac{1}{3^3 y^3}(N)$, e quinci $(\Sigma') = y(\Sigma) = \frac{1}{3^3 y^2}(N)$.

Si può trasferire il calcolo fatto per le due equazioni (I.), (III.), la prima di terzo grado, l'altra di secondo alle due di terzo (I.), (II.), deducendo prima da esse la più volte usata di secondo grado (1.) $Hz^2 + Lz + G = 0$.

Trasportando dunque il calcolo dalle due (I.), (III.) alle due

$$(\mathrm{I.})\ z^3 + \frac{B}{A}z^2 + \frac{C}{A}z + \frac{D}{A} = 0.\quad (1.)\ z^2 + \frac{L}{H}z + \frac{G}{H} = 0,$$

con sostituire $\frac{L}{H}$ in luogo di $\frac{R}{Q}$; $\frac{G}{H}$ in luogo di $\frac{S}{Q}$ si otterrà

$$(\Lambda)\ \left(\frac{G}{H}\left(\frac{L}{H} - \frac{B}{H}\right) + \frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{L}{H}\left(\frac{L}{H} - \frac{B}{A}\right) - \left(\frac{G}{H} - \frac{C}{A}\right)\right)$$
$$\left(\frac{G}{H}\left(\frac{G}{H} - \frac{C}{A}\right) + \frac{DL}{AH}\right) = 0,$$

che si uguaglia al (R''), a cui il metodo di continua division terminò, diviso per HA^2; e perciò $(\Lambda) = \frac{1}{H^3}(\omega)$.

Se si desiderano le tre espressioni di z, esse sono:

$$z = \frac{\frac{G}{H}\left(\frac{L}{H} - \frac{B}{A}\right) + \frac{D}{A}}{\frac{L}{H}\left(\frac{L}{H} - \frac{B}{A}\right) - \left(\frac{G}{H} - \frac{C}{A}\right)} = - \frac{\frac{G}{H}\left(\frac{G}{H} - \frac{C}{A}\right) + \frac{DL}{AH}}{\frac{G}{H}\left(\frac{L}{H} - \frac{B}{A}\right) + \frac{D}{A}} =$$

$$- \frac{\frac{G}{H}\left(\frac{L}{H}\left(\frac{L}{H} - \frac{B}{A}\right) - \left(\frac{G}{H} - \frac{C}{A}\right)\right)}{\left(\frac{L^2}{H^2} - \frac{G}{H}\right)\left(\frac{L}{H} - \frac{B}{A}\right) - \frac{L}{H}\left(\frac{G}{H} - \frac{C}{A}\right) - \frac{D}{A}}.$$

La combinazione della seconda con la terza espressione dona $(\Lambda') = \frac{L}{H}\ (\Lambda) = \frac{L}{H^4}(\omega)$.

Ma cerchiamo la finale di eliminamento per le equazioni (I.) $z^3 + \frac{B}{A}z^2 + \frac{C}{A}z + \frac{D}{A} = 0$. (II.) $z^3 + \frac{Q}{P}z^2 + \frac{R}{P}z + \frac{S}{P} = 0$, applicando loro il metodo di Eulero immediatamente.

A maggior comodo però si faccia

$$\frac{B}{A} = B',\ \frac{C}{A} = C',\ \frac{D}{A} = D',\ \frac{Q}{P} = Q',\ \frac{R}{P} = R',\ \frac{S}{P} = S';$$

onde sieno

(I.) $z^3 + B'z^2 = C'z + D' = 0$. (II.) $z^3 + Q'z^2 + R'z + S' = 0$.

E si ponga inoltre $D' - S' = G'$, $B' - Q' = H'$, $C' - R' = L'$.

Dopo ciò concepiscasi

$$\text{(I.)}\ z^3 + B'z^2 + C'z + D' = (z^2 + gz + h)(z - Y).$$

$$\text{(II.)}\ z^3 + Q'z^2 + R'z + S' = (z^2 + ez + f)(z - Y),$$

si avrà per conseguenza

$$(z^3 + B'z^2 + C'z + D')(z^2 + ez + f) =$$
$$(z^3 + Q'z^2 + R'z + S')(z^2 + gz + h).$$

Eseguiti i prodotti, il paragone dei coefficienti di ciascuna podestà di z nell'uno e nell'altro somministrerà le cinque equazioni

1.ª $B' + e = Q' + g$.
2.ª $C' + B'e + f = R' + Q'g + h$.
3.ª $D' + C'e + B'f = S' + R'g + Q'h$.
4.ª $D'e + C'f = S'g + R'h$.
5.ª $D'f = S'h$.

dalla 1.ª ricavasi $e = -H' + g$;
dalla 2.ª $f = -L' + B'H' - H'g + h$;
dalla 3.ª $H'h = C'H' - G + B'(L' - B'H') - (L' - B'H')g$;
dalla 4.ª $g = B' - \frac{D'H'^2 + G'(L' - B'H')}{L'(L' - B'H') + H'(C'H' - G')}$ che porrò $= B' - \frac{t}{u}$,
dalla 5.ª $g = B' - \frac{D'H'L' - G'(C'H' - G')}{D'H'^2 + G'(L' - B'H')}$ che porrò $= B' - \frac{v}{t}$;
onde $t^2 - uv = 0$.

È cosa degna di osservazione, che se in vece di trarre dalla 3.ª equazione il valor di h, si tragga quello di g, e poi dalla 4.ª e dalla 5.ª si cavino due valori di h, e dal loro confronto si derivi l'equazion finale, riesce essa $\frac{L' - B'H'}{H'}(t^2 - uv) = 0$.

Di fatto dalla 3.ª

$$g = \frac{C'H' - G' - H'h}{L' - B'H'} + B',$$

dalla 4.ª

$$h = \frac{C'H' - G'}{H'} + \frac{(L' - B'H')(D'H' - B'G' + \frac{L'G'}{H})}{L'(L' - B'H') + H'(C'H' - G')} = \frac{C'H' - G'}{H'} + \frac{\frac{1}{H'}(L' - B'H')t}{u}$$

dalla 5.ª

$$h = \frac{C'H' - G'}{H'} + \frac{(L' - B'H')(D'L' - C'G' + \frac{G'^2}{H'})}{D'H'^2 + G'(L' - B'H'} = \frac{C'H' - G'}{H'} + \frac{\frac{1}{H'}(L' - B'H')v}{t}$$

Dunque uguagliando, proviene $\left(\frac{L' - B'H'}{H'}\right)(t^2 - uv) = 0$.
Si scorge che la via migliore, vale dir conducente ad una finale più semplice, è quella, che più ritarda le frazioni di denominator complesso.

Farò osservare che $v=\frac{L}{H}t-\frac{G}{H}u$, onde $\frac{v}{t}=\frac{Lt-Gu}{Ht}$, e quindi l'equazione $\frac{t}{u}=\frac{v}{t}$, dalla quale fu inferito $t^2-uv=0$, si converte in $Ht^2-u(Lt-Gu)=0$.

Dal supposto $z^3+B'z^2+C'z+D'=(z^2+gz+h)(z-Y)=z^3+(g-Y)z^2+(h-gY)z-hY$ si traggono tre espressioni di Y

$$Y=g-B'=\frac{h-C'}{g}=\frac{-D'}{h}.$$

Abbiam veduto sopra cavarsi dalla terza equazione la relazion di g, h, cioè $H'h=C'H'-G'+B'(L'-B'H')-(L'-B'H')g$.

Secondo i due valori di g si tireranno i due corrispondenti di h

$$h=\frac{1}{H'}(C'H'-G')+\frac{1}{H'}(L'-B'H')\cdot\frac{t}{u};$$

$$h=\frac{1}{H'}(C'H'-G')+\frac{1}{H'}(L'-B'H')\cdot\frac{v}{t}\cdot$$

Distinguendo i due valori di g per g, g', e i due corrispondenti di h per h, h', sei pare che ne dovrebbero provenire le espressioni di Y; ma la sesta $\frac{-D'}{h'}$ coincide con la prima $g-B'$, onde ristringonsi a cinque

$$Y=g-B'=\frac{h-C'}{g}=\frac{-D'}{h}=g'-B'=\frac{h'-C}{g'}.$$

Rimettendo in luogo delle spezie accentate B', C', D'.... i coefficienti fratti $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$.... si troverà $G'=\frac{D}{A}-\frac{S}{P}=\frac{DP-AS}{AP}=\frac{G}{AP}$; $H'=\frac{H}{AP}$, $L'=\frac{L}{AP}$, e la compendiosa equazione $t^2-uv=0$, si stenderà nella

$$(\Omega)\quad\left(\frac{DH^2}{A}+G\left(L-\frac{BH}{A}\right)^2-\left(L\left(L-\frac{BH}{A}\right)+H\left(\frac{CH}{A}-G\right)\right)\left(\frac{DH}{A}+G\left(\frac{CH}{A}-G\right)\right)=0$$

la quale è $=\frac{H^3}{A^3}(R'')=H(\omega)$,

l'altra equazion $\frac{1}{H'}(L'-B'H')(t^2-uv)=0$ diverrà

$\frac{1}{H}\left(L-\frac{BH}{A}\right)(\Omega)=\left(L-\frac{BH}{A}\right)(\omega)$: segnisi (Ω').

Le cinque espressioni Y, e conseguentemente di z, saranno

$$z=Y=-\frac{\frac{DH^2}{A}+G\left(L-\frac{BH}{A}\right)}{L\left(L-\frac{BH}{A}\right)+H\left(\frac{CH}{A}-G\right)}=$$

$$\frac{\left(\frac{DH}{A}-\frac{BG}{A}\right)\left(L-\frac{BH}{A}\right)+G\left(\frac{CH}{A}-G\right)}{\frac{BL}{A}\left(L-\frac{BH}{A}\right)-LG+\frac{CBH^2}{A^2}-\frac{DH^2}{A}}=$$

$$-\frac{\frac{DL}{A}\left(L-\frac{BH}{A}\right)+\frac{DH}{A}\left(\frac{CH}{A}-G\right)}{\left(\frac{DH}{A}+\frac{CL}{A}-\frac{BG}{A}\right)\left(L-\frac{BH}{A}\right)+\left(\frac{CH}{A}-G\right)^2}=$$

$$-\frac{\frac{DHL}{A}-G\left(\frac{CH}{A}-G\right)}{\frac{DH^2}{A}+G\left(L-\frac{BH}{A}\right)}=$$

$$\frac{\left(\frac{DL}{A}-\frac{CG}{A}\right)\left(L-\frac{BH}{A}\right)-\frac{DHG}{A}}{\left(\frac{BG}{A}-\frac{DH}{A}\right)\left(L-\frac{BH}{A}\right)+G\left(\frac{CH}{A}-G\right)}.$$

La combinazione della prima, e della quarta dona la equazione (Ω); e la combinazione della prima con la terza produce la equazion (Ω'): poichè la espressione prima è la $g-\frac{B}{A}$, con cui si è notato coincider la $\frac{\frac{-D}{A}}{h'}$ per tal motivo qui ommessa; e la terza è la $\frac{\frac{-D}{A}}{h}$; dunque la combinazione della prima con la terza è quanto prendere $\frac{\frac{-D}{A}}{h'}=\frac{\frac{-D}{A}}{h}$; donde $h=h'$, che è l'uguagliamento, da cui si ebbe sopra la (Ω'). È chiaro che il numero delle combinazioni delle cinque espressioni di z a due a due monta a 10, ed altrettante offerirannosi equazioni finali. È di più a riflettersi che similmente dall'equazione

$$z^3+Q'z^2+Rz+S=(z^2+ez+f)(z-Y)=z^3+(e-Y)z^2+(f-eY)z-fY$$

si posson trarre cinque diverse espressioni di Y, ossia di z; e per conseguenza altre 10 finali equazioni. Che anzi congiungendo queste cinque nuove espressioni con le altre cinque, il numero delle combinazioni di tutte e dieci fra loro a due a due, e del pari il numero delle finali equazioni ascenderà a 45. Io non mi prenderò la pena di formarle, e sott'occhio stenderne la schiera. Bastano al mio scopo le due (Ω), (Ω') rendendosi per esse a sufficienza palese che questo metodo di Eulero, scorto da una luminosa considerazione su l'ultimo oggetto dell'eliminamento, non gode però il pregio dall'esimio Autore creduto, di schivare i fattori alteranti; che anzi la finale (Ω') reca seco un fattore più complesso, che qualunque altro, da cui affetta presentata si sia la finale di qualsivoglia dei metodi superiori.

ARTICOLO V.

Metodo di prodotto non producente che divisori, ma comunemente inutili.

§. I.

Fondamenti del metodo per l'Eulero. Calcolo di lui. Cose desiderate alla perfezione di esso.

Se bella e profonda idea su l'intento della eliminazione, e l'uffizio dell'equazion finale produsse l'Eulero nel volume dell'Accademia di Berlino per l'anno 1764, belle e profonde viste sul rapporto delle due equazioni a due incognite premesse avea nel volume per l'anno 1748, e metodo più felice aveane ordito. L'argomento della Memoria non è espressamente l'eliminazione, ma un argomento affine, e porta essa il titolo: *Démonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper*. Ciò che vi è d'incidente, divenendo l'essenziale al mio proposito, è ciò che io debbo estrarne. Sieno le equazioni

$$(\xi)\quad z^m + \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} + \gamma z^{m-3} + \delta z^{m-4} \ldots + \theta = 0$$

$$(\mathrm{K})\quad z^n + \alpha' z^{n-1} + \beta' z^{-n-2} + \gamma' z^{n-3} + \delta' z^{n-4} \ldots + \tau' = 0,$$

le quali faccia mestieri combinar di modo, che ne risulti una, la quale non contenga più la lettera z. Si comprende tosto che il valor di z risultante da una di codeste equazioni deve essere uguale al valore di z risultante dall'altra. Dunque se l'una e l'altra equazione dia più valori di z, le due equazioni proposte potranno sussistere insieme, se un valore qualunque di z dato dall'una sia uguale ad un valore qualunque di z dell'altra. Supponiamo che tutte le radici della prima equazione sieno a, b, c, d .... al numero m, e le radici dell'altra sieno a', b', c', d' .... al numero n: egli è chiaro, che l'una e l'altra delle due equazioni proposte avrà luogo in tutti i casi, che una delle radici della prima equazione (ξ) sarà uguale ad una dell'altra (K). Esse due equazioni si possono rappresentare così:

$$(\xi)\quad (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)\ \ldots\ldots = 0$$

$$(\mathrm{K})\quad (z-a')(z-b')(z-c')(z-d')\ \ldots\ldots = 0.$$

E da tal rappresentazione rendesi manifesto, che se $a = a'$, il valor $z = a = a'$ soddisfarà all'una e all'altra equazione, e che accaderà lo stesso se $a = b'$ od $a = c'$, od $a = d'$ ... Similmente il valor $z = b$ soddisfarà all'una ed all'altra se $b = a'$, se $= b'$, se $= c'$ .... ed il valor $z = c$ soddisfarà ad ambedue le equazioni se $c = a'$, se $= b'$, se $= c'$, se $= d'$ .... Ed è evidente, che tutte queste combinazioni insieme raccolte rappresentano tutti i casi possibili, ne' quali le due proposte equazioni possono sussistere ad un tempo.

Poichè dunque l'equazion, che si cerca per mezzo dell' eliminamento, comprender deve tutti i casi possibili, ne' quali un medesimo valore posto in luogo di z soddisfa ad un tempo all'una ed all'altra equazione, egli è palese dover essa contenere tutti i casi notati, e perciò sarà ella composta di tutti questi fattori,

$$\left.\begin{array}{l}(a-a')(a-b')(a-c')(a-d')\ldots\\(b-a')(b-b')(b-c')(b-d')\ldots\\(c-a')(c-b')(c-c')(c-d')\ldots\\(d-a')(d-b')(d-c')(d-d')\ldots\end{array}\right\}=o,\ \text{ec.}$$

E poichè in questa equazione non si trova più z, dunque essa stessa sarà la equazion cercata per eliminazione, racchiudente tutti i casi, ne' quali le due equazioni proposte possono avere una radice medesima.

Avendo pertanto supposto

$$(K)\quad z^n+\alpha' z^{n-1}+\beta' z^{n-2}+\gamma' z^{n-3}\ldots+\tau'=(z-a')(z-b')(z-c')(z-d')\ldots=o.$$

Sostituendo successivamente in luogo di z nell'uno, e nell' altro membro a, b, c, d .... avremo, siccome dal secondo la serie dei fattori esposta, così dal primo questa

$$\left.\begin{array}{l}(a^n+\alpha' a^{n-1}+\beta' a^{n-2}+\gamma' a^{n-3}+\delta' a^{n-4}\ldots+\tau')\\(b^n+\alpha' b^{n-1}+\beta' b^{n-2}+\gamma' b^{n-3}+\delta' b^{n-4}\ldots+\tau')\\(c^n+\alpha' c^{n-1}+\beta' c^{n-2}+\gamma' c^{n-3}+\delta' c^{n-4}\ldots+\tau')\\(d^n+\alpha' d^{n-1}+\beta' d^{n-2}+\gamma' d^{n-3}+\delta' d^{n-4}\ldots+\tau')\end{array}\right\}=o,\ \text{ec.}$$

che saranno in numero m giusta il numero delle radici della prima equazione (ξ), e il cui prodotto comporrà parimenti la cercata equazione finale dell'eliminamento.

Egli è altresì evidente, che siccome scambiando le equazioni invertir si può il calcolo; così la stessa equazion finale rappresentar si può sotto la forma del prodotto

$$\begin{array}{l}
(a'^m + \alpha\, a'^{m-1} + \beta\, a'^{m-2} + \gamma\, a'^{m-3} + \delta\, a'^{m-4} \ldots + \theta \\
(b'^m + \alpha\, b'^{m-1} + \beta\, b'^{m-2} + \gamma\, b'^{m-3} + \delta\, b'^{m-4} \ldots + \theta \\
(c'^m + \alpha\, c'^{m-1} + \beta\, c'^{m-2} + \gamma\, c'^{m-3} + \delta\, c'^{m-4} \ldots + \theta \\
(d'^m + \alpha\, d'^{m-1} + \beta\, d'^{m-2} + \gamma\, d'^{m-3} + \delta\, d'^{m-4} \ldots + \theta \text{ ec.}
\end{array}$$

Il numero de' fattori essendo n, quale il numero delle radici a', b', c', d' . . . . dell'equazione (K). Scielgasi ad effettuare il prodotto primo. Vi nasceranno varie potenze, e varie combinazioni delle sconosciute radici a, b, c, d . . . . moltiplicate fra loro. Ma per la teoría delle equazioni si ha

$$\begin{array}{l}
-\alpha = a + b + c + d \ldots \\
\quad \beta = ab + ac + ad \ldots + bc + bd \ldots + cd \ldots \\
-\gamma = abc + acd \ldots + bcd \ldots \\
\quad \delta = abcd \ldots\ldots
\end{array}$$

E per mezzo di α, β, γ, δ . . . . si troverà di poter esprimere le somme delle altre potenze, o degli altri prodotti di esse sconosciute radici, come il dimostreranno gli esempj. S'incominci da due equazioni di secondo grado

	le radici supposte
$z^2 + \alpha z + \beta = 0$	a, b
$z^2 + \alpha' z + \beta' = 0$	a', b'

dunque per esser $m = n = 2$, l'equazione, a cui l'eliminamento condur deve, sarà

$$(a^2 + \alpha' a + \beta')(b^2 + \alpha' b + \beta') = 0,$$

che sviluppata darà

$$a^2b^2 + \alpha' ab(a+b) + \beta'(a^2+b^2) + \alpha'^2 ab + \alpha'\beta'(a+b) + \beta'^2 = 0.$$

Or avendo $a + b = -\alpha$, $ab = \beta$, sarà $a^2 + b^2 = \alpha^2 - 2\beta$; per conseguenza la equazion cercata sarà

$$\beta^2 - \alpha'\alpha\beta + \beta'(\alpha^2 - 2\beta) + \alpha'^2\beta + \alpha'\beta'\alpha + \beta'^2 = 0.$$

Sieno al presente le due equazioni proposte di terzo grado

$$\begin{array}{l|c} & \text{le radici supposte} \\ z^3+\alpha z^2+\beta z+\gamma=0 & a,\ b,\ c \\ z^3+\alpha' z^2+\beta' z+\gamma'=0 & a',\ b',\ c' \end{array}$$

l'equazion cercata priva di z sarà

$$(a^3+\alpha'a^2+\beta'a+\gamma')(b^3+\alpha'b^2+\beta'b+\gamma')(c^3+\alpha'c^2+\beta'c+\gamma')=0,$$

che per lo sviluppo diverrà

$$\begin{aligned}&a^3b^3c^3+\alpha'a^2b^2c^2(ab+ac+bc)+\beta'abc(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+\gamma'(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)\\&+\alpha'^2a^2b^2c^2(a+b+c)+\alpha'\beta'abc(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+\alpha'^3a^2b^2c^2\\&+\beta'^2abc(a^2+b^2+c^2)+\alpha'\gamma'(a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+a^2c^3+b^3c^2+b^2c^3)+\beta'^3abc\\&+\gamma'^2(a^3+b^3+c^3)+\beta'\gamma'(a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3)+\gamma'^3\\&+\alpha'^2\beta abc(ab+ac+bc)+\alpha'\beta'\gamma'(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)\\&+\alpha'^2\gamma(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+\beta'^2\gamma(ab+ac+bc)+\alpha'\beta'^2abc(a+b+c)\\&+\beta'\gamma'^2(a+b+c)+\alpha'\gamma'^2(a^2+b^2+c^2)=0,\end{aligned}$$

intorno al quale bisogna osservare che $a+b+c=-\alpha$; $ab+ac+bc=\beta$; $abc=-\gamma$; e le altre espressioni si troveranno formate degli stessi coefficienti α, β, γ nella guisa che segue

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2=\alpha^2-2\beta;\ a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2=-\alpha\beta+3\gamma\\&a^3+b^3+c^3=-\alpha^3+3\alpha\beta-3\gamma;\ a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3=\alpha^2\beta-\alpha\gamma-2\beta^2\\&a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\beta^2-2\alpha\gamma;\ a^3b^2+a^2b^3+a^3c^2+a^2c^3+b^3c^2+b^2c^3=-\alpha\beta^2+2\alpha^2\gamma+\beta\gamma\\&a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3=\beta^3-3\alpha\beta\gamma+3\gamma^2.\end{aligned}$$

Applicando il tutto alle due

(I.) $z^3+\frac{B}{A}z^2+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0$. (II.) $z^3+\frac{Q}{P}z^2+\frac{R}{P}z+\frac{S}{P}=0$

con fare

$$\alpha=\frac{B}{A},\ \beta=\frac{C}{A},\ \gamma=\frac{D}{A},\ \alpha'=\frac{Q}{P},\ \beta'=\frac{R}{P},\ \gamma'=\frac{S}{P},$$

si trova $\frac{1}{A^3P^3}\,(\omega)$.

Mi sono dal principio ristretto a dire ordito questo metodo da Eulero. Perchè 1.° si desidera in esso una teoría su gli effetti del prodotto, la quale insegni a trovarli con certo ordin perspicuo, senza la meccanica moltiplica, e senza avvolgersi in una farragine di termini; 2.° perchè vi si desiderano le formole generali per ridurre ad essere espresse con i coefficienti α, β, γ, δ..... le somme delle potenze e dei prodotti varj delle supposte radici a, b, c, d.... Prima che io vi supplisca vediamo i tentativi del Cramer.

§. II.

Calcolo del Cramer mancante di una esatta general dimostrazione.

Il Cramer dando l'anno 1750 in luce la sua preclara opera *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, vi aggiunse un appendice per esporre un nuovo suo artificio, ad isfuggire nella eliminazione i troppi imbarazzi, la lunghezza laboriosa de' calcoli, e la soverchia altezza dell' equazion finale. Comincia dal presentare sotto una nuova forma le funzioni di y, che fanno da coefficienti ai termini delle due date equazioni ordinate per le potenze di z.

Ecco come

$$(V)\quad z^m + [1]z^{m-1} + [1^2]z^{m-2} + [1^3]z^{m-3} + [1^4]^{m-4} \ldots + [1^m] = 0$$

$$(W)\quad (0)z^0 + (1)z^1 + (2)z^2 + (3)z^3 + (4)z^4 \ldots\ldots\ldots\ldots + (n)z^n = 0$$

significando cioè con 1, 1^2, 1^3.... chiuse tra le parentesi quadrate le funzioni razionali di y, che moltiplicano a modo di coefficienti le potenze di z in una delle equazioni date (V), corrispondendo i numeri posti in capo all' 1 ai numeri sottratti da m, ossia co' quali vanno abbassandosi le potenze di z; e significando con i numeri progressivi 0, 1, 2, 3 .... chiusi tra le parentesi rotonde i coefficienti delle potenze corrispondenti 0^a, 1^a, 2^a, 3^a.... di z nell'altra equazione (W). Suppongansi ora a, b, c, d ... le radici in numero m dell'equazione (V). Trasportata ciascuna nell'equazion (W) ne nasceranno numero m equazioni

$$(0)\ a^0 + (1)\ a^1 + (2)\ a^2 + (3)\ a^3 + (4)\ a^4 \ldots + (n)\ a^n = 0$$
$$(0)\ b^0 + (1)\ b^1 + (2)\ b^2 + (3)\ b^3 + (4)\ b^4 \ldots + (n)\ b^n = 0$$
$$(0)\ c^0 + (1)\ c^1 + (2)\ c^2 + (3)\ c^3 + (4)\ c^4 \ldots + (n)\ c^n = 0$$
$$(0)\ d^0 + (1)\ d^1 + (2)\ d^2 + (3)\ d^3 + (4)\ d^4 \ldots + (n)\ d^n = 0 \text{ ec.}$$

il prodotto delle quali costituirà l'equazion finale di eliminamento. La prova che Cramer ne adduce, non è che un ristretto della dottrina dell'Eulero sopra recata. Ma qual sarà il contenuto di tal prodotto? come assegnarne senza l'attuale moltiplica l'effetto? Ciò è in che si adopera il Cramer.

Si distinguano in ogni termine del desiderato prodotto il *fattor primario*, ed il *fattor secondario*, intendendo per fattor primario il prodotto dei coefficienti (0), (1), (2).... e per fattor secondario il prodotto delle radici a, b, c....

In quante maniere possono combinarsi a due, a tre, a quattro ec. le potenze da 1 ad m dei coefficienti (0), (1), (2), (3) .... con legge, che il prodotto sia sempre del grado m, tanti saranno i fattori primarj.

A determinar con ordine queste combinazioni si cominci dal prender la potenza m^{esima} del coefficiente (0) scrivendola così (0^m); si combini poi la sua potenza $m-1^{esima}$ con ciascun altro coefficiente scrivendo $(0^{m-1}1)$, $(0^{m-1}2)$... indi si combini la potenza $m-2^{esima}$ di esso con due qualunque degli altri in questo modo $(0^{m-2}1.2)$, $(0^{m-2}1.3)$.... così sino a non restarvi tra la parentesi che un 0 combinato con un numero $m-1$ degli altri coefficienti. Si passi mano mano a far il simile su ciascun altro coefficiente con ordine, avvertendo di ommettere le combinazioni già avute in altra serie. A ciascun fattor primario corrisponderà il suo secondario, poichè supponendo farsi la moltiplica delle numero m equazioni, ogni coefficiente nell'andare a combinarsi o seco lui, o con qualunque altro da una in altra equazione, e dal prodotto di due in una terza, e così via via, porta seco la potenza corrispondente della radice a, b, c . . . a cui fa da coefficiente. Acciò meglio s'intenda, sia $m = n = 3$. Il fattor primario (0.0.1) avrà seco unito il secondario $a^1 b^0 c^0 + a^0 b^1 c^0 + a^0 b^0 c^1 = a + b + c$. Al fattor primario (1.2.2) sarà accoppiato il secondario $a^1 b^2 c^2 + a^2 b^1 c^2 + a^2 b^2 c^1$; e per il fattor primario (1.2.3) sarà moltiplicato il secondario $a^1 b^2 c^3 + a^2 b^1 c^3 + a^3 b^1 c^2 + a^1 b^3 c^2 + a^2 b^3 c^1 + a^3 b^2 c^1$. Ma come espellere generalmente le sconosciute radici a, b, c, d . . . . constituenti nelle varie combinazioni delle potenze loro i fattori secondarj? Riflette primieramente Cramer che, essendo per ipotesi $a, b, c, d \ldots$ le radici dell'equazione (V), per la teoría delle equazioni ne segue essere $a + b + c \ldots = [1]$ coefficiente di z^{m-1} in essa (V), cioè il fattor secondario del primario $(0^{m-1} 1) = [1]$; il fattor secondario del primario $(0^{m-2} 1 . 1) = ab + ac + ad \ldots + bc + bd \ldots + cd \ldots = [1^2]$; il fattor secondario del primario $(0^{m-3} 1 . 1 . 1) = abc + abd \ldots + acd \ldots + bcd \ldots = [1^3]$, e così di seguito, in modo che ottengonsi immediatamente e senza calcolo per i coefficienti dell'equazione data (V) tutti i fattori secondarj che hanno a primarj loro non altro che la potenza 0^{m-h} ed un numero di volte h l'1. Dopo di che l'Autore insegna ad ottenere con ordine per i medesimi coefficienti le espressioni degli altri fattori secondarj tutti col mezzo di un teorema che spiega con un esempio.

Sia da trovarsi il fattor secondario del primario $(0^{m-3}1.2.3)$, si scomponga questo in due parti, una delle quali sia $(0^{m-2}2)$ fornita di una sola cifra significativa, qual è 2 minore di una unità della massima 3, che vi ha nel proposto fattor primario; l'altra parte sia $(0^{m-3}1.1.2)$, che da esso non differisce se non in quanto la massima cifra 3 è cangiata in 1; onde ne viene, che la somma delle cifre significative nelle due parti, cioè $2+1+1+2$ riesce uguale alla somma delle cifre significative $1+2+3$ del fattor primario proposto. Prendendo ora i fattori primarj per indici dei secondarj rispettivi si avrà l'equazione

$$(0^{m-3}1.1.2)\times(0^{m-1}2)=(0^{m-3}1.1.4)+(0^{m-3}1.2.3)+2(0^{m-4}1.1.2.2)$$

il cui vero senso è: il prodotto dei due fattori secondarj dei primarj $(0^{m-3}1.1.2)$, $(0^{m-2}2)$ è uguale al fattor secondario del primario $(0^{m-3}1.1.4)$, più il fattor secondario del primario $(0^{m-3}1.2.3)$, più due volte il fattor secondario del primario $(0^{m-4}1.1.2.2)$. Il numero de' fattori primarj nel secondo membro dipende dal numero delle qualunque cifre diverse, che sono nel *fattor primario moltiplicando* del primo membro: distinguendo con tal nome quello de' due di esso membro, al quale date si sono tante cifre significative, quante ne aveva il fattor primario proposto; e chiamando quello, a cui attribuita se n'è una sola, *fattor primario moltiplicatore*. Nell'esempio recato il moltiplicando è $(0^{m-3}1.1.2)$, in cui vi sono tre cifre diverse 0, 1, 2; perciò tre sono nel secondo membro dell'equazione i fattori primarj. Per ogni cifra di esso moltiplicando se ne determina uno accrescendola del 2, che è la cifra unica significativa del moltiplicatore $(0^{m-1}2)$, ed accoppiando essa cifra così accresciuta alle altre o semplici o iterate del moltiplicando lasciate nell'esser loro. La cifra

2 accresciuta di 2 dona 4, che associata alle due 1, 1 del moltiplicando forma il primo fattor primario del secondo membro $(c^{m-3}1.1.4)$; aggiugnendo 2 alla cifra del moltiplicando 1 ne viene 3, ed accoppiandolo all'altro 1 ed al 2 di esso moltiplicando si ha il secondo fattor primario $(c^{m-3}1.2.3)$; l'aggiugnere 2 alla cifra del moltiplicando 0 rende 2, il cui associamento alle cifre di esso 1, 1, 2 porta una replica del 2, e produce il terzo fattor primario $(c^{m-4}1.1.2.2)$. Questo vien preso due volte, ossia moltiplicato per 2, perchè contiene duplicata la cifra 2, che nel moltiplicando è semplice. E generalmente se nel moltiplicando vi fosse numero k di volte una cifra, e riuscisse numero $k+1$ di volte in uno dei fattori primarj del secondo membro formati nel modo esposto, dovrebbe questo fattor primario moltiplicarsi per $k+1$. Il secondo dei fattori primarj del secondo membro è, come si sarà di già avvertito, il fattor primario proposto, di cui si cercava il fattor secondario; e così ben penetrando la regola comprendesi dover sempre avvenire, cioè che tra i fattori primarj del secondo membro dell'equazione vi cada il fattor primario, di cui fu proposto trovare il fattor secondario. Trasportandolo solo da una parte si avrà l'intento, come nell'esempio

$$(u)\quad (c^{m-3}1.2.3)=(c^{m-3}1.1.2)\times(c^{m-1}2)-(c^{m-3}1.1.4)-2(c^{m-4}1.1.2.2).$$

Il significato della quale equazione è: il fattor secondario del primario $(c^{m-3}1.2.3)$ è uguale al prodotto dei due fattori secondarj spettanti ai due primarj $(c^{m-3}1.1.2)$, $(c^{m-1}2)$, meno il fattor secondario del primario $(c^{m-3}1.1.4)$, meno in oltre il doppio del fattor secondario, cui per primario compete $(c^{m-4}1.1.2.2)$. Nel caso, ad esempio, di $m=3$ sarà

$a\,b^2\,c^3 + a^2\,b\,c^3 + a^3\,b\,c^2 + a\,b^3\,c^2 + a^2\,b^3\,c + a^3\,b^2\,c =$
$(a\,b\,c^2 + a\,b^2 c + a^2 b\,c)(a^2 + b^2 + c^2) - (a^4 b\,c + a b^4 c + a\,b\,c^4)$, essendo la serie dei prodotti nel primo membro il fattor secondario del primario $(1.2.3)$, a cui riducesi in tal caso di $m = 3$ il generale $(c^{m-3}1.2.3)$; essendo l'aggregato $a\,b\,c^2 + a\,b^2\,c + a^2\,b\,c$ il fattor secondario attinente al primario $(1.1.2)$; $a^2 + b^2 + c^2$ il secondario del primario $(0.0.2)$; e l'aggregato $a^4 b\,c + a\,b^4 c + a\,b\,c^4$ il fattor secondario relativo al primario $(1.1.4)$. Il termine $-2(c^{m-4}1.1.2.2)$ non ha luogo posto $m = 3 < 4$, e si vede chiara la ragione, richiamando a memoria la generazione di esso termine formato coll'aggiunta del 2 cifra unica significativa del moltiplicatore $(c^{m-1}2)$ alla cifra o del moltiplicando $(o^{m-3}1.1.2)$, la qual cifra o da esso moltiplicando sparisce nel caso di $m = 3$ restando solo $(1.1.2)$. Che l'equazione sia vera, si toccherà con mano eseguendo la moltiplica, e la sottrazione, che nel secondo membro sono indicate. Mi è piaciuto di sciegliere a prova della verità dell'equazione (u) questo esempio in luogo dell'esempio, a cui l'Autore l'appoggia, affine che dal termine ommesso apparisse la regola da tenersi in casi simili. Conformemente a ciò, che si è fatto sul fattor primario $(c^{m-3}1.2.3)$, operando su qualunque altro, del quale si desideri il fattor secondario, cominciando dal fattore primario più semplice, e ordinatamente procedendo ai più composti, si determineranno tutti i fattori secondarj, e si verrà a capo di ottener l'equazione finale dell'eliminamento. Ma non recando il Cramer del suo teorema una general dimostrazione, il suo calcolo manca di un matematico sostegno, ed ha bisogno di essere esso pure perfezionato; per la qual cosa non è per ogni parte idoneo a perfezionare quello dell'Eulero.

§. III.

Calcolo composto
di quelli di Eulero e Cramer perfezionati.

È dimostrato comunemente dietro il Newton il teorema seguente.

Teorema I. Data l'equazione

$$(M)\quad A z^m + B z^{m-1} + C z^{m-2} + D z^{m-3} \dots + O = 0,$$

o dividendo per A

$$(M)\quad z^m + \frac{B}{A} z^{m-1} + \frac{C}{A} z^{m-2} + \frac{D}{A} z^{m-3} \dots + \frac{O}{A} = 0$$

se le sue radici suppongansi $a, b, c, d \dots$ e si faccia

$$\Pi^{(1)} = a + b + c + d \dots$$

$$\Pi^{(2)} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \dots$$

$$\Pi^{(3)} = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \dots$$

generalmente $\Pi^{(r)} = a^r + b^r + c^r + d^r \dots$

sarà $\Pi^{(r)} = -\frac{B}{A}\Pi^{(r-1)} - \frac{C}{A}\Pi^{(r-2)} - \frac{D}{A}\Pi^{(r-3)} \dots \frac{rF}{A} \dots$ intendendo per $\frac{F}{A}$ il coefficiente del termine z^{m-r} sino a tanto che $r <$ od $= m$, poichè al di là, divenendo cioè $r > m$ la formola finirà da sè in $\frac{O}{A}\Pi^{(r-m)}$.

Da questo teorema si tira

Teorema II. Se per $\Pi^{(s,t)}$ si concepisca rappresentata la somma $a^s b^t + a^t b^s + a^s c^t + a^t c^s \dots$

Sarà $\Pi^{(s,t)} = \Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} - \Pi^{(s+t)}$. Poichè moltiplicando $\Pi^{(s)}$ cioè $a^s + b^s + c^s \dots$ per $\Pi^{(t)}$ vale dire per $a^t + b^t + c^t \dots$ ne proverranno tutti i termini della forma a^{s+t}, e tutti quelli della forma $a^s b^t$; dunque rimane dimostrato il teorema.

È facile vedere che nel caso di $s = t$ i prodotti saranno a due a due uguali, cioè $a^s b^t = a^t b^s$, $a^s c^t = a^t c^s$ .... dunque non volendosi che la somma dei prodotti dissimili, si dovrà dividere il provento di $\Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} - \Pi^{(s+t)}$ per 2.

E se per $\Pi^{(s,t,u)}$ si rappresenti la somma

$$a^s b^t c^u + a^s b^u c^t + a^t b^s c^u + a^t b^u c^s + a^u b^t c^s + a^u b^s c^t \dots + a^s b^t d^u \dots$$

sarà

$$\Pi^{(s,t,u)} = \Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)} - \Pi^{(s+t+u)} - \Pi^{(s+t,u)} - \Pi^{(s+u,t)} - \Pi^{(t+u,s)} .$$

Poichè dal prodotto $\Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)}$ ne nasceranno i termini delle cinque forme a^{s+t+u}, $a^{s+t} b^u$, $a^{s+u} b^t$, $a^{t+u} b^s$, $a^s b^t c^u$; dunque ec.

Se $s = t$ saranno i prodotti uguali a due a due, $a^s b^t c^u = a^t b^s c^u$, $a^s b^u c^t = a^t b^u c^s$ .... onde il provento della formola, desiderando quello solo dei prodotti dissimili, si dovrà divider per due. Che se sia $s = t = u$ saranno i termini uguali a sei a sei, $a^s b^t c^u = a^s b^u c^t = a^t b^s c^u = a^t b^u c^s = a^u b^t c^s = a^u b^s c^t$; per lo che volendo ristrigner il provento ai soli prodotti dissimili si dovrà divider per 6.

Si comprende già il progresso di questa bellissima specie di formole, che il primo dimostrò Waring nelle sue *Miscell. Anal. e Medit. Alg.* Prob. III. Or $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s,t)}$, $\Pi^{(s,t,u)}$ ..... rappresentano in genere quelli che il Cramer chiama fattori secondarj. Ecco pertanto il modo di perfezionare il metodo dell'Eulero con il calcolo del Cramer perfezionato. Date le due equazioni

(I.) $A z^m + B z^{m-1} + C z^{m-2} + D z^{m-3} \dots + O = 0$

(II.) $P z^n + Q z^{n-1} + R z^{n-2} + S z^{n-3} \dots + U = 0$,

si esprimano i coefficienti delle potenze di z nella equazion (II.) alla maniera di Cramer dando ad essa equazione la forma

$(0)\, z^0 + (1)\, z^1 + (2)\, z^2 + (3)\, z^3 + (4)\, z^4 \ldots\ldots + (n)\, z^n = 0.$
Si formino in ordine i fattori primarj cominciando dal prendere la potenza m^{esima} del coefficiente (0), poi combinando la sua potenza $m - 1^{esima}$ con ciascun degli altri coefficienti, indi combinando la potenza sua $m - 2^{esima}$ con tutti i possibili ambi degli altri ec.; il simile facciasi successivamente su ciascun degli altri coefficienti, ma con rigettare le combinazioni già antecedentemente avute e notate, notando le sole nuove, il numero delle quali si anderà mano mano scemando sino a ridursi l'operazione combinatoria su l'ultimo coefficiente (n) alla sola combinazione di esso seco lui numero m volte, cioè alla sua potenza m^{esima}. Adoperando per rappresentare i fattori secondarj in genere le specie $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s,t)}$ $\Pi^{(s,t,u)}$.... si particolarizzino per i numeri dei primarj fattori i generali indici r, s, t, u...., e ad ogni fattor primario si accoppj la specie per esso particolarizzata esprimente il suo fattor secondario. Finalmente per i due esposti, e dimostrati teoremi si determini qualunque delle particolari $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s,t)}$, $\Pi^{(s,t,u)}$....., e l'equazion finale di eliminamento desiderata sarà formata.

Sia $m = n = 3$, cioè sieno le due equazioni date di terzo grado.

(I.) $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ (II) $Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0$
la seconda delle quali cangiati i coefficienti alla maniera del Cramer si esponga così:

$$\text{(II.)}\ 0\, z^0 + (1)\, z^1 + (2)\, z^2 + (3)\, z^3 = 0.$$

La schiera ordinata dei fattori primarj, unitivi i rispettivi secondarj espressi colle specie che ho assegnato, sarà

$$\begin{aligned}
(0.0.0) &+ (0.0.1)\,\Pi^{(1)} + (0.1.1)\,\Pi^{(1,1)} + (1.1.1)\,\Pi^{(1,1,1)} + (2.2.2)\,\Pi^{(2,2,2)} + (3.3.3)\,\Pi^{(3,3,3)} \\
&+ (0.0.2)\,\Pi^{(2)} + (0.2.2)\,\Pi^{(2,2)} + (1.1.2)\,\Pi^{(1,1,2)} + (2.2.3)\,\Pi^{(2,2,3)} \\
&+ (0.0.3)\,\Pi^{(3)} + (0.3.3)\,\Pi^{(3,3)} + (1.1.3)\,\Pi^{(1,1,3)} + (2.3.3)\,\Pi^{(2,3,3)} \\
&\qquad + (0.1.2)\,\Pi^{(1,2)} + (1.2.2)\,\Pi^{(1,2,2)} \\
&\qquad + (0.1.3)\,\Pi^{(1,3)} + (1.3.3)\,\Pi^{(1,3,3)} \\
&\qquad + (0.2.3)\,\Pi^{(2,3)} + (1.2.3)\,\Pi^{(1,2,3)}
\end{aligned}$$

È evidente potersi invertire; il che sarebbe l'effetto di un ordine di combinazioni rovescio.

Per la teoría generale delle equazioni si hanno tosto

$$\Pi^{(1)} = -\frac{B}{A}\,;\ \Pi^{(1,1)} = \frac{C}{A}\,;\ \Pi^{(1,1,1)} = -\frac{D}{A}.$$

Per il primo teorema si trova

$$\Pi^{(2)} = \frac{B^2}{A^2} - \frac{2C}{A}\,;\ \Pi^{(3)} = -\frac{B^3}{A^3} + \frac{3\,BC}{A^2} - \frac{3\,D}{A}\ \ldots\ldots$$

Bisogna giugner sino a $\Pi^{(9)}$, quantunque nell'equazione non vi sia più che $\Pi^{(3)}$; ma $\Pi^{(9)}$ è necessario per determinar con l'uso del teorema secondo il $\Pi^{(3,3,3)}$ .... Similmente di esso secondo teorema fa d'uopo premettere il calcolo di parecchj casi, che non entrano propriamente nell'equazione, ma che servono per la determinazione di quelli che vi entrano. Sarebbe troppo lungo ed inutile lo stender qui intero il giro delle determinazioni tutte e ausiliarie, e principali. Basta offrir queste a' luoghi loro.

$$\begin{aligned}
&(0.0.0)+(0.0.1)\left(\tfrac{-B}{A}\right) &&+(1.1.1)\left(\tfrac{-D}{A}\right)+(3.3.3)\left(\tfrac{-D^3}{A^3}\right)\\
&\quad+(0.0.2)\left(\tfrac{B^2}{A^2}-\tfrac{2C}{A}\right) &&+(1.1.2)\left(\tfrac{BD}{A^2}\right)\\
&\quad+(0.0.3)\left(\tfrac{-B^3}{A^3}+\tfrac{3BC}{A^2}-\tfrac{3D}{A}\right) &&+(1.1.3)\left(\tfrac{2CD}{A^2}-\tfrac{B^2D}{A^3}\right)\\
&+(0.1.1)\left(\tfrac{C}{A}\right) &&+(1.2.2)\left(\tfrac{-CD}{A^2}\right)\\
&+(0.2.2)\left(\tfrac{C^2}{A^2}-\tfrac{2BD}{A^2}\right) &&+(1.3.3)\left(\tfrac{-C^2D}{A^3}+\tfrac{2BD^2}{A^3}\right) \qquad =0.\\
&+(0.3.3)\left(\tfrac{C^3}{A^3}-\tfrac{3BCD}{A^3}+\tfrac{3D^2}{A^2}\right) &&+(1.2.3)\left(\tfrac{BCD}{A^3}-\tfrac{3D^2}{A^2}\right)\\
&+(0.1.2)\left(\tfrac{-BC}{A^2}+\tfrac{3D}{A}\right) &&+(2.2.2)\left(\tfrac{D^2}{A^2}\right)\\
&+(0.1.3)\left(\tfrac{B^2C}{A^3}-\tfrac{2C^2}{A^2}-\tfrac{BD}{A^2}\right) &&+(2.2.3)\left(\tfrac{-BD^2}{A^3}\right)\\
&+(0.2.3)\left(\tfrac{-BC^2}{A^3}+\tfrac{2B^2D}{A^3}+\tfrac{CD}{A^2}\right) &&+(2.3.3)\left(\tfrac{CD^2}{A^3}\right)
\end{aligned}$$

Rimettendo in luogo degli ausiliarj coefficienti (0), (1), (2), (3) i dati S, R, Q, P, e così in luogo di (0.0.0) prendendo S^3, in luogo di (0.0.1) S^2R ec., si troverà questa equazione, che segnerò (Λ) convenir con lo sviluppo (ω'') della Bezoutiana (ω) diviso per A^3, cioè essere $(\Lambda)=\frac{1}{A^3}(\omega)$.

§ IV.

Calcolo del la Grange corretto e semplificato.

Il celebratissimo la Grange nel volume dell'Accademia di Berlino per l'anno 1769, sebben dell'avviso che Eulero, Cramer, Bezout fossero tutti ben riusciti a dare dei mezzi per evitare nella eliminazione l'inconveniente di una equazione finale oltre il dovere elevata; cionulladimeno si accinse egli pure ad esercitare intorno al medesimo oggetto l'esimia sua analitica industria, assumendosi di offerire un metodo godente il vantaggio di ridurre la eliminazione a delle formole generali e semplicissime, quali potessero con facilità gli analisti adattare al bisogno. Lo spirito del suo metodo è questo. Si diano alle date equazioni le seguenti forme

$$(\vartheta)\quad 1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4 \ldots\ldots+\theta z^m=0$$

$$(\lambda)\quad 1+\frac{\alpha'}{z}+\frac{\beta'}{z^2}+\frac{\gamma'}{z^3}+\frac{\delta'}{z^4}\ldots\ldots+\frac{\tau'}{z^m}=0.$$

Suppongasi, che $1-az$, $1-bz$, $1-cz$, $1-dz\ldots\ldots$ al numero di m sieno i fattori dell'equazione (ϑ), di modo che $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}\ldots\ldots$ al numero m sieno le sue radici. Dunque $(\vartheta)=(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)\ldots\ldots$, e sostituendo ciascheduna delle medesime radici nell'equazione (λ) ne proveranno le numero m equazioni

$$(f)\quad 1+\alpha' a+\beta' a^2+\gamma' a^3+\delta' a^4\ldots\ldots+\tau' a^m=0$$

$$(g)\quad 1+\alpha' b+\beta' b^2+\gamma' b^3+\delta' b^4\ldots\ldots+\tau' b^m=0$$

$$(h)\quad 1+\alpha' c+\beta' c^2+\gamma' c^3+\delta' c^4\ldots\ldots+\tau' c^m=0$$

$$(i)\quad 1+\alpha' d+\beta' d^2+\gamma' d^3+\delta' d^4\ldots\ldots+\tau' d^m=0 \text{ ec.}$$

Segnando il prodotto di queste tutte (Γ) sarà

$$(\Gamma)=(f)(g)(h)(i)\ldots\ldots=0,$$

l'equazion finale di eliminamento.

Questo, che è il fondo del metodo dell'Eulero, quello si è pure, su cui il suo alza il la Grange. La diversità consiste nel modo di formare il prodotto (Γ). Appoggia il la Grange il calcolo suo ad una formola logaritmica, che per comoda citazione in seguito porrò io qui sotto il titolo di lemma.

Lemma. $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4.$

Facendo successivamente $x=-az$, $=-bz$, $=-cz\ldots\ldots$ si troverà

$$l(\vartheta) = l(1-az) + l(1-bz) + l(-cz) + l(1-dz) \ldots$$
$$= -z(a+b+c\ldots) - \tfrac{1}{2}z^2(a^2+b^2+c^2\ldots) - \tfrac{1}{3}z^3(a^3+b^3+c^3\ldots)$$
$$= -\lambda z - \tfrac{1}{2}\mu z^2 - \tfrac{1}{3}\nu z^3 - \tfrac{1}{4}\xi z^4 \ldots$$

compendiando in λ la somma $a+b+c\ldots$, in μ la somma $a^2+b^2+c^2\ldots$, in ν la somma $a^3+b^3+c^3\ldots$ ec.

Sarà similmente

$$l(f) = -\lambda' a - \tfrac{1}{2}\mu' a^2 - \tfrac{1}{3}\nu' a^3 - \tfrac{1}{4}\xi a^4 \ldots$$
$$l(g) = -\lambda' b - \tfrac{1}{2}\mu' b^2 - \tfrac{1}{3}\nu' b^3 - \tfrac{1}{4}\xi b^4 \ldots$$
$$l(h) = -\lambda' c - \tfrac{1}{2}\mu' c^2 - \tfrac{1}{3}\nu' c^3 - \tfrac{1}{4}\xi c^4 \ldots$$
$$l(i) = -\lambda' d - \tfrac{1}{2}\mu' d^2 - \tfrac{1}{3}\nu' d^3 - \tfrac{1}{4}\xi d^4 \ldots$$

ec.

intendendo per λ', μ', $\nu'\ldots$ delle somme analoghe alle λ, μ, $\nu\ldots$, le quali è evidente dover essere riguardo a tutti li $l(f)$, $l(g)$, $l(h)\ldots$ le medesime, avendo le (f), (g), $(h)\ldots$ tutte la costituzione medesima, e diverso solamente il simbolo della incognita, che in (f) è a, in (g) è $b\ldots$

Per lo che essendo $l(\Gamma) = l(f) + l(g) + l(h) + l(i)\ldots$ sarà

$$l(\Gamma) = -\lambda'(a+b+c\ldots) - \tfrac{1}{2}\mu'(a^2+b^2+c^2\ldots) - \tfrac{1}{3}\nu'(a^3+b^3+c^3\ldots) - \ldots$$
$$= -\lambda\lambda' - \tfrac{1}{2}\mu\mu' - \tfrac{1}{3}\nu\nu' - \tfrac{1}{4}\xi\xi' \ldots = 0.$$

Ponendo il secondo membro $= -\phi$ si avrà $l(\Gamma) = -\phi$, donde $(\Gamma) = e^{-\phi}$, supposta e la base dei logaritmi iperbolici; e risolvendo in serie la quantità esponenziale,

$$(\Gamma) = 1 - \phi + \tfrac{1}{2}\phi^2 - \tfrac{1}{2.3}\phi^3 \ldots = 0.$$

Per determinar le somme λ, μ, $\nu\ldots\lambda'$, μ', $\nu'\ldots$ una via spedita somministra il calcolo differenziale; poichè essendo $l(\vartheta)$ cioè $l(1+\alpha z+\beta z^2+\delta z^3\ldots) = -\lambda z - \tfrac{1}{2}\mu z^2 -$

$\frac{1}{3}\nu z^3 - \frac{1}{4}\xi z^4 \ldots\ldots$, variando z sarà

$$\frac{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3\ldots}{1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4\ldots} = -\lambda - \mu z - \nu z^2 - \xi z^3 \ldots$$

Onde, tolta la frazione, e paragonati i termini si ricaverà

$$\lambda = -\alpha$$
$$\mu = \alpha^2 - 2\beta$$
$$\nu = -\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\gamma$$
$$\xi = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2 - 4\alpha\gamma - 4\delta$$

ec.

Similmente differenziando qual più piaccia delle equazioni di $l(f)$, $l(g)$, $l(h)\ldots$ con far variare quella delle radici a, b, $c\ldots$, che le serve da incognita, si troverà

$$\lambda' = -\alpha'$$
$$\mu' = \alpha'^2 - 2\beta'$$
$$\nu' = -\alpha'^3 + 3\alpha'\beta' - 3\gamma'$$
$$\xi' = \alpha'^4 - 4\alpha'^2\beta' + 2\beta'^2 - 4\alpha'\gamma' - 4\delta'$$

ec.

Sarà dunque

$$\varphi = \alpha\alpha' + \tfrac{1}{2}(\alpha^2-2\beta)(\alpha'^2-2\beta') + \tfrac{1}{3}(-\alpha^3+3\alpha\beta-3\gamma)(-\alpha'^3+3\alpha'\beta'-3\gamma')$$
$$+\tfrac{1}{4}(\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2-4\alpha\gamma-4\delta)(\alpha'^4-4\alpha'^2\beta'+2\beta'^2-4\alpha'\gamma'-4\delta')\ldots$$

quindi si formeranno φ^2, $\varphi^3\ldots$ e si determinerà (Γ).

È però a riflettersi, che essendo fondamentalmente $(\Gamma) = (f)(g)(h)(i)\ldots$ in ognuna delle quali equazioni cadauno dei coefficienti α', β', γ', $\delta'\ldots$ non vi è, che nello stato semplice; e non potendo perciò nel prodotto di esse equazioni al numero di m montare ciascuno che alla potenza m, o formare tra loro che un prodotto di grado m; per conseguenza si dovranno dalla serie del valore di φ rigettare come incompetenti quei termini, ne' quali i coefficienti α, β, γ, $\delta\ldots$ salgono a podestà, o prodotti di grado superiore al m. Ed istessamente rigettar si dovranno i nuovi termini contenenti podestà o prodotti di essi coefficienti oltra il grado m, che verranno a nascere formando ϕ^2, ϕ^3.... Se si invertisse il calcolo tutto, cioè, se immaginando le radici dell'equazione (λ), si trasportassero nell'equazione (ϑ), ed ottenute altrettante equazioni, al numero n, se ne formasse il prodotto, si perverrebbe ad una equazione finale

$$(\Gamma') = 1 - \phi' + \frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{1}{3}\phi'^3 + \frac{1}{4}\phi'^4 \ldots .$$

E per esser (Γ') il prodotto di un numero n di equazioni, in ciascheduna delle quali avrebbero i coefficienti α, β, γ, δ . . . . stato semplice, si dedurrebbe non poter essi nel prodotto ascendere, che a potenze, o prodotti di grado n al più, e perciò doversi da ϕ', ϕ'^2, ϕ'^3.... rigettare tutti quei termini, che comprendessero potenze, o prodotti de' medesimi coefficienti al grado n superiori. Ma l'effetto di questo calcolo inverso coincider debbe con l'effetto del calcolo primiero, la stessa stessissima equazion finale debbe uscirne, siccome la cosa in sè medesima contemplata dà a divedere, e siccome all'occhio apparisce dal determinarsi nell'uno, e nell'altro calcolo le somme λ, μ, ν..... λ', μ', ν'..... alla stessa maniera; dunque identificandosi ϕ' con ϕ, (Γ') con (Γ), possiamo ne' simboli ϕ, (Γ) concentrare la duplice rappresentazione delle due finali equazioni, ed unendo le due conclusioni formare la regola, che segue.

Regola. Dall'equazione $(\Gamma) = 1 - \phi + \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{6}\phi^3 \ldots$ rigettar si debbono tutti que' termini, che contengon potenze o prodotti de' coefficienti α, β, γ, δ.... al grado n superiori, o de' coefficienti α', β', γ', δ'.... reciprocamente potenze e prodotti superiori al grado m. E in altra forma di parlare: nella finale equazione (Γ) le potenze o prodotti de' coefficienti di una delle date equazioni non debbono in termine alcuno oltrepassare il grado dell'altra equazione.

Si stimerà forse sconvenevole l'uso del calcolo differenziale in un argomento, che è tutto dell'analisi finita. Io l'ho trascelto per primo tra i due modi, co' quali il la Grange determina le somme λ, μ, ν.... λ', μ', ν'..... siccome il più spedito, intendendo a risparmiar la complicazione del calcolo nell'atto di dilucidarne i principj, a fine che la mente del leggitore meno occupata da intralcj di formole con più di agevolezza potesse chiaro penetrare l'essenza del metodo. Or che spero ottenuto l'intento, ecco anche l'altro modo dall'Autore adoperato il primo, e dal *Lemma* derivato.

Dell'equazione

$l(\vartheta)$ ossia $l(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4 ...)=l(1-az)+l(1-bz)+l(1-cz)+l(1-dz)....$,

si è già per mezzo del *Lemma* svolto il secondo membro, e ritrovato

$$l(1-az)+l(1-bz)+l(1-cz)+l(1-dz)....=-\lambda z-\frac{1}{2}\mu z^2-\frac{1}{3}\nu z^3-\frac{1}{4}\xi z^4 ....$$

Si svolga di presente con l'ajuto dello stesso *Lemma* eziandio il primo membro, facendo $x=\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4....=z(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3.....)$: si troverà

$$l(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4....)=z(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3....)-\frac{1}{2}z^2(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3...)^2+\frac{1}{3}z^3(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3....)^3....$$

Si eseguiscano le podestà qui indicate, si raccolgano in uno i coefficienti di z, quelli di z^2 .... poi si paragoni termine a termine questo svolgimento immediato di $l(\vartheta)$ con lo svolgimento della somma logaritmica de' suoi fattori, e si otterranno le determinazioni bramate di λ, μ, ν..... Per simil maniera sviluppando una qualunque delle equazioni di $l(f)$, $l(g)$, $l(h)$..... per esempio quella di $l(f)$, e ponendo lo sviluppo $= -\lambda' a - \frac{1}{2}\mu' a^2 - \frac{1}{3}\nu a^3 \ldots$ si determineranno λ', μ', ν'.... Il calcolo però riesce laborioso.

Ma che sono in fine, dico io, le λ, μ, ν...., e le λ', μ', ν'....? Sono λ, μ, ν.... le somme delle semplici quantità, dei quadrati, dei cubi, delle più alte podestà di a, b, c, d.... denominatori delle supposte radici dell' equazione (ϑ); supposto essendosi in essa $z = \frac{1}{a}, = \frac{1}{b}, = \frac{1}{c}, = \frac{1}{d}$.... Or da questa ipotesi stessa si tira $\frac{1}{z} = a, = b, = c, = d$....... Se dunque facciasi $\frac{1}{z} = z'$ sarà $z' = a, = b, = c, = d$...., e dividendo l'equazione (ϑ) per z^m, e poi in luogo di $\frac{1}{z}$ sostituendo z', ne nascerà l'equazione inversa, o reciproca

$$(\vartheta')\ z'^m + \alpha z'^{m-1} + \beta z'^{m-2} + \gamma z'^{m-3} + \delta z'^{m-4} \ldots = 0,$$

che avrà per sue radici a, b, c, d...., delle quali λ sarà la somma, e μ, ν.... le somme dei quadrati, de' cubi..... Per la qual cosa, richiamando il simbolo generale superiormente nel metodo del Cramer introdotto $\Pi^{(r)}$, sono le λ, μ, ν.... le $\Pi^{(r)}$ relative all'equazione (ϑ'), reciproca alla data (ϑ).

Di simil guisa comprendesi dover essere le λ', μ', ν'.... le $\pi^{(r)}$ relative a qualsivoglia delle reciproche delle (f), (g), (h), (i)..... relative cioè a qualsivoglia delle

$$1 + \alpha' . \frac{1}{a} + \beta' . \frac{1}{a^2} + \gamma' . \frac{1}{a^3} + \delta' . \frac{1}{a^4} \ldots\ldots = 0$$
$$1 + \alpha' . \frac{1}{b} + \beta' . \frac{1}{b^2} + \gamma' . \frac{1}{b^3} + \delta' . \frac{1}{b^4} \ldots\ldots = 0$$
$$1 + \alpha' . \frac{1}{c} + \beta' . \frac{1}{c^2} + \gamma' . \frac{1}{c^3} + \delta' . \frac{1}{c^4} \ldots\ldots = 0$$
$$1 + \alpha' . \frac{1}{d} + \beta' . \frac{1}{d^2} + \gamma' . \frac{1}{d^3} + \delta' . \frac{1}{d^4} \ldots\ldots = 0$$

ec.

le quali tutte vengono rappresentate dalla

$$(\lambda')\quad 1+\alpha'.\frac{1}{z'}+\beta'.\frac{1}{z'^2}+\gamma'.\frac{1}{z'^3}+\delta'.\frac{1}{z'^4}\ldots+\tau'.\frac{1}{z'^n}=0$$

o sia

$$z'^n+\alpha' z'^{n-1}+\beta' z'^{n-2}+\gamma' z'^{n-3}+\delta' z'^{n-4}\ldots\ldots+\tau'=0.$$

Ecco dunque a che riduco io il metodo del la Grange. In luogo delle due equazioni

$$(\vartheta)\quad 1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4\ldots\ldots+\theta z^m=0$$

$$(\lambda)\quad 1+\frac{\alpha'}{z}+\frac{\beta'}{z^2}+\frac{\gamma'}{z^3}+\frac{\delta'}{z^4}\ldots\ldots+\frac{\tau'}{z^n}=0,$$

si prenda a considerare il pajo di equazioni

$$(\vartheta')\quad z'^m+\alpha z'^{m-1}+\gamma z'^{m-2}+\delta z'^{m-3}\ldots\ldots\theta=0$$

$$(\lambda')\quad z'^n+\alpha' z'^{n-1}+\gamma' z'^{n-2}+\delta' z'^{n-3}\ldots\ldots+\tau'=0.$$

Si cerchino le $\Pi^{(r)}$ relative alla (ϑ') per mezzo della formola $\Pi^{(r)}=-\alpha\Pi^{(r-1)}-\beta\Pi^{(r-2)}-\gamma\Pi^{(r-3)}-\delta\Pi^{(r-4)}\ldots\ldots-r\xi$, intendendo per ξ il coefficiente del termine z^{m-r}, sinchè $r<$ od $=m$; poichè al di là, cioè divenendo $r<m$, la formola finirà da sè in θz^{r-m}. Similmente si cerchino le $\pi^{(r)}$ relative alla (λ') per la formola

$$\pi^{(r)}=-\alpha'\pi^{(r-1)}-\beta'\pi^{(r-2)}-\gamma'\pi^{(r-3)}-\delta'\pi^{(r-4)}\ldots\ldots-r\xi'.$$

Se ben però si attenda alla regola di escluder dalla equazion finale tutti i termini, nei quali le potenze, od i prodotti de' coefficienti di un'equazione sorpassino il grado dell'altra, deducesi potersi risparmiar la fatica di una particolar ricerca delle $\pi^{(r)}$. Poichè, supponendo $m<n$, determinate tutte le convenienti $\Pi^{(r)}$, nelle quali conservar si debbono tutti i termini non eccedenti il grado n, si tireranno da esse le convenienti $\pi^{(r)}$, trascegliendo i soli termini non eccedenti il grado m, e cangiando in essi i coefficienti α, β, γ, δ .... negli α', β', γ', δ' .... E nel caso di $m=n$ non si avrà che a cangiar gli uni coefficienti negli altri in tutti i termini. Generalmente dunque il cal-

colo tutto si riduce alla determinazione delle $\Pi^{(r)}$; e la regola medesima assegna ad esso calcolo il limite. Al giugner ad una $\Pi^{(r)}$, la cui $\Pi^{(r-m)}$ già trovata non abbia termine veruno di grado $n-1$, si tralasci di determinarla; poichè essendo ogni più basso termine di $\Pi^{(r-m)}$ del grado n, il prodotto $\theta\,\Pi^{(r-m)}$ ultima parte, e la più bassa di $\Pi^{(r)}$ salirebbe oltre il grado n. Per un altro risparmio di calcolo, in luogo di determinar le $\Pi^{(r)}$ intere, riservandosi a purgarle poscia dei termini incompetenti, si purghino a dirittura tra via, di mano in mano che si van formando, poichè purgate le inferiori minor si renderà il numero de' termini di eccedente grado nelle superiori, e più spedita, quanto più contratta, riuscirà la successiva formazion loro.

Vediamo un esempio nel caso di $m=n=3$, cioè di due equazioni di terzo grado. Avremo, rigettati passo passo i termini al terzo grado superiori,

$$\Pi^{(1)}=-\alpha \qquad \pi^{(1)}=-\alpha'$$
$$\Pi^{(2)}=\alpha^2-2\beta \qquad \pi^{(2)}=\alpha'^2-2\beta'$$
$$\Pi^{(3)}=-\alpha^3+3\alpha\beta-3\gamma \qquad \pi^{(3)}=-\alpha'^3+3\alpha'\beta'-3\gamma'$$
$$\Pi^{(4)}=-4\alpha^2\beta+4\alpha\gamma+2\beta^2 \qquad \pi^{(4)}=-4\alpha'^2\beta'+4\alpha'\gamma'+2\beta'^2$$
$$\Pi^{(5)}=-5\alpha^2\gamma-5\alpha\beta^2+5\beta\gamma \qquad \pi^{(5)}=-5\alpha'^2\gamma'-5\alpha'\beta'^2+5\beta'\gamma'$$
$$\Pi^{(6)}=-12\alpha\beta\gamma-2\beta^3+3\gamma^2 \qquad \pi^{(6)}=-12\alpha'\beta'\gamma'-2\beta'^3+3\gamma'^2$$
$$\Pi^{(7)}=-7\alpha\gamma^2-7\beta^2\gamma \qquad \pi^{(7)}=-7\alpha'\gamma'^2-7\beta'^2\gamma'$$
$$\Pi^{(8)}=-8\beta\gamma^2 \qquad \pi^{(8)}=-8\beta'\gamma'^2$$
$$\Pi^{(9)}=-3\gamma^3 \qquad \pi^{(9)}=-3\gamma'^3.$$

È uopo osservare, che le $\Pi^{(8)}$, $\Pi^{(9)}$ hanno ambedue un sol termine, e così le due $\pi^{(8)}$, $\pi^{(9)}$; onde ingannerebbesi a partito chi arrivando ad una $\Pi^{(r)}$, che, purgata essendo, restasse con un sol termine, la prendesse per l'ultima delle convenienti, e stimasse di non dover andare con il calcolo più oltra. In questo inganno è caduto lo stesso la Grange alla pag. 316 del citato volume dell'Accademia di Berlino nel determinare con il calcolo differenziale le somme che io qui esprimo per $\Pi^{(r)}$, ommettendo egli la determinazione della $\Pi^{(9)}$: ommission che rende difettoso tutto il calcolo da lui tessuto per formar la finale equazione di eliminamento, ed in questa stessa produce la mancanza di un termine. Ciò che dapprima non sospettando io, e con piena fiducia seguendo le vestigia dell'esimio Autore, in faticosi iterati calcoli mi avvolsi, in pena ed imbarazzo nel confrontare essa finale equazione con quelle dagli altri metodi ottenute, sinchè con più seria riflessione ai principj, e diligente esame delle operazioni dell'errore mi accorsi.

Le $\Pi^{(r)}$, $\pi^{(r)}$ o per loro stesse, o per il rigetto già libere dei termini incompetenti, cioè al dovuto grado superiori, chiaminsi le $\Pi^{(r)}$, $\pi^{(r)}$ *purgate*. Moltiplicando con ordine ciascuna corretta $\Pi^{(r)}$ con sua simile corretta $\pi^{(r)}$, prendendo intero il prodotto $\Pi^{(1)}.\pi^{(1)}$, la metà del prodotto $\Pi^{(2)}.\pi^{(2)}$, $\frac{1}{3}$ del prodotto $\Pi^{(3)}.\pi^{(3)}$, $\frac{1}{4}$ di $\Pi^{(4)}.\pi^{(4)}$..... la somma costituirà ϕ, cioè sarà

$$\phi = \Pi^{(1)}.\pi^{(1)} + \frac{1}{2}.\Pi^{(2)}.\pi^{(2)} + \frac{1}{3}.\Pi^{(3)}.\pi^{(3)} + \frac{1}{4}.\Pi^{(4)}.\pi^{(4)}.....$$

Formando il quadrato ϕ^2, ed il cubo ϕ^3 nasceranno nuovi termini incompetenti, e da rigettarsi perchè contenenti podestà o prodotti di α, β, γ .... o di α', β', γ'.... al grado terzo superiori. La quarta potenza ϕ^4 si vede manifestamente essere da ommettersi interamente, poichè riuscirebbe tutta di termini incompetenti composta. L'equazion finale si ristrignerà dunque alla seguente

$$(\Gamma)\quad 1-\phi+\frac{1}{2}\phi^2-\frac{1}{2.3}\phi^3=$$

$$1-\alpha\alpha'-\frac{1}{2}(\alpha^2-2\beta)(\alpha'^2-2\beta')-\frac{1}{3}(-\alpha^3+3\alpha\beta-3\gamma)(-\alpha'^3+3\alpha'\beta'-3\gamma')$$

$$-\frac{1}{4}(-4\alpha^2\beta+4\alpha\gamma+2\beta^2)(-4\alpha'^2\beta'+4\alpha'\gamma'+2\beta'^2)$$

$$-\frac{1}{5}(-5\alpha^2\gamma+5\alpha\beta^2+5\beta\gamma)(-5\alpha'^2\gamma'+5\alpha'\beta'^2+5\beta'\gamma')$$

$$-\frac{1}{6}(-12\alpha\beta\gamma-2\beta^3+3\gamma^2)(-12\alpha'\beta'\gamma'-2\beta'^3+3\gamma'^2)$$

$$-\frac{1}{7}(-7\alpha\gamma^2-7\beta^2\gamma)(-7\alpha'\gamma'^2-7\beta'^2\gamma')$$

$$-\frac{1}{8}(-8\beta\gamma^2)(-8\beta'\gamma'^2)-\frac{1}{9}(-3\gamma^3)(-3\gamma'^3)$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha\alpha'+2\beta\beta'+3\gamma\gamma')^2+(\beta\alpha'^2+3\gamma\alpha'\beta')(\beta'\alpha^2+3\alpha\beta\gamma')$$

$$+(\alpha\alpha'+2\beta\beta'+3\gamma\gamma')(-\beta\alpha'^2-3\gamma\alpha'\beta'-\alpha^2\beta'-3\alpha\beta\gamma'+\frac{1}{2}\alpha^2\alpha'^2+3\alpha\beta\alpha'\beta'$$

$$+4\alpha\gamma\alpha'\gamma'+2\alpha\gamma\beta'^2+2\alpha'\gamma'\beta^2+\beta^2\beta'^2+5\beta\gamma\beta'\gamma'+\frac{3}{2}\gamma^2\gamma'^2)$$

$$-\frac{1}{2.3}(\alpha\alpha'+2\beta\beta'+5\gamma\gamma')^3$$

$$=0.$$

Il termine, che manca nella equazion finale calcolata dal la Grange si è il $-\frac{1}{9}(-3\gamma^3)(-3\gamma')$, che dona $-\gamma^3\gamma'^3$. Ad applicare codesta finale alle due equazioni (I.), (II.) e confrontarla con le finali per gli altri metodi conseguite, primieramente si pongano le (I.), (II.) sotto l'aspetto delle (ϑ), (λ) così

$$(\mathrm{I.})\quad 1+\frac{C}{D}z+\frac{B}{D}z^2+\frac{A}{D}z^3=0.\quad (\mathrm{II})\quad 1+\frac{Q}{P}\cdot\frac{1}{\zeta}+\frac{R}{P}\cdot\frac{1}{\zeta^2}+\frac{S}{P}\cdot\frac{1}{\zeta^3}=0.$$

Indi in luogo di queste considerando

$$(\mathrm{II'.})\quad z'^3+\frac{C}{D}z'^2+\frac{B}{D}z'+\frac{A}{D}=0.\quad (\mathrm{II'.})\quad z'^3+\frac{Q}{P}z'^2+\frac{R}{P}z'+\frac{S}{P}=0,$$

corrispondenti alle due (ϑ'), (λ'), e paragonando si avrà

$$\alpha=\frac{C}{D},\ \beta=\frac{B}{D},\ \gamma=\frac{A}{D},\ \alpha'=\frac{Q}{P},\ \beta'=\frac{R}{P},\ \gamma'=\frac{S}{P}.$$

E sostituendo nella finale (Γ) diverrà essa la finale spettante le due equazioni (I.), (II.). Trovasi pertanto

$$1-\frac{Q\,C}{P\,D}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{D^2}-\frac{2B}{D}\right)\left(\frac{Q^2}{P^2}-\frac{2R}{P}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\left(-\frac{C^3}{D^3}+\frac{2BC}{D^2}-\frac{3A}{D}\right)\left(-\frac{Q^3}{P^3}+\frac{3QR}{P^2}-\frac{3S}{P}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{4BC^2}{D^3}+\frac{4AC}{D^2}+\frac{2B^2}{D^2}\right)\left(-\frac{4Q^2R}{P^3}+\frac{4QS}{P^2}+\frac{2R^2}{P^2}\right)$$

$$-\frac{1}{5}\left(-\frac{5AC^2}{D^3}-\frac{5B^2C}{D^3}+\frac{5AB}{D^2}\right)\left(-\frac{5Q^2S}{P^3}-\frac{5QR^2}{P^3}+\frac{5RS}{P^2}\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(-\frac{12ABC}{D^3}-\frac{2B^3}{D^3}+\frac{3A^2}{D^2}\right)\left(-\frac{12QRS}{P^3}-\frac{2R^3}{P^3}+\frac{3S^2}{P^2}\right)$$

$$-\frac{1}{7}\left(-\frac{7A^2C}{D^3}-\frac{7AB^2}{D^3}\right)\left(-\frac{7QS^2}{P^3}-\frac{7R^2S}{P^3}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(-\frac{8A^2B}{D^3}\right)\left(-\frac{8RS^2}{P^3}\right)$$

$$-\frac{1}{9}\left(-\frac{3A^3}{D^3}\right)\left(-\frac{3S^3}{P^3}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{CQ}{DP}+\frac{2BR}{DP}+\frac{3AS}{DP}\right)^2+\left(\frac{DQ^2}{DP^2}+\frac{3AQR}{DP^2}\right)\left(\frac{C^2R}{D^2P}+\frac{3BCS}{D^2P}\right)$$

$$+\left(\frac{CQ}{DP}+\frac{2BR}{DP}+\frac{3AS}{DP}\right)\left(-\frac{BQ^2}{DP^2}-\frac{3AQR}{DP^2}-\frac{C^2R}{D^2P}-\frac{BCS}{D^2P}+\frac{\frac{1}{2}C^2Q^2}{D^2P^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3BCQR}{D^2P^2}+\frac{4ACQS}{D^2P^2}+\frac{2B^2QS}{D^2P^2}+\frac{2ACR^2}{D^2P^2}+\frac{B^2R^2}{D^2P^2}+\frac{5ABRS}{D^2P^2}+\frac{\frac{3}{2}A^2S^2}{D^2P^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2\,.\,3}\left(\frac{CQ}{DP}+\frac{2BR}{DP}+\frac{3AS}{DP}\right)^3$$

$$=0.$$

Segnisi questa equazione (Ξ).

Eseguendo i prodotti, ordinando la farragine de' termini, e riducendo, si troverà riuscir in ultimo

$$(\Xi)=\frac{1}{D^3P^3}(\omega).$$

Stando al calcolo del la Grange vi mancherebbe il termine $\frac{A^3S^3}{D\,P^3}$ datoci da $-\frac{1}{9}\left(\frac{-3A^3}{D^3}\right)\left(\frac{3S^3}{P^3}\right)$. La gloria di un sì grand'uomo è tanto splendida, che un'ommissione non può spargervi intorno nebbia veruna; ed io era in dovere di notarla.

Confronto generale.

Raccogliendo, le finali equazioni che dalle due equazioni

(I.) $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$. (II.) $Pz^3+Qz^2+Rz+D=0$

eliminando per i diversi metodi sino ad ora inventati z, produconsi, sono

Per il metodo di uguagliamento Bezoutiano tre

1.ª più semplice (ω)

della quale vedi pag. 17 e 18 lo sviluppo in doppio modo ordinato

2.ª $(BP-AQ)(\omega)$. 3.ª $(CP-AR)(\omega)$.

Per il metodo di uguagliamento Newtoniano

$(DP-AS)(\omega)$.

Per il metodo di continua divisione

$\frac{A^4}{(BP-AQ)^2}(\omega)$.

Per il metodo di Eulero di continua condizione a tutta sua ampiezza recato, e per tutti i suoi lati svolto 43, delle quali le due più ovvie

1.ª $(BP-AQ)(\omega)$..... 2.ª $(CP-AR)-\frac{B(BP-AQ)}{A}(\omega)$.

Per il metodo di prodotto dell'Eulero stesso giusta il calcolo lungo e di ordinatrici regole privo di lui

$\frac{1}{A^3P^3}(\omega)$.

Giusta il calcolo del Cramer di esatta teoría corredato, o piuttosto a nuova forma trasferito

$\frac{1}{A^3}(\omega)$.

Giusta il calcolo del la Grange semplificato, e corretto

$\frac{1}{D^3P^3}(\omega)$.

Tutti i metodi si fondano sul concetto, che lo z ad una delle due equazioni soddisfacente soddisfaccia all'altra eziandío; ma il metodo di uguagliamento non considera tal principio che alla prima fronte, passano ad internamente contemplarlo i metodi di continua divisione, e condizione, e si profonda all'ultima analisi di esso il metodo di prodotto. Le diverse operazioni che nei diversi metodi, e nel metodo stesso secondo le combinazioni diverse occorrono, generan o i fattori alteranti, o i divisori. Rispetto a questi, ciò, che sul semplice divisore $\frac{1}{Q^2}$ al fine della pagina 20, o sul composto $\frac{1}{(BP-AQ)^2}$ verso il fine della 24 ho già detto basta ad esempio di ciò che pensar se ne dèe in generale; riman dunque a dire dei fattori alteranti.

Dei fattori alteranti.

A trattare con chiarezza l'argomento giova incominciar dal particolare, e dei lumi, che usciranno da esso, farsi scorta al generale. Si richiamin pertanto qui dalle pagine 9 e 10 la equazione

$$x^3 - px - q = 0\,,$$

la sostituzion di $z + y$ in luogo di x, ed il trasformamento quinci di essa in

$$z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 - pz - py - q = 0\,,$$

lo spezzamento di questa al consueto contrario nelle due

(C) $z^3 - pz + y(y^2 - p) = 0$ (D) $3yz^2 + 3y^2z - q = 0$,

la precisa final equazione dell'eliminamento di y

$$(N)\ y^6 - \tfrac{4}{3}py^4 + \tfrac{1}{3}p^2y^2 - \tfrac{2}{3^2}pqy + \tfrac{1}{3^2}q^2 = 0\,,$$

ed i fattori alteranti nella pagina 15 schierati

$H = -3y^2$, ovvero $= -3y$; $L = q - 3py$, ovvero $= -3y^2$; $G = 3y^2(y^2 - p)$.

Se donisi l'essere di equazione all'uno, o all'altro dei due valori di H, od al secondo di L, o se costituendo in equazione G si ripeta il verificamento di $3y^2(y^2-p)=0$ da $3y^2$, in tutte e quattro le supposizioni ne segue $y=0$. Per il qual annullamento di y la equazion (C) riducesi ai due termini $z^3-pz=0$, nell'equazione (D) diviene $-q=0$, e quinci l'equazione stessa $x^3-px-q=0$ ristrignesi ad $x^3-px=0$, cangiata l'equazione $z+y=x$ in $z=x$. Rendesi dunque vana la sostituzione, si perde ogni frutto dell'artificio, distrutto il termine noto q dalla contemplazione di una equazion di terzo grado cadesi in una di secondo, al qual si abbassa $z^3-pz=0$, o $x^3-px=0$, dividendo per z, o per x.

Costituiscasi ora in equazione il primo valore di L con porre $q-3py=0$. Avremo $q=3py$, sostituito il qual valore di q nell'equazione (D) prende questa la riduzione $z^2+yz-p=0$, donde si trae $y=\frac{p-z^2}{z}$; e trasferito questo valor di y nell'equazion (C) risulta $z^3-pz+\frac{p-z^2}{z}\left(\left(\frac{p-z^2}{z}\right)^2-p\right)=0$, la qual divisa per z^2-p, rimane $z-\frac{1}{z}\left(\left(\frac{p-z^2}{z}\right)^2-p\right)=0$, ovvero $z^2-\left(\frac{p}{z}-z\right)^2+p=0$, ed eseguito il quadrato del secondo termine finalmente trovasi divenire $-p+3z^2=0$, che porge $z=\pm\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Quinci $y=\frac{p-z^2}{z}=\pm 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e $q=3py=\pm 6p\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Si avrà dunque l'equazione

$$x^3-px\mp 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}=0,$$

di cui sarà radice $x=z+y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}p}\pm 2\sqrt{\frac{1}{3}p}=\pm 3\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e la chiameremo la radice prima; nota la quale rendesi facile, dividendo l'equazione per $x\mp 3\sqrt{\frac{1}{3}p}$, trovare le altre due. Saranno pertanto le tre radici

$$x = \pm 3\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,,\quad x = \mp \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-5p}\,,\quad x = \mp \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}p} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-5p}\,.$$

Essendo $q - 3py$ moltiplicatore dell'equazione (N), bastando per altra parte a rendere effettivamente il prodotto $(q-3py)(N)=0$ la posizione $q-3py=0$, nasce dubbio, se stante tal posizione ritenga o perda (N) il suo diritto di equazione, passando, reciprocamente che $q-3py$, allo stato di mera quantità? Ad acquistar lume su questo dubbio, pongasi che ritenga di fatto (N) il suo essere di equazione, e vi si introduca il valor di $q = \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$ effetto della posizione $q-3py=0$. L'aspetto particolare che prenderà (N) sarà

$$(N')\quad y^6 - \tfrac{4}{3}py^4 + \tfrac{1}{3}p^2y^2 \mp \tfrac{2^2}{3}yp^2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \tfrac{2^2}{3^3}p^3 = 0\,.$$

Or questa equazione trovasi divisibile per $y \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, risultandone a perfetto quoziente $y^5 \pm 2y^4\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \tfrac{1}{3}p^2y \mp \tfrac{2}{3}p^2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Concordano dunque fra loro le posizioni $q - 3py = 0$, $(N')=0$, e fatta la prima posizione, non vi ha che osti a conservar contemporaneamente $(N)=0$, purchè si dia a q quella modificazione, che la prima posizion importa.

Se inversamente, senza punto pensare alla posizione $q-3py=0$, ad arbitrio formata si finga l'equazione

$$x^3 - px \pm 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0\,,$$

sarà, sostituendo $z+y$ in luogo di x, la trasformata

$$z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 - pz - py \mp 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0\,,$$

e le due (C), (D) provenienti per spezzamento al consueto contrario saranno

$$(C)\quad z^3 - pz + y(y^2 - p) = 0 \qquad (D')\quad 3yz^2 + 3y^2z \mp 6p\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0\,,$$

e la risultante dall'eliminamento di z precisa troverassi

$$(N')\ y^6 - \frac{4}{3} p y^4 + \frac{1}{3} p^2 y^2 \mp \frac{2^2}{3} y p^2 \sqrt{\frac{1}{3} p} + \frac{2^2}{3^3} p^3 = o,$$

ed il fattor alterante $q - 3py = \pm 6p \sqrt{\frac{1}{3} p} - 3py$.

Per lo che avendo (N') a suo divisore $y \mp 2 \sqrt{\frac{1}{3} p}$, conseguentemente a radice sua $y = \pm 2 \sqrt{\frac{1}{3} p}$, si ricade, trasferendo, in $\pm 6p \sqrt{\frac{1}{3} p} - 3py = \pm 6p \sqrt{\frac{1}{3} p} \mp 6p \sqrt{\frac{1}{3} p} = o$; laonde per ogni parte confermasi la contemporaneità di $q - 3py = o$, ed $(N) = o$, posto $q = \pm 6p \sqrt{\frac{1}{3} p}$.

Nella II. delle mie Lettere apologetiche dell'analisi stampate l'anno 1783 nei num. XV, XIX, XX del Giornal Letterario di Venezia intitolato *Dai confini d'Italia*, ho addotta la metafisica ragione, perchè spezzandosi la trasformata

$$z^3 + 3yz^2 + 3y^2 z + y^3 - pz - py - q = o,$$

pel modo usitato nelle due

(A) $z^3 + y^3 - q = o$ $\quad$ (B) $3z^2 y + 3zy^2 - pz - py = o$,

la risultante dell'eliminamento di z

(E) $y^6 - qy^3 + \frac{1}{27} p^3 = o$ riesce di sesto grado.

In compendio la ragion è, perchè 1.° sostituendo $z + y = x$, tal sostituzione non spetta più ad una che alle altre due radici dell'equazione $x^3 - px - q = o$, onde necessariamente spetta del pari a tutte e tre, e virtualmente racchiude tre sostituzioni, così che distinte per x', x'', x''' le tre radici di $x^3 - px - q = o$, e per z', y' le parti di x', per z'', y'' le parti di x'', per z''', y''' le parti di x''', la sostituzion sola $z + y = x$ equivale alle tre $z' + y' = x'$, $z'' + y'' = x''$, $z''' + y''' = x'''$, e tutte insieme le comprende. 2.° perchè essendo le equazioni (A), (B) similmente costituite riguardo a z, ed y, di modo che cangiando z in y e reciprocamente non nasce in (A), (B) cangiamento veruno, per conseguenza non vi ha ragione che la risultante contenga piuttosto i valori di y, che di z, onde a comprendere tutti e tre quelli di y, e tutti e tre insieme quelli di z prende il sesto grado. Questa metafisica ragione è intieramente per ugual modo applicabile alle due equazioni (C), (D) di spezzamento al consueto contrario, e quinci intendesi, perchè la finale (N) riesca di sesto grado. Di questa verità ci procura una conferma di fatto, ed oculare il caso di $q = \pm 6p\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Si esperimenti, e si troverà esser (N') non solo divisibile per $y \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ma del pari per $y \mp \sqrt{\frac{1}{3}p}$, sebbene sia propiamente $\pm\sqrt{\frac{1}{3}p}$ il valore, che, posto in (D') $y = \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, risulta per z; a tal che si appalesa

$$(N') = \left(y \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\right)\left(y \mp \sqrt{\tfrac{1}{3}p}\right)\left(y^4 \pm 3y^3\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + py^2 \pm yp\sqrt{\tfrac{1}{3}p} + \tfrac{2}{3}p^2\right) = 0.$$

E che è la equazione di quarto grado? Non resta più luogo a dubitare, che siccome la equazione di secondo $\left(y \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}p}\right)\left(y \mp \sqrt{\frac{1}{3}p}\right) = y^2 \mp 3y\sqrt{\frac{1}{3}p} + \frac{2}{3}p = 0$, contiene sotto il simbolo y a radici sue le parti reali $y' = \pm 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, $z' = \pm\sqrt{\frac{1}{3}p}$ di x' reale; così la equazione di quarto grado sotto lo stesso unico simbolo y comprenda a radici sue le almen due immaginarie parti y'', z'', y''', z''' di x'', x''' immaginarj.

Mi sono alquanto diffuso sul fattore alterante $q - 3py$; potrò trascorrer celere su l'altro $y^2 - p$, lasciando al leggitore d'applicare i riflessi. Costituito questo alterante fattore in equazione $y^2 - p = 0$, si ha tostamente $y = \pm\sqrt{p}$, ed annientato nell'equazione (C) l'ultimo termine, ridotta essa ai termini $z^3 - pz = 0$, divisala per z, si ottiene $z = \pm\sqrt{p} = y$, onde, sostituendo nell'equazione (D), trovasi $q = \pm 6p\sqrt{p}$. Quindi la equazione $x^3 - px - q = 0$, si modifica in

$$x^3 - p x \mp 6 p \sqrt{p} = 0,$$

la cui prima radice $x = \pm \sqrt{p} \pm \sqrt{p} = \pm 2 \sqrt{p}$, e le altre due, dividendo per $x \mp 2 \sqrt{p}$, si trovano

$$x = \mp \sqrt{p} + \sqrt{-2p} \qquad x = \mp \sqrt{p} - \sqrt{-2p},$$

la equazion (N) riceve la modificazione

$$(N'')\ y^6 - \tfrac{4}{3} p y^4 + \tfrac{1}{3} p^2 y^2 \mp \tfrac{2^2}{3} y p^2 \sqrt{p} + \tfrac{2^2}{3} p^3 = 0,$$

che rinvienesi

$$= (y \mp \sqrt{p})^2 (y^4 \pm 2 y^3 \sqrt{p} + \tfrac{5}{3} p y^2 \pm \tfrac{4}{3} y p \sqrt{p} + \tfrac{4}{3} p^2).$$

Del rimanente codesti calcoli fondati su le posizioni $q - 3 p y = 0$, $y^2 - p = 0$, lungi è che dir si possano calcoli di scioglimento dell'equazione $x^3 - p x - q = 0$ per la (N), determinando per p, e q le parti z, y di x; che anzi dir si debbono inversamente calcoli di fabbrica dell'una, e dell'altra, determinandosi per le parti z, y di x sapute pría il valor di q; e ben di fabbrica particolare, fissandosi per $q = \pm 6 p \sqrt{\tfrac{1}{3} p}$, $q = \pm 6 p \sqrt{p}$ tra q, e p dei rapporti particolari lontani da quella generalità, e indipendenza tra loro, che poteasi prima in essi contemplare. Egli è anzi a riflettere, che l'artificio dello spezzamento al consueto contrario nelle due (C), (D), avendo per oggetto di conseguir per tal via sotto reale aspetto le parti z, y di x, che per lo spezzamento consueto della trasformata nelle due (A), (B) produconsi sotto aspetto immaginario, suppone perciò $\tfrac{1}{4} q^2 < \tfrac{1}{27} p^3$. Or le equazioni $q = \pm 6 p \sqrt{\tfrac{1}{3} p}$, $q = \pm 6 p \sqrt{p}$, dando la prima $\tfrac{1}{4} q^2 = 3 p^3$, la seconda $\tfrac{1}{4} q^2 = 9 p^3$, fassi evidente quanto escan fuori di esso supposto, nel contrario $\tfrac{1}{4} q^2 > \tfrac{1}{27} p^3$ gettandosi, e trascorrendo. Propiamente dunque le posizioni $q - 3 p y = 0$, $y^2 - p = 0$ ci rimovono dallo scopo, a cui s'intendea, ed altrove ci trasferiscono. Per le quali cose tutta, al più, l'utilità, che loro donar si può, si è di averci condotto ad una conferma di fatto, che l'equazione (N) contiene non solo i tre valori di y, ma sotto questo simbolo medesimo i tre ben anche di z. Dico al più, poichè, senza trasmutar in equazioni i fattori alteranti $q-3py$, y^2-p, si potevano, e si possono di capriccio fingere simili equazioni in numero infinite, istituire simili calcoli, e lumi simili conseguire.

È già tempo di procedere a considerare i fattori alteranti in generale. Dirigiamo l'attenzione ad $H(\omega)=0$. Ci si presenta tosto questo punto di ricerca

1.° Per la teoría generale delle equazioni la equazione (ω), che è la prima Bezoutiana, concepir dèesi composta di un numero di fattori: rappresentiamoli per F', F'', F'''.... si chiameranno questi a differenza del fattor H legittimi? Ma per lo appunto, qual ragione di sì diverse denominazioni? Qual è il carattere che li distingua? Fattore alterante appellar si deve quello, che non abbraccia tutti i coefficienti A, B, C, D..... P, Q, R, S...., o da essi tutti quanti non dipende; e che costituito in equazione induce mutazion nel problema. Esempigrazia il fattor $H=BP-AQ$ non racchiude che i quattro coefficienti A, B, P, Q, e nulla affatto dipende dagli altri. E si osservi non essere la medesima cosa contenere tutti i coefficienti, e contenere la incognita nella eliminazione salvata y con tutte le quantità note: il fattore particolare $q-3py$ contiene egli la incognita y, e le quantità note p, q, che sono le sole, che nelle equazioni (C), (D) unitamente ad y compongono i coefficienti, e ad onta di ciò egli è un fattore alterante, perchè non è un risultato dipendente da tutti insieme i coefficienti, come il debbon essere, ed esser si troverebbero i fattori legittimi dell'equazione (N). Ritornisi col pensiero alla dottrina dell'Eulero nel suo metodo da me appellato di *continua condizione*. La equazione finale di eliminamento altro non ha per oggetto che di fissare il rapporto di tutti insieme i coefficienti A, B, C, D.... P, Q, R, S..... sì che ad un tempo verificar si possano le due equazioni date (I.), (II.). I fattori legittimi dell'equazione finale, che la rendon ciascuno effettivamente $=0$, debbono essere conformemente a tal rapporto costrutti, e per conseguenza racchiudere una dipendenza da tutti i coefficienti in generale. Abbastanza, io credo, del primo carattere dei fattori alteranti. La mutazione poi per essi indotta nel problema, donando loro la natura di equazione, può esser varia, esser può di distruzione, ed esser può di modificazione soltanto. Ne abbiamo veduto dell'uno, e dell'altro caso gli esempj nel particolare: si trovò per alcuni fattori alteranti allo stato di equazione recati distruggersi la quantità data q; per altri modificarsi il suo valore con metterla in un rapporto determinato con l'altra quantità nota p.

2.° Qual è egli dunque il naturale essere degli alteranti fattori? Quello di mere funzioni di y insignificanti.

3.° È egli però lecito trasferirli all'ufficio, al senso di equazione? Se sien di quelli, che a tale stato tradotti producono annichilamento della incognita y, distruggimento di alcuna delle quantità date, no certamente. Se sien di quelli, che in equazione costituiti non fanno che produrre tra quantità supposte note un rapporto particolare e determinato, è mestieri distinguere. Poichè se il problema sia generale, e le quantità supposte note sieno indeterminate, allora il rapporto particolare indotto tra loro si potrà riguardare come una modificazione del problema generale, come un caso particolare nella generalità compreso, la equazione arbitraria del fattore alterante formata non inchiuderà ripugnanza, ed, introdotto il particolar rapporto per essa determinato nella natural equazione (ω), anderanno l'una con l'altra d'accordo, come sopra particolarmente si è veduto. Ma se le quantità note sieno date in valor numerico, il nuovo rapporto tra esse dall'arbitraria equazione voluto, potrà ai loro numerici valori ripugnare: così se a p, q valori numerici suppongansi, avvenir potrà di leggieri, che ad essi ripugnino il rapporto $q = \pm 6p\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e l'altro $q = \pm 6p\sqrt{p}$ dalle arbitrarie equazioni $q - 3py = 0$, $y^2 - p = 0$ nascenti. Che se le quantità note non sieno no in numerici valori date, ma però nell'oggetto del calcolo si concepiscano astrette ad una legge di rapporto, e l'arbitraria equazione rovesci la legge, e le trasporti ad un rapporto di legge contraria, defraudi l'oggetto del calcolo, e tragga il calcolatore suo malgrado nel caso opposto: come abbiamo osservato appunto fare le due testè citate equazioni, trasferendo q, p dalla legge $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ alla diametralmente contraria $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, in tal evento l'arbitraria equazione riceve il carattere di ripugnanza oggettiva, cioè rispetto all'oggetto di già prefisso.

4.° Può egli tornar utile il dare lo stato di equazione ad un fattor alterante? Per l'intento della diretta soluzione, alla quale si mira, nulla del tutto. Può al più esser modo a scorgere col fatto addentro nella finale equazione (ω), e conoscerne esperimentalmente la struttura.

Equazione finale di eliminamento per le equazioni di 4.° grado.

Si dorrebbe meco a diritto il leggitor mio, se in tanto dire su la eliminazione alla finale risguardante le equazioni di 3.° grado quella non aggiugnessi almeno per le equazioni di 4.°, poichè il Newton medesimo vi toccò co' calcoli suoi trattando il caso di una equazione di grado 4.° ed altra di 2.°. La darò io dunque, e con tal disposizione ne' termini, che facil riesca da essa ricavare le finali per il caso di una di 4.° ed una di 3.°, e per quello di una di 4.° ed una di 2.°; per il caso di due di 3.°, per il caso di una di 3.°, e di una di 2.°; e che lucidamente apparisca quale ad analogía sarebbe per essere la struttura delle finali in genere per gradi superiori. Ai quali oggetti partirolla in tre colonne.

Sieno le due equazioni di 4.° grado

$$(T)\quad A z^4 + B z^3 + C z^2 + D z + E = 0,$$

$$(U)\quad O z^4 + P z^3 + Q z^2 + R z + S = 0,$$

essendo A, B.... O, P.... funzioni di y e quantità note: eliminata z sarà la finale in tre colonne partita

Colonna I.

$$
\begin{aligned}
& S^4 A^4 \\
& + S^3 R(-A^3 B) \\
& + S^3 Q(A^2 B^2 - 2 A^3 C) \\
& + S^2 R^2 (A^3 C) \\
& + S^2 Q^2 (A^2 C^2 - 2 A^2 B D + 2 A^3 E) \\
& + S^2 R Q(- A^2 B C + 3 A^3 D) \\
& + S R^3 (- A^3 D) \\
& + S R^2 Q(A^2 B D - 4 A^3 E) \\
& + S R Q^2 (- A^2 C D + 3 A^2 B E) \\
& + S Q^3 (A^2 D^2 - 2 A^2 C E) \\
& + S^3 P(- A B^3 + 3 A^2 B C - 3 A^3 D) \\
& + S^2 R P(A B^2 C - 2 A^2 C^2 - A^2 B D + 4 A^3 E) \\
& + S^2 Q P(- A B C^2 + 2 A B^2 D + A^2 C D - 5 A^2 B E) \\
& + S^2 P^2 (A C^3 - 3 A B C D + 3 A^2 D^2 + 3 A B^2 E - 3 A^2 C E) \\
& + S R^2 P(- A B^2 D + 2 A^2 C D + A^2 B E) \\
& + S R Q P(A B C D - 3 A^2 D^2 + 3 A B^2 E + 4 A^2 C E) \\
& + S Q^2 P(- A B D^2 + 2 A B C E + A^2 D E) \\
& + S R P^2 (- A C^2 D + 2 A B D^2 - A B C E - 5 A^2 D E) \\
& + S Q P^2 (A C D^2 - 2 A C^2 E - A B D E + 4 A^2 E^2) \\
& + S P^3 (- A D^3 + 3 A C D E - 3 A B E^2)
\end{aligned}
$$

Colonna II.

$+ R^4 (A^3 E)$

$+ R^3 Q (- A^2 B E)$

$+ R^2 Q^2 (A^2 C E)$

$+ R Q^3 (- A^2 D E)$

$+ Q^4 (A^2 E^2)$

$+ R^3 P (A B^2 E - 2 A^2 C E)$

$+ R^2 Q P (- A B C E + 3 A^2 D E)$

$+ R^2 P^2 (A C^2 E - 2 A B D E - 2 A^2 E^2)$

$+ R Q^2 P (A B D E - 4 A^2 E^2)$

$+ R Q P^2 (- A C D E + 3 A B E^2)$

$+ R P^3 (A D^2 E - 2 A C E^2)$

$+ Q^3 P (- A B E^2)$

$+ Q^2 P^2 (A C E^2)$

$+ Q P^3 (- A D E^2)$

$+ P^4 (A E^3)$

Colonna III.

$+ O^4 (E^4)$

$+ O^3 P (- D E^3)$

$+ O^3 Q (D^2 E^2 - 2 C E^3)$

$+ O^3 R (- D^3 E + 3 C D E^2 - 3 B E^3)$

$+ O^3 S (D^4 - 4 C D^2 E + 2 C^2 E^2 + 4 B D E^2 - 4 A E^3)$

$+ O^2 P^2 (C E^3)$

$+ O^2 Q^2 (C^2 E^2 - 2 B D E^2 + 2 A E^3)$

$+ O^2 R^2 (C^3 E - 3 B C D E + 3 A D^2 E + 3 B^2 E^2 - 3 A C E^2)$

$+ O^2 S^2 (C^4 - 4 B C^2 D + 2 B^2 D^2 + 4 A C D^2 + 4 B^2 C E - 4 A C^2 E - 8 A B D E + 6 A^2 E^2)$

$$+O^2PQ(-CDE^2+3BE^3)$$
$$+O^2PR(CD^2E-2C^2E^2-BDE^2+4AE^3)$$
$$+O^2PS(-CD^3+3C^2DE+BD^2E-5BCE^2-5ADE^2)$$
$$+O^2QR(-C^2DE+2BD^2E+BCE^2-5ADE^2)$$
$$+O^2QS(C^2D^2-2BD^3-2C^3E+4BCDE-2AD^2E-3B^2E^2+2ACE^2)$$
$$+O^2RS(-C^3D+3BCD^2-3AD^3+BC^2E-5B^2DE+2ACDE-5ABE^2$$
$$+OP^3(-BE^3)$$
$$+OQ^3(B^2E^2-2ACE^2)$$
$$+OR^3(-B^3E+3ABCE-3A^2DE)$$
$$+OS^3(B^4-4AB^2C+2A^2C^2+4A^2BD-4A^3E)$$
$$+OP^2Q(BDE^2-4AE^3)$$
$$+OP^2R(-BD^2E+2BCE^2+ADE^2)$$
$$+OP^2S(BD^3-3BCDE-AD^2E+3B^2E^2+2ACE^2)$$
$$+OPQ^2(-BCE^2+3ADE^2)$$
$$+OPR^2(-BC^2E+2B^2DE+ACDE-5ABE^2)$$
$$+OPS^2(-BC^3+3B^2CD+2AC^2D-5ABD^2-3B^3E+2ABCE+5A^2DE)$$
$$+OPQR(BCDE-3AD^2E-3B^2E^2+4ACE^2)$$
$$+OPQS(-BCD^2+3AD^3+2BC^2E+B^2DE-8ACDE+2ABE^2)$$
$$+OPRS(BC^2D-2B^2D^2-ACD^2-B^2CE+10ABDE-8A^2E^2)$$
$$+OQ^2R(-B^2DE+2ACDE+ABE^2)$$
$$+OQ^2S(B^2D^2-2ACD^2-2A^2CE+4AC^2E-4A^2E^2)$$
$$+OQR^2(B^2CE-2AC^2E-ABDE+4A^2E^2)$$
$$+OQS^2(B^2C^2-2AC^3-2B^3D+4ABCD-3A^2D^2+2AB^2E+2A^2CE)$$
$$+OQRS(-B^2CD+2AC^2D+ABD^2+3B^3E-8ABCE+2A^2DE)$$
$$+OR^2S(+B^3D-3ABCD+3A^2D^2-AB^2E+2A^2CE)$$
$$+ORS^2(-B^3C+3ABC^2+AB^2D-5A^2CD-A^2BE)$$

$=0$. Segnerò questa finale (Ψ).

Volendo la finale per una equazione di 4.° grado, ed una di 3.°, si ponga nella equazione (U) il coefficiente O nullo, ed annientata la colonna III., resterà l'aggregato delle colonne I. e II. a formar, dopo che diviso siasi per A, la finale desiderata. Volete la finale per una equazione di 4.°, ed una di 2.°? Oltre ad O ponete nella equazion (U) anche $P=o$, e corrispondentemente tralasciate nelle colonne I. e II. tutti i termini affetti di P, a maggior distinzione e comodo raccolti nelle parti inferiori di esse colonne, e tornate a dividere l'aggregato degli altri termini, che rimangon per A. Si ha bisogno della finale per due equazioni di 3.° grado? Facciasi $=o$ in (U) il primo coefficiente O, ed in (T) l'ultimo E; verranno ad annullarsi le colonne II. e III., e la I. mutilata ne' suoi termini dei membri contenenti E, e tutta divisa per SA esibirà la finale cercata. Bramasi per ultimo la finale per una equazione di 3.° ed una di 2.°? Posti in (U) O, e $P=o$, ed in (T) $E=o$, la richiesta finale si restrignerà ai dieci superiori termini della I. colonna mutilati dei membri contenenti E, e divisi tutti per SA^2. La divisibilità che riceve la finale (Ψ) per A, A^2 abbassando al 3.°, al 2.° grado l'equazione (U), e per S abbassando al 3.° l'equazione (T) conferma la riflessione esposta alla pag. 54, e la regola da essa dedotta nella pag. 55. Distinguendo per comodo di parlare con Cramer in ogni termine della tavola tricolonnare col nome di fattor primario il prodotto delle potenze diversamente combinate dei coefficienti dell'equazione (U), O, P, Q, R, S, che sta avanti la parentesi, e col nome di fattor secondario tutto ciò che nella parentesi si chiude dei coefficienti A, B, C, D, E dell'equazione (T) composto; è chiaro, che dovendo entrar ugualmente nella equazion finale gli uni coefficienti, e gli altri, siccome i fattori primarj sono tutti i varj modi, onde possono combinarsi al quarto grado le potenze dei coefficienti O, P, Q, R, S, così i fattori secondarj altra in complesso varietà contener non possono di composti dei coefficienti A, B, C, D, E che quella delle combinazioni tutte di quarto grado delle potenze di essi coefficienti; di guisa che libero sia il trasferir queste in luogo di fattori primarj, e sieno reciprocamente per risultare in O, P, Q, R, S dei fattori secondarj simili a quelli che si avevano in A, B, C, D, E, e l'equazion finale tutta riceva una inversa, ma simile forma. Nella equazion finale delle due equazioni

$Az^4+Bz^3+Cz^2+Dz+E=0$, $Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$, la prima di 4.°, la seconda di 3.° grado, ristrignentesi all' aggregato della I. e della II. colonna diviso per A, i fattori primarj saranno combinazioni in P, Q, R, S di 4.° grado, ed i fattori primarj, ossia tutti i membri loro, combinazioni reciprocamente di 3.° grado in A, B, C, D, E. Se invertasi, prendendo queste a fattori primarj, si avranno fattori primarj di 3.° grado, e scambievolmente secondarj di 4.°. Ma ciò, che più importa si è il progresso apertoci dalla finale (Ψ) delle due equazioni (T), (U) di 4.° grado a finali di equazioni di grado superiore. Rendesi dalle cose dette manifesto, che a salire dalla finale (Ψ) alla finale per l'equazione di 4.° grado (T), e per l'equazione di 5.° grado $Nz^5+Oz^4+Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$, basta moltiplicar la finale (Ψ) per A, ed aggiugner una IV. colonna di fattori primarj formati per le combinazioni di N, come lo è la III. di (Ψ) per quelle di O, e calcolar i rispettivi fattori secondarj. Similmente dalla finale per una equazione di 4.° ed una di 5.° grado si innoltrerà la salita alla finale per una di 4. ed una di 6., e così via via a piacere, e senza limite. Ottenuta la finale che noterò (Ψ') per l'equazione di 4.° grado $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$, e per quella di 5.° $Nz^5 + Oz^4 + Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0$, si cavino dai fattori secondarj, disgiunte le une dalle altre, le combinazioni di 5.° grado in A, B, C, D, E, ed in fattori primarj si commutino, legando ad un tempo reciprocamente in membri de' nuovi fattori secondarj le combinazioni di 4.° grado in N, O, P, Q, R, S. Ciò fatto a conseguire la finale per due equazioni di 5.° grado

$$Nz^5 + Oz^4 + Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = 0,$$
$$Az^5 + Bz^4 + Cz^3 + Dz^2 + Ez + F = 0,$$

altro non rimarrà a fare che moltiplicar i fattori secondarj della nuova inversa forma della finale (Ψ') per N, accrescerla di una nuova colonna avente a fattori primarj le combinazioni di 5.° grado delle potenze 5.^{a}, 4.^{a}, 3.^{a}, 2.^{a}, 1.^{a} di F, con quelle dei coefficienti A, B, C, D, E, ed istituir il computo dei secondarj fattori rispettivi. Per simil modo si ascenderà alla finale di due equazioni di 6.° grado, a due di 7.°, e indefinitamente a due di grado n. Progresso sì fatto esige di poter calcolare un qualunque termine della desiderata finale indipendentemente, e separatamente dagli altri. Questo è ciò, che è proprio del metodo da me perfezionato del Cramer, e però l'additato progresso da finale a finale di gradi sempre superiori è un pregio particolare di esso. Il calcolo si presenterà sotto l'aspetto di una laboriosità spaventevole; egli è laborioso di fatti: ma qual calcolo di eliminazione non lo è a misura che si avanza a gradi più alti? Quello, a cui per me fu tratto il Crameriano col beneficio dei due teoremi alla pag. 45 esposti, ha realmente assai meno di laboriosità, che a prima fronte dimostra. A formarne una giusta estimazione debbonsi avvertire tre cose

1.ª Il secondo dei citati teoremi si risolve generalmente nel primo, ossia la determinazione di qualsivoglia $\Pi^{(s,t,u\ldots)}$ qualunque sia il numero degli esponenti s, t, u... si risolve nel calcolo di semplici $\Pi^{(r)}$. Ho già dimostrato che $\Pi^{(s,t)} = \Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} - \Pi^{(s+t)}$; ed ho dimostrato pure che $\Pi^{(s,t,u)} = \Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)} - \Pi^{(s+t+u)} - \Pi^{(s+t,u)} - \Pi^{(s+u,t)} - \Pi^{(t+u,s)}$. Ma per la prima dimostrazione $\Pi^{(s+t,u)} = \Pi^{(s+t)} . \Pi^{(u)} - \Pi^{(s+t+u)}$; $\Pi^{(s+u,t)} = \Pi^{(s+u)} . \Pi^{(t)} - \Pi^{(s+t+u)}$; $\Pi^{(t+u,s)} = \Pi^{(t+u)} . \Pi^{(s)} - \Pi^{(s+t+u)}$: dunque raccolte le soluzioni

$$\Pi^{(s,t,u)} = \Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)} - \Pi^{(s+t)} . \Pi^{(u)} - \Pi^{(s+u)} . \Pi^{(t)} - \Pi^{(t+u)} . \Pi^{(s)} + 2\Pi^{(s+t+u)}.$$

Procediamo al caso di quattro esponenti, cioè alla soluzione di $\Pi^{(s,t,u,v)}$: dico essere di prima soluzione

$$\begin{aligned}\Pi^{(s,t,u,v)} = {} & \Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(v)} - \Pi^{(s+t+u+v)} \\ & - \Pi^{(s+t+u,v)} - \Pi^{(s+t+v,u)} - \Pi^{(s+u+v,t)} - \Pi^{(t+u+v,s)} \\ & - \Pi^{(s+t,u+v)} - \Pi^{(s+u,t+v)} - \Pi^{(s+v,t+u)} \\ & - \Pi^{(s+t,u,v)} - \Pi^{(s+u,t,v)} - \Pi^{(s+v,t,u)} - \Pi^{(t+u,s,v)} - \Pi^{(t+v,s,u)} - \Pi^{(u+v,s,t)}.\end{aligned}$$

Lo dimostro. Il prodotto $\Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(v)}$ rappresenta il prodotto

$$(a^s + b^s + c^s + d^s \ldots)(a^t + b^t + c^t + d^t \ldots)(a^u + b^u + c^u + d^u \ldots)(a^v + b^v + c^v + d^v \ldots).$$

Ma in tal prodotto vi sarà rispetto ad a 1.° il termine $a^{s+t+u+v}$, 2.° il termine $a^{s+t+u} b^v$ con gli altri simili, in luogo di b^v contenenti c^v, d^v.... e con la stessa ampiazione ai simili, 3.° il termine $a^{s+t+v} b^u$, 4.° il termine $a^{s+u+v} b^t$, 5.° il termine $a^{t+u+v} b^s$, 6.° il termine $a^{s+t} b^{u+v}$, 7.° il termine $a^{s+u} b^{t+v}$, 8.° il termine $a^{s+v} b^{t+u}$, 9.° il termine

$a^{s+t} b^u c^v$, 10.° il termine $a^{s+u} b^t c^v$. 11.° il termine $a^{s+v} b^t c^u$, 12.° il termine $a^{t+u} b^s c^v$, 13.° il termine $a^{t+v} b^s c^u$, 14.° il termine $a^{u+v} b^s c^t$, 15.° il termine $a^s b^t c^u d^v$. Altrettanto intender si dèe rispetto a ciascuna delle altre quantità b, c, d .... ciascheduna si troverà nel prodotto elevata e moltiplicata con le altre secondo tutte le combinazioni degli esponenti s, t, u, v. Dunque si avrà

$$\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)} = \Pi^{(s+t+u+v)} + \Pi^{(s+t+u,\,v)} + \Pi^{(s+t+v,\,u)} + \Pi^{(s+u+v,\,t)}$$
$$+\Pi^{(t+u+v,\,s)} + \Pi^{(s+t,\,u+v)} + \Pi^{(s+u,\,t+v)} + \Pi^{(s+v,\,t+u)} + \Pi^{(s+t,\,u,\,v)} + \Pi^{(s+u,\,t,\,v)}$$
$$+\Pi^{(s+v,\,t,\,u)} + \Pi^{(t+u,\,s,\,v)} + \Pi^{(t+v,\,s,\,u)} + \Pi^{(u+v,\,s,\,t)} + \Pi^{(s,\,t,\,u,\,v)};$$

onde separando, e ponendo da sè solo questo ultimo termine $\Pi^{(s,\,t,\,u,\,v)}$, si otterrà la soluzione di lui, che ho esposta, della quale ad insigne analista sfuggite sono le combinazioni costituenti i sei termini della quarta linea. Essa però non è che una prima soluzione. Ultimiamola. Si ha per la soluzione prima del caso di tre esponenti

$$\Pi^{(s+t,\,u,\,v)} = \Pi^{(s+t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)} - \Pi^{(s+t+u+v)} - \Pi^{(s+t+u,\,v)} - \Pi^{(s+t+v,\,u)} - \Pi^{(u+v,\,s+t)}$$
$$\Pi^{(s+u,\,t,\,v)} = \Pi^{(s+u)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(v)} - \Pi^{(s+t+u+v)} - \Pi^{(s+u+t,\,v)} - \Pi^{(s+u+v,\,t)} - \Pi^{(t+v,\,s+u)}$$
$$\Pi^{(s+v,\,t,\,u)} = \Pi^{(s+v)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)} - \Pi^{(s+t+u+v)} - \Pi^{(s+v+t,\,u)} - \Pi^{(s+v+u,\,t)} - \Pi^{(t+u,\,s+v)}$$
$$\Pi^{(t+u,\,s,\,v)} = \Pi^{(t+u)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(v)} - \Pi^{(s+t+u+v)} - \Pi^{(t+u+s,\,v)} - \Pi^{(t+u+v,\,s)} - \Pi^{(s+v,\,t+u)}$$
$$\Pi^{(t+v,\,s,\,u)} = \Pi^{(t+v)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(u)} - \Pi^{(s+t+u+v)} - \Pi^{(t+v+s,\,u)} - \Pi^{(t+v+u,\,s)} - \Pi^{(s+u,\,t+v)}$$
$$\Pi^{(u+v,\,s,\,t)} = \Pi^{(u+v)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)} - \Pi^{(s+t+u+v)} - \Pi^{(u+v+s,\,t)} - \Pi^{(u+v+t,\,s)} - \Pi^{(s+t,\,u+v)}.$$

Riflettasi, che $\Pi^{(s+t,\,u+v)}$ ed $\Pi^{(u+v,\,s+t)}$ coincidono, essendo una cosa medesima $a^{s+t} b^{u+v}$, $b^{u+v} a^{s+t}$; nè si può dire che $\Pi^{(s+t,\,u+v)}$ contenga i prodotti $a^{s+t} b^{u+v}$, $a^{s+t} c^{u+v}$ ..... e reciprocamente $\Pi^{(u+v,\,s+t)}$ i prodotti $a^{u+v} b^{s+t}$, $a^{u+v} c^{s+t}$ ....., poichè la somma $\Pi^{(s+t,\,u+v)}$ estendesi del pari a tutte le quantità, ed ugualmente che i prodotti $a^{s+t}b^{u+v}$, $a^{s+t}c^{u+v}$.... abbraccia i prodotti $a^{u+v}b^{s+t}$, $a^{u+v}c^{s+t}$.....: a dir chiaro, rappresentan $\Pi^{(s+t,\,u+v)}$, $\Pi^{(u+v,\,s+t)}$ permutazioni reciproche, ma non diversa combinazione, non differente somma di prodotti, ed in valore è propiamente $\Pi^{(s+t,\,u+v)}=\Pi^{(u+v,\,s+t)}$; e per simil ragione $\Pi^{(s+u,\,t+v)}=\Pi^{(t+v,\,s+u)}$, $\Pi^{(s+v,\,t+u)}=\Pi^{(t+u,\,s+v)}$. Avuta a ciò attenzione, introducendo le sei soluzioni testè fatte nella prima soluzione di $\Pi^{(s,\,t,\,u,\,v)}$ si troverà

$$\begin{aligned}\Pi^{(s,\,t,\,u,\,v)}&=\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)}+5\,\Pi^{(s+t+u+v)}\\&-\Pi^{(s+t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)}-\Pi^{(s+u)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(v)}-\Pi^{(s+v)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)}\\&-\Pi^{(t+u)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(v)}-\Pi^{(t+v)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(u)}-\Pi^{(u+v)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}\\&+2\,\Pi^{(s+t+u,\,v)}+2\,\Pi^{(s+t+v,\,u)}+2\,\Pi^{(s+u+v,\,t)}+2\,\Pi^{(t+u+v,\,s)}\\&+\Pi^{(s+t,\,u+v)}+\Pi^{(s+u,\,t+v)}+\Pi^{(s+v,\,t+u)},\end{aligned}$$

ed è questa la seconda soluzione di $\Pi^{(s,\,t,\,u,\,v)}$. A scioglierlo interamente, rimane di sciogliere, per la soluzione da principio data riguardo a due esponenti, le formole della quarta, e della quinta linea. Adempite le risoluzioni loro risulterà per ultimo

$$\begin{aligned}\Pi^{(s,\,t,\,u,\,v)}&=\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)}\\&-\Pi^{(s+t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)}-\Pi^{(s+u)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(v)}-\Pi^{(s+v)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)}\\&-\Pi^{(t+u)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(v)}-\Pi^{(t+v)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(u)}-\Pi^{(u+v)}.\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}\\&+2\Pi^{(s+t+u)}.\Pi^{(v)}+2\Pi^{(s+t+v)}.\Pi^{(u)}+2\Pi^{(s+u+v)}.\Pi^{(t)}+2\Pi^{(t+u+v)}.\Pi^{(s)}\\&-6\,\Pi^{(s+t+u+v)}\\&+\Pi^{(s+t)}.\Pi^{(u+v)}+\Pi^{(s+u)}.\Pi^{(t+v)}+\Pi^{(s+v)}.\Pi^{(t+u)}.\end{aligned}$$

Fatto $A_{,} = \Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)}$, si può rappresentar il prodotto $\Pi^{(s+t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)}$ per $\frac{\Pi^{(s+t)}.A_{,}}{\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}}$, e similmente gli altri prodotti simili; il prodotto $\Pi^{(s+t+u)}.\Pi^{(v)}$ si può rappresentar per $\frac{\Pi^{(s+t+u)}.A_{,}}{\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)}}$, e così ciascun degli altri simili; ed il prodotto $\Pi^{(s+t)}.\Pi^{(u+v)}$ si può rappresentar per $\frac{\Pi^{(s+t)}.\Pi^{(u+v)}.A_{,}}{\Pi^{(s)}.\Pi^{(t)}.\Pi^{(u)}.\Pi^{(v)}}$, e gli altri due simili analogamente.

Camminando su le tracce di combinazione, di discorso, di sviluppo da me segnate nello scioglimento di $\Pi^{(s,t,u,v)}$, si progredirà alla soluzione di $\Pi^{(v,u,t,s,r)}$, a quella di $\Pi^{(v,u,t,s,r,q)}$, a quella di $\Pi^{(v,u,t,s,r,q,p)}$, e s'indurrà la formola generale di soluzione di $\Pi^{(v,u,t,s,r,q,p,o,n\ldots)}$.

Facendo per compendio

$$A_1 = \Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(q)} . \Pi^{(p)} \ldots\ldots$$

$$B_2 = \frac{\Pi^{(v+u)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)}} + \frac{\Pi^{(v+t)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(t)}} \ldots + \frac{\Pi^{(u+t)} . A_1}{\Pi^{(u)} . \Pi^{(t)}} + \ldots$$

$$C_3 = \frac{\Pi^{(v+u+t)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)}} + \frac{\Pi^{(v+u+s)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(s)}} \ldots + \frac{\Pi^{(u+t+s)} . A_1}{\Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)}} + \ldots$$

$$D_4 = \frac{\Pi^{(v+u+t+s)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)}} + \frac{\Pi^{(v+u+t+r)} . A_1}{\Pi^{(v)} \ \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(r)}} + \ldots$$

$$B_2 B_2 = \frac{\Pi^{(v+u)} . \Pi^{(t+s)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)}} + \frac{\Pi^{(v+t)} . \Pi^{(u+s)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)}} \ldots + \frac{\Pi^{(v+r)} . \Pi^{(u+t)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)}} + \ldots$$

$$E_5 = \frac{\Pi^{(v+u+t+s+r)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} \ \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)}} + \frac{\Pi^{(v+u+t+s+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(q)}} + \ldots$$

$$B_2 C_3 = \frac{\Pi^{(v+u)} . \Pi^{(t+s+r)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} \ \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)}} + \frac{\Pi^{(v+t)} . \Pi^{(s+r+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(q)}} + \ldots$$

$$F_6 = \frac{\Pi^{(v+u+t+s+r+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(q)}} + \frac{\Pi^{(v+u+t+s+r+p)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(p)}} + \ldots$$

$$B_2 D_4 = \frac{\Pi^{(v+u+t+s)} . \Pi^{(r+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(q)}} + \frac{\Pi^{(v+u+t+r)} . \Pi^{(s+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(q)}} + \ldots$$

$$C_3 C_3 = \frac{\Pi^{(v+u+t)} . \Pi^{(s+r+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(q)}} + \frac{\Pi^{(v+u+s)} \ \Pi^{(t+r+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(q)}} + \ldots$$

$$B_2 B_2 B_2 = \frac{\Pi^{(v+u)} . \Pi^{(t+s)} . \Pi^{(r+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(q)}} + \frac{\Pi^{(v+t)} . \Pi^{(u+s)} . \Pi^{(r+q)} . A_1}{\Pi^{(v)} . \Pi^{(t)} . \Pi^{(u)} . \Pi^{(s)} . \Pi^{(r)} . \Pi^{(q)}} + \ldots$$

ec.

Sarà $\Pi^{(v,u,t,s,r,q\ldots)} = A_1 - B_2 + 1.2.C_3$

$$- 1.2.3.D_4 + 1.2.3.4 E_5 - 1.2.3.4.5.F_6 + 1.2.3.4.5.6.G_7$$
$$+ 1.1.B_2 B_2 - 1.1.2.B_2 C_3 + 1.1.2.3.B_2 D_4 - 1.1.2.3.4.B_2 E_5$$
$$- 1.1.1.B_2 B_2 B_2 + 1.1.1.2.B_2 B_2 C_3$$
$$- 1.2.1.2.C_3 C_3 - 1.2.1.2.3.C_3 D_4$$

ec.

Tal è la general formola esibita dal Waring sul principio delle sue *Miscellanee* sotto il titolo di *Lemma II.*, non nel Problema III. come dice pag. 150 della sua *Algebra* il Frisi. Io mi era indotto a credere che dal Waring fosse dimostrata pur anche, importandolo il nome di problema, e nulla dicendo Frisi in contrario; ma venutomi per sorte tra le mani il libro, veggo, che in realità di dimostrazione non vi è un passo; laonde colta qui l'opportunità mi son presa la cura di delinearne la via. I numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6.... ordinatamente posti a piè destro delle lettere A, B, C, D, E, F..... corrispondono ad un tempo ai luoghi loro nell'alfabeto, ed al significato loro attribuito. A_1 significa il prodotto delle Π dotate tutte di un solo degli esponenti v, u, t...., B_2 significa la somma dei prodotti, ne' quali vi entra una Π dotata dell'aggregato di due esponenti, C_3 significa la somma de' prodotti, in ciascun de' quali vi entra una Π fornita dell'aggregato di tre di essi esponenti..... F_6 significa la somma de' prodotti, che contengono una Π dotata dell'aggregato di sei degli esponenti medesimi ec. $B_2 B_2$ non vuol già dire il quadrato di B_2, ma significa la somma de' prodotti, ne' quali entrano due Π portanti l'aggregato di due esponenti; nè $B_2 C_3$ rappresenta la moltiplica di B_2 con C_3, ma soltanto significa la somma dei prodotti, ne' quali con una Π dotata dell'aggregato di due esponenti se ne combina una recante l'aggregato di tre, e così vadasi discorrendo. I termini della formola sono ordinati, ed in partite distribuiti secondo la somma dei numeri, che stanno a piè delle lettere: nella quarta partita di due termini composta la somma in ciascuno è 4, nella quinta composta pur di due termini la somma in ciascheduno è 5, nella sesta, che comprende quattro termini, la somma in ciascuno è 6 ec.. Waring non esprime i numeri, ma lascia al leggitor di sottintenderli: io gli ho espressi, e posti a piè delle lettere per due motivi: e perchè subito si presenti all'occhio il significato loro, e la ragion del distribuimento dei termini nella formola; e perchè le lettere A, B, C, D ...... nel semplice loro abito sono state da me usate a coefficienti dell'equazione (T). Rispetto ai numerici coefficienti della general formola, sappiasi che B_2 importa 1, che C_3 importa 1.2, D_4 importa $1.2.3$, E_5 importa $1.2.3.4$, e così via via; e che i prodotti delle lettere importano i prodotti dei numeri, che ciascuna importa; onde il termine ad esempio $B_2 B_2 C_3$ ha per coefficiente $1.1.1.2$, poichè B_2 importa 1, il secondo B_2 importa di nuovo 1, e C_3 importa 1.2. Generalmente se in un termine entri a fattore B_2 numero π volte, C_3 volte ρ, D_4 volte σ, E_5 volte τ, F volte υ... il suo coefficiente sarà $1^{\pi}.1^{\rho}.2^{\rho}.1^{\sigma}.2^{\sigma}.3^{\sigma}.1^{\tau}.2^{\tau}.3^{\tau}.4^{\tau}.1^{\upsilon}.2^{\upsilon}.3^{\upsilon}.4^{\upsilon}.5^{\upsilon}$.... Per il caso di quattro esponenti si avrà dalla general formola $\Pi^{(o,u,t,s)} = A_1 - B_2 + 1.2.C_3 - 1.2.3.D_4 + 1.1.B_2 B_2$, e restituendo in luogo di A_1, B_2, C_3, D_4, $B_2 B_2$ le somme per loro rappresentate si ritornerà sott'occhio la soluzione di $\Pi^{(v,u,t,s)}$ trovata di sopra.

Qualora due, tre, quattro ... esponenti sieno uguali, il risultato della formola generale si dovrà rispettivamente dividere per 1.2, per $1.2.3$, per $1.2.3.4$, per $1.2.3.4.5$, per ec., s'intenderà facilmente la ragione, applicando a quattro, a cinque, a sei .... esponenti uguali le osservazioni alla pag. 48 fatte su due, e su tre.

2.ª La seconda cosa da avvertirsi per non credere laborioso oltre il vero il calcolo di una finale termine per termine si è, che basta calcolar per $\Pi^{(r)}$ purgate, distruggendosi da loro, se per $\Pi^{(r)}$ complete si calcoli, i termini incompetenti, e tornando in fine lo stesso. Vediamone un esempio calcolando per il caso delle due equazioni di 3° grado $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$, $Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$ il termine 9.° della colonna I., alla quale in tal caso ristrignesi la finale tutta, a condizione inoltre di dividerla per SA, e di scancellare in ogni termine i membri contenenti E, con che l'assegnato 9.° termine riducesi a $RQ^2(-ACD)$. Posta l'equazione $Pz^3+Qz^2+Rz+S=0$ sotto la forma Crameriana $(3)z^3+(2)z^2+(1)z+(0)=0$, il fattor primario RQ^2 riceve la forma $(1.2.2)$, ed il fattor secondario cercato $(-ACD)$ vien corrispondentemente espresso per $\Pi^{(1,2,2)}$, e risolvendo particolarmente, o per la general formola, ritrovasi

$$\Pi^{(1,2,2)}=\Pi^{(1)}.\Pi^{(2)}.\Pi^{(2)}-2.\Pi^{(3)}.\Pi^{(2)}-\Pi^{(4)}.\Pi^{(1)}+2\,\Pi^{(5)}.$$

Fanno qui di bisogno $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(3)}$, $\Pi^{(4)}$, $\Pi^{(5)}$ relative all'equazione $Az^3+Bz^2+Cz+D=0$, da determinarsi per la formola

$$\Pi^{(r)}=-\frac{B}{A}\Pi^{(r-1)}-\frac{C}{A}\Pi^{(r-2)}-\frac{D}{A}\Pi^{(r-3)}$$

con le regole pag. 47 prescritte.

Sono le $\Pi^{(r)}$ complete

$$\Pi^{(1)} = -\frac{B}{A}$$

$$\Pi^{(2)} = \frac{B^2}{A^2} - \frac{2\,C}{A}$$

$$\Pi^{(3)} = -\frac{B^3}{A^3} + \frac{3\,B\,C}{A^2} - \frac{3\,D}{A}$$

$$\Pi^{(4)} = \frac{B^4}{A^4} - \frac{4\,B^2\,C}{A^3} + \frac{4\,B\,D}{A^2} + \frac{2\,C}{A}$$

$$\Pi^{(5)} = -\frac{B^5}{A^5} + \frac{5\,B^3\,C}{A^4} - \frac{5\,B^2\,D}{A^3} - \frac{5\,B\,C^2}{A^3} + \frac{5\,C\,D}{A^2}$$

Le $\Pi^{(r)}$ purgate, ommettendo i termini di podestà, o prodotti al 3.° grado superiori, sono

$$\Pi^{(1)} = -\frac{B}{A}$$

$$\Pi^{(2)} = \frac{B^2}{A^2} - \frac{2\,C}{A}$$

$$\Pi^{(3)} = -\frac{B^3}{A^3} + \frac{3\,B\,C}{A^2} - \frac{3\,D}{A}$$

$$\Pi^{(4)} = -\frac{4B^2C}{A^3} + \frac{4BD}{A^2} + \frac{2\,C}{A}$$

$$\Pi^{(5)} = -\frac{5\,B^2\,D}{A^3} - \frac{5\,B\,C^2}{A^3} + \frac{5\,C\,D}{A^2}.$$

Facendo il calcolo di $\Pi^{(1,2,2)}$ per le $\Pi^{(r)}$ purgate, e purgando continuamente tra via, si ha

$$\Pi^{(1)}.\Pi^{(2)}.\Pi^{(2)} = -\frac{B}{A}\left(\frac{B^2}{A^2} - \frac{2\,C}{A}\right)^2 = -\frac{4\,B\,C^2}{A^3}$$

$$-2\Pi^{(2)}.\Pi^{(3)} = -2\left(\frac{B^2}{A^2} - \frac{2\,C}{A}\right)\left(-\frac{B^3}{A^3} + \frac{3\,BC}{A^2} - \frac{3D}{A}\right) = \frac{6\,B^2D}{A^3} + \frac{12\,BC^2}{A^3} - \frac{12\,C\,D}{A^2}$$

$$-\Pi^{(1)}.\Pi^{(4)} = \frac{4\,B^2D}{A^3} + \frac{2\,B\,C^2}{A^3}$$

$$2\,\Pi^{(5)} = -\frac{10\,B^2D}{A^3} - \frac{10\,B\,C^2}{A^3} + \frac{10\,C\,D}{A^2};$$

laonde, sommando, risulta $\Pi^{(1,2,2)} = -\frac{2CD}{A^2} = -\frac{2\,ACD}{A^3}$; e dividendo per $1 \,.\, 2$, a ragion dei due esponenti uguali $2,2$ in $\Pi^{(1,2,2)}$, resta $-\frac{A\,C\,D}{A^3}$. Dovea trovarsi $-A\,C\,D$.

Ma si cerchi il fattor secondario corrispondente al primario S^2, che resterà all'apice della colonna I. divisa per SA: questo fattor primario sarà in forma Crameriana $(0.0.0)$, ed il corrispondente fattor secondario sarà $\Pi^{(0,0,0)}$, che è $=1$; dunque risulta $1=\frac{A^3}{A^3}$ in vece di A^3, come risulta $-\frac{ACD}{A^3}$ in vece di $-ACD$; e così tutti i termini della finale si troverebbero risultare divisi per A^3, come nel *Confronto generale* pag. 63 fu notato; ma togliendo questo divisor comune, nel primo termine verrebbesi ad avere $S^2 A^2$, nel 9.° $RQ^2(-ACD)$, e convenientemente negli altri tutti.

Istituendo ora il calcolo per le $\Pi^{(r)}$ complete, e tenendo conto di tutti i prodotti, trovasi

$$\Pi^{(1)}\cdot{}^{(2)}\cdot\Pi^{(2)}=-\frac{B^5}{A^5}+\frac{4B^3C}{A^4}-\frac{4BC^2}{A^3}$$

$$-2\Pi^{(2)}\cdot\Pi^{(3)}=\frac{2B^5}{A^5}-\frac{10B^3C}{A^4}+\frac{12BC^2}{A^3}+\frac{6B^2D}{A^3}-\frac{12CD}{A^2}$$

$$-\Pi^{(1)}\cdot\Pi^{(4)}=\frac{B^5}{A^5}-\frac{4B^3C}{A^4}+\frac{2BC^2}{A^3}+\frac{4B^2D}{A^3}$$

$$2\Pi^{(5)}=-\frac{2B^5}{A^5}+\frac{10B^3C}{A^4}-\frac{10BC^2}{A^3}-\frac{10B^2D}{A^3}+\frac{10CD}{A^2}.$$

Distruggonsi nella somma il termine primo, ed il secondo, podestà quello di 5.°, e prodotto questo di 4.° grado; ed elidendosi, come sopra, i positivi co' negativi nei due seguenti, rimane siccome là $\frac{-2CD}{A^2}$. Vale dunque a risparmio di fatica nel calcolo per me riformato del Cramer la regola dal la Grange stabilita a favor del suo, e la stessa n'è la ragione.

3.° Il numero delle $\Pi^{(r)}$, che si ha uopo di determinare per costruire termine per termine la finale di due equazioni di grado n è n^2. Poichè trattisi di due equazioni di 3.° grado, il fattor primario in forma Crameriana più alto sarà (3.3.3), come vedesi nella Tavola della pag. 50, ed il corrispondente fattor secondario sarà $\Pi^{(3,3,3)}$, nello scioglimento del quale il termine più alto sarà $\Pi^{(3+3+3)}=\Pi^{(9)}$. Trattandosi di due equazioni di 4.° grado il fattor primario in Crameriana forma più alto sarà (4.4.4.4), al quale corrisponderà per fattor secondario $\Pi^{(4,4,4,4)}$, del cui scioglimento il termine più alto sarà $\Pi^{(4+4+4+4)}=\Pi^{(16)}$, e così proseguasi col discorso. Sulle, numero n^2, $\Pi^{(r)}$, sulle differenti combinazioni, e moltipliche fra di loro si aggirerà tutto il calcolo dei termini della finale, e le stesse moltipliche, che han servito per la invenzione di un termine, serviranno per il computo di molti altri. Ecco le 16 $\Pi^{(r)}$, con le quali potrà il leggitore mettere alla prova qualunque termine a piacere, e tutta, se gli aggrada, la finale tricolonnare (Ψ) sopra estesa.

Le 16 $\Pi^{(r)}$ purgate relative all'equazione

$$Az^4+Bz^3+Cz^2+Dz+E=0.$$

$$\Pi^{(1)} = -\frac{B}{A}$$

$$\Pi^{(2)} = \frac{B^2}{A^2} - \frac{2C}{A}$$

$$\Pi^{(3)} = -\frac{B^3}{A^3} + \frac{3BC}{A^2} - \frac{3D}{A}$$

$$\Pi^{(4)} = \frac{B^4}{A^4} - \frac{4B^2C}{A^3} + \frac{4BD}{A^2} + \frac{2C^2}{A^2} - \frac{4E}{A}$$

$$\Pi^{(5)} = \frac{5B^3C}{A^4} - \frac{5B^2D}{A^3} - \frac{5BC^2}{A^3} + \frac{5CD}{A^2} + \frac{5BE}{A^2}$$

$$\Pi^{(6)} = \frac{6B^3D}{A^4} + \frac{9B^2C^2}{A^4} - \frac{12BCD}{A^3} - \frac{6B^2E}{A^3} - \frac{2C^3}{A^3} + \frac{6CE}{A^2} + \frac{3D^2}{A^2}$$

$$\Pi^{(7)} = \frac{21B^2CD}{A^4} + \frac{7B^3E}{A^4} + \frac{7BC^3}{A^4} - \frac{14BCE}{A^3} - \frac{7BD^2}{A^3} - \frac{7C^2D}{A^3} + \frac{7DE}{A^2}$$

$$\Pi^{(8)} = \frac{24B^2CE}{A^4} + \frac{12B^2D^2}{A^4} + \frac{24BC^2D}{A^4} + \frac{2C^4}{A^4} - \frac{16BDE}{A^3} - \frac{8C^2E}{A^3} - \frac{8CD^2}{A^3} + \frac{4E^2}{A^2}$$

$$\Pi^{(9)} = \frac{27B^2DE}{A^4} + \frac{27BC^2E}{A^4} + \frac{27BCD^2}{A^4} + \frac{9C^3D}{A^4} - \frac{9BE^2}{A^3} - \frac{18CDE}{A^3} - \frac{3D^3}{A^3}$$

$$\Pi^{(10)} = \frac{15B^2E^2}{A^4} + \frac{60BCDE}{A^4} + \frac{10BD^3}{A^4} + \frac{10C^3E}{A^4} + \frac{15C^2D^2}{A^4} - \frac{10CE^2}{A^3} - \frac{10D^2E}{A^3}$$

$$\Pi^{(11)} = \frac{33BCE^2}{A^4} + \frac{33BD^2E}{A^4} + \frac{33C^2DE}{A^4} + \frac{11CD^3}{A^4} - \frac{11DE^2}{A^3}$$

$$\Pi^{(12)} = \frac{36BDE^2}{A^4} + \frac{18C^2E^2}{A^4} + \frac{36CD^2E}{A^4} + \frac{3D^4}{A^4} - \frac{4E^3}{A^3}$$

$$\Pi^{(13)} = \frac{13BE^3}{A^4} + \frac{39CDE^2}{A^4} + \frac{13D^3E}{A^4}$$

$$\Pi^{(14)} = \frac{14CE^3}{A^4} + \frac{21D^2E^2}{A^4}$$

$$\Pi^{(15)} = \frac{15DE^3}{A^4}$$

$$\Pi^{(16)} = \frac{4E^4}{A^4}.$$

Queste $\Pi^{(r)}$ si trasportano in un attimo dall'equazione

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0, \text{ di } 4.^\circ$$

all'equazione

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0, \text{ di } 3.^\circ \text{ grado},$$

ponendo la quantità $E = 0$, e perciò scancellando tutti i termini, ne' quali ella entra, ed ommettendo tutti gli altri di podestà, o prodotto al terzo grado superiore; con fare le quali cose vedrassi, che si riducono a 9, alle 9 prime, annullandosi le 7 seguenti conformemente al numero generalmente assegnato n^2.

Possiamo delle stesse 16 $\Pi^{(r)}$ valerci a comporre la finale (Ψ) con il calcolo per me semplificato del la Grange: basta, essendo ad arbitrio, in vece della reciproca della equazion (T) concordemente al fatto sopra pag. 61, prendere la reciproca dell'equazion (U), che sarà

$$Sz^4 + Rz^3 + Qz^2 + Pz + O = 0,$$

e formar la schiera delle $\pi^{(r)}$ a questa relative, il che si adempirà in un subito per mezzo delle 16 $\Pi^{(r)}$ medesime, cangiando A in S, B in R, C in Q, D in P, E in O. Eseguite tutte le altre operazioni proprie di tal calcolo riuscirà la finale (Ψ) divisa per $A^4\ S^4$ cioè $\frac{1}{A^4 S^4}$ (Ψ), come con il calcolo antecedente riesce $\frac{1}{A^4}$ (Ψ).

Applicando alle due equazioni di 4° grado (T), (U) il metodo di Bezout si tireranno 4 equazioni di 3° grado, cioè :

$O(T)-A(U)$ darà

1.ª $(BO-PA)z^3+(CO-QA)z^2+(DO-RA)z+EO-SA=0$

$(Oz+P)(T)-(Az+B)(U)$ darà

2.ª $(CO-QA)z^3+(DO-RA+CP-QB)z^2+(EO-SA+DP-RB)z+EP-SB=0$

$(Oz^2+Pz+Q)(T)-(Az^2+Bz+C)(U)$ darà

3.ª $(DO-RA)z^3+(EO-SA+DP-RB)z^2+(EP-SB+DQ-RC)z+EQ-SC=0$

$(Oz^3+Pz^2+Qz+R)(T)-(Az^3+Bz^2+Cz+D)(U)$ darà

4.ª $(EO-SA)z^3+(EP-SB)z^2+(EQ-SC)z+ER-SD=0$.

Combinando a due a due queste 4 equazioni di 3°, ne provengono 6 di 2.° grado, le quali combinate a due a due ne porgono 15 di 1.°, e queste a due a due combinate producono 105 finali. Qual sarà di esse la privilegiata, la immune da' fattori alteranti, la sincera? Pare, che quella dalle due più semplici di codeste 4 equazioni di 3.° grado dedotta, applicando loro la final Bezoutiana pura (ω). Or esse due più semplici equazioni sono le estreme, la 1.ª cioè, e la 4.ª. Facciamo pertanto $BO-PA=A'$, $CO-QA=B'$, $DO-RA=C'$, $EO-SA=D'=P'$, $EP-SB=Q'$, $EQ-SC=R'$, $ER-SD=S'$; ed alle equazioni

$$A'z^3-B'z^2+C'z+D'=0, \quad D'z^3+Q'z^2+R'z+S'=0,$$

applicando la formola della finale (ω), pag. 9, restituitivi in luogo dei compendiosi simboli gli aggregati per essi significati, pag. 8, avremo

$$\begin{aligned}
&(D'^2-A'S')^3+(C'Q'-B'R')(D'^2-A'S')^2\\
&-(D'^2-A'S')\big((B'D'-A'Q')(D'R'-C'S')+2(D'Q'-B'S')(C'D'-A'R')\big)\\
&+(B'D'-A'Q')\big((D'Q'-B'S')^2-(C'Q'-B'R')(D'R'-C'S')\big)\\
&+(C'D'-A'R')^2(D'R'-C'S')=0,
\end{aligned}$$

dove intender si dovrà

$$D'^2 - A'S' = (EO - SA)^2 - (BO - PA)(RE - DS)$$
$$B'D' - A'Q' = (CO - QA)(EO - SA) - (BO - PA)(EP - SB)$$
$$D'Q' - B'S' = (EO - SA)(EP - SB) - (CO - QA)(RE - DS)$$
$$C'D' - A'R' = (DO - RA)(EO - SA) - (BO - PA)(EQ - SC)$$
$$C'Q' - B'R' = (DO - RA)(EP - SB) - (CO - QA)(EQ - SC)$$
$$D'R' - C'S' = (EO - SA)(EQ - SC) - (DO - RA)(RE - DS).$$

È chiaro, che il cubo $(D'^2 - A'S')^3$, inchiudendo il cubo di $(EO - SA)^2$, importa il termine $-S^6A^6$, senza che negli altri prodotti seguenti dell'equazione apparisca il suo contrario, che lo distrugga; laddove nella finale (Ψ) non si ha nel primo termine che S^4A^4. Per conseguenza non vale ad ottenere col metodo di Bezout una finale pura per due equazioni di 4.° grado, il trasciegliere delle quattro dedotte di 3.° le due più semplici, e loro applicar la finale pura di quelle di 3.°.

CONCLUSIONE.

L'elevatezza oltre dovere della finale di eliminamento è in analisi un incomodo, a togliere il quale hanno con ragione i sommi analisti più recenti intese le forze degli ingegni loro. Il metodo più comunemente adottato si è quello del Bezout: e perchè per una parte stimasi, che al par di qualunque altro più squisito vada esente dall'inconveniente di fattori alteranti; e perchè per altra parte è elementarissimo, e sole elementarissime cognizioni esige, ed operazioni importa. Il vero però si è, che, rispetto alle equazioni di 3.° grado, di tre finali, che il Bezoutiano metodo esibisce, due ve ne ha di alterate, e rispetto alle equazioni di 4.° grado, quella delle 105 per le vie più semplici, e più lusinghevoli cercata riesce anch'essa alterata: chi ha tanto d'ozio esamini quali risultino le altre 104. Il metodo di prodotto è l'unico, che gode realmente il vanto di produrre la finale scevra di alteranti fattori, precisa, e pura. Eulero ne piantò le fondamenta, Cramer, e la Grange lo hanno a miglior condizione elevato, sostituendo alla meccanica moltiplica, esibente una grave moltitudine di prodotti senz'ordine, dei calcoli più fini e di atti regolari. Ma il Cramer lasciò del suo calcolo desiderare una general dimostrazione; il la Grange assoggettò il suo alle differenze infinitesime, od ai logaritmi. Mi è sembrato, che prestato avrei qualche servigio all'analisi, dando a quello certezza, a questo semplicità. Ho ridotto il primo a due luminosissimi teoremi, e per essi, cangiato, dir posso, quasi in essenza, gode di un limpido pieno splendore; ho trasferito il secondo dalla dipendenza delle infinitesime differenze, o dei logaritmi alla dipendenza unica del primo dei medesimi teoremi, che è il bel teorema Newtoniano riguardante le somme dei valori semplici, dei quadrati, dei cubi, o delle potenze più alte qualunque delle radici di una equazione. Quello computa la finale termine per termine, ed ha per proprietà il progresso da finale a finale di gradi superiori. Questo computa la finale in massa, e la fabbrica più speditamente; egli ha il vanto di minor numero di atti, e più semplici, l'altro di più distinti, ed ordinati.

CAPO II.

Analisi delle equazioni di terzo grado.

PARTE STORICA.

§. I. Frate Luca pag. 149 trattando delle equazioni al 2.° grado superiori possibili a sciogliersi espone una schiera, nella quale ne intrude due delle forme $fx^4+gx^2=nx$, $fx^4+nx=gx^2$, e scrive a fianco dell'una, e dell'altra *impossibile*. La sentenza d'impossibilità di scioglimento cade su le equazioni di 3.° grado $fx^3+gx=n$, $fx^3+n=gx$. Che dir però voglia Frate Luca di una impossibilità relativa alle cognizioni d'allora, anzi solamente di una impossibilità di dare in quei tempi una regola generale, non mica di una impossibilità assoluta, di una impossibilità eziandio di soluzion particolare, chiaro apparisce dai seguenti detti, co' quali chiude il trattato: *Ma de Capitoli de numero cosa e cubo composti over de numero censo e cubo over de numero cubo e censo de censo non se possuto finora troppo bene formare regole generali per la disproporzionalita fra loro perche fra loro non sono intervalli equali: onde fra la cosa el numero non media alcuna dignita ne natura: e fra la cosa el cubo media el censo Si che non ne la debita habitudine fra loro peroche uno e piu distante dal suo extremo che laltro E cosi fra el censo el cubo niuna cosa media E fra el censo el numero media la cosa E pero ancora de li eguagliamenti loro non si po dare regola generale se non ale volte a tastoni in qualche caso particolare E pero quando in li toi uguagliamenti te ritrovi termini de diversi intervalli fra loro dispropor-*

zionati dirai che larte ancora a tal caso non a dato modo si commo ancora non e dato modo al quadrar del cerchio (*per tutti i philosophi* (dice pag. 106) *maxime Aristotile scibile*) *si che ista stant simul chel caso sia possibile e per anco el modo de absolverlo non sia dato per la improporzionalita che e cativa*. Alterò dunque il sentimento di Frate Luca il Cardano, allorchè a scusa di sè, per non aver essolui scoperto il modo di sciogliere l'uguagliamento del cubo, e della cosa al numero, addusse nel capo I dell'*Arte magna*: *Deceptus enim ego verbis Lucae Pacioli, qui ultra sua Capitula generale ullum aliud esse posse negat* (*quanquam tot jam antea rebus a me inventis sub manibus esset*) *desperabam tamen invenire, quod quaerere non audebam*. Non avea Frate Luca pronunciato, che non vi potesse esser regola generale, anzi per l'opposto asserito, che era possibile, ma che l'arte non l'avea peranche data, o troppo ben formata. E non era poi Cardano solito tributar tanto all'autorità di Frate Luca da perdere ogni speranza su la sua parola. Le soluzioni in fine particolari da lui accennate, in luogo d'indurre disperazione, doveano destare speranza, che, moltiplicandole, si potesse giugnere a pigliar un filo essenziale conducitore ad ecumenica regola.

§. II. Tal fu in Scipione Ferro, o dal Ferro, il successo. Questo italiano nato in Bologna, ed ivi, allo scriver dell' Alidosi, dal 1496 al 1526 maestro di matematica gode il vanto di essersi il primo innoltrato con regola all'analisi di equazioni di 3.° grado, sciogliendo il caso $x^3+px=q$: regola della quale comunicò la pratica ad un suo scolare Antonio Maria Fiore, o del Fiore. Qui finisce tosto la storia dell'invenzione di Scipione del Ferro, ignota affatto rimanendo la via da lui tenuta. Ma bastano la spontanea indagine, ed il felice riuscimento a discoprircelo un genio investigatore, e promotor della scienza.

§. III. Storia per lo contrario ben lunga ci si presenta di Tartaglia tratto all'investigazione per provoche. Ne fu il Fiore il primo a provocarvelo, nè il caso da Scipione già sciolto il primo allo scioglimento del quale fu provocato. Le disfide tutte, le contese, e le amarezze, che a soffrir ebbe in questo ed in altri propositi aritmetici, geometrici, ed algebraici, son da lui stesso raccontate nel libro IX de' quesiti, riportando le lettere scrittegli, e le sue risposte. Io fedelmente dalle une, e dalle altre raccorrò quanto alla presente materia si appartiene, citando mano mano i luoghi, onde a colpa mia non si volgano le incoerenze, che nel decorso dell'esposizione si presenteranno, ed il leggitor aver possa di leggieri la soddisfazion del riscontro. Narra dunque primieramente il Tartaglia nella storia del quesito XIV, che certo Maestro Zuanne de Tonini da Coi, dal Cardano detto anche Colle, e Colla, bresciano, e tenente in Brescia scuola di Aritmetica, mandogli l'anno 1530 di là a Verona, suo allor soggiorno, i due quesiti:

1.° *Trovatime un numero il qual moltiplicato per la sua radice più 3 faccia 5.*

2.° *Trovatime tre numeri il secondo de' quali sia 2 più del primo, ed il terzo 2 più del secondo, e che moltiplicato il primo nel secondo, ed il prodotto nel terzo faccia* 1000.
Il 1.° importa l'equazione $x^3 + 3x^2 = 5$, il 2.° l'equazione $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$.

Tartaglia dopo aver al suo compatriota M. Zuanne rimbrottato la vanità, e l'ardire di volersi acquistar grido, non con il sapere, ma con propor quistioni, cui egli stesso non sapea certamente con generali regole sciogliere, soggiugne essere persuaso di aver trovato regola generale a scioglier la prima, cioè un'equazione qualunque, quale $x^3 + 3x^2 = 5$, ma per più motivi volerla per allora tener nascosta; indarno aver tentato di ritrovar regola generale per la seconda, cioè per lo scioglimento delle equazioni quale $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$, ma esser nondimeno lungi dall' inferire che sia impossibile. Nella storia del quesito XXV aggiugne, che il giorno dopo l'invenzione dello scioglimento generale delle equazioni della forma $x^3 + mx^2 = n$, trovò quello delle equazioni della forma $x^3 + n = mx^2$, *perchè l'uno tira l'altro*.

§. IV. Antonio Maria del Fiore altero della regola dal suo maestro insegnatagli per risolver l'equazione $x^3 + px = q$, menava fasto, e vantavasi, che ei era quegli in grado di umiliare il Tartaglia per sua abilità in scioglier problemi tanto decantato, e per tanti trionfi superbo. Tartaglia, che non conosceva nel Fiore fuorchè un aritmetico pratico, del tutto privo di quella scienza specolativa, che per l'invenzione della vantata regola richiedevasi, la credette su le prime una falsissima millantería; ma inteso poi, che il del Fiore stesso confessava, che un gran maestro appunto specolatore da trent'anni insegnata gliel' avea, prese timore che il vanto fosse vero, e per non trovarsi al pericolo di figurar male, pose ogni studio, cura, ed arte ad investigarla con sollecitudine da sè. E buona sorte fu per lui, che vi riuscì a trovarla il giorno 12 Febbrajo del 1535, giorni 10 avanti, che entrasse a tenzone con il Fiore recatosi a bella posta a Venezia ad intimargli solenne sfida. Nè solo conseguì fortunatamente il Tartaglia di apparecchiarsi contro le armi del Fiore scoprendo la regola di scioglier l'equazione $x^3 + px = q$; che di più da questa scoperta tirando subito il giorno dopo la regola per risolver l'equazione $x^3 = px + q$, con questa e con quelle per $x^3 + mx^2 = n$, $x^3 + n = mx^2$ si trovò fornito di armi all' avversario ignote del tutto. Il giorno 22 Febbrajo dell'accennato anno 1535 si aprì il combattimento. Convennero di proporsi l'uno all'altro in foglj con bolla in mano del pubblico Notajo M. Jacomo Zambelli deposti 30 quesiti, assegnando a termine dello scioglimento lo spazio di 40 giorni o 50, sì che colui, che entro tal confine di tempo maggior numero di quesiti dell'altro sciogliesse, oltre al guadagnar per ciascheduno un tanto della somma, non si sa quale, per uguali sborsi formata, e parimenti depositata, egli di vincitore riportasse la gloria. Li quesiti del Fiore conducevano tutti all'equazione $x^3 + px = q$, e perciò nel breve tratto di due ore furono tutti dal Tartaglia sciolti: se ne trova la schiera sotto il quesito XXXI; ma è inutile il riferirli. Tartaglia *per mostrarsi universale* propose i suoi quesiti tutti varj, sì in geometria, che in aritmetica, e per dichiarare al rivale, che non lo stimava punto, nè lo temeva in verun conto, alcuni in algebra comune. Di niuno mai potè dal Fiore avere la soluzione, sebben egli le vantasse di tutti, e richiedesse, che alcuni suoi amici eletti fossero a giudicarne la bontà; per il che stesso, al dire, e con ragion, del Tartaglia, da sè condannandosi e venendo dal pubblico giudicio condannato qual perdente, pure volle il Tartaglia stesso fargli pubblicamente un presente del prezzo giuocato, contento egli dell'onore della vittoria.

§. V. Divulgata di tal algebraica tenzone, e del trionfo del Tartaglia la novella, curioso quel Zuanne de Tonini da Coi di sapere i 30 quesiti dal Tartaglia proposti si reca da

Brescia a Venezia, ed il giorno 10 Dicembre 1536 al Tartaglia presentasi con calde preghiere per averli. Si scusa il Tartaglia di non essere in grado di appagare per intero le brame di lui a cagion di averli, siccome in mente venuti gli erano, gettati sul foglio, e subito al Notajo portati senza conservarne copia. Pure rinnovandogli quegli le istanze, e le suppliche, che almeno volesse dargliene tre, o quattro, scossa e ridestata la memoria gli detta i seguenti:

1.° *Trovatemi una quantità, che sia irrationale, e che moltiplicata fia la sua radice più* 40 *faccia numero rationale, e discreto.*

2.° *Trovatemi una quantità, che sia irrationale, la qual moltiplicata fia* 30 *men la radice di detta quantità faccia il numero rational, e discreto.*

3.° *Trovatemi una quantità qual giunta con il quadruplo della sua radice cuba faccia tredese.*

4.° *Trovatemi una quantità, che sottrattene tre delle sue radice cube resti dieci.*

Se nel problema 1.° chiamato n il numero razionale, e discreto lasciato ad arbitrio, si prenda y per la quantità cercata, l'equazion immediata del problema è $y(\sqrt{y}+40)=n$, e generalmente $y(\sqrt{y}+m)=n$, che togliendo i radicali produce $y^3=n^2-2mny+m^2y^2$. Ma se a quantità cercata si pigli x^2, si ha subitamente l'equazion semplice $x^3+mx^2=n$.

Similmente nel 2.° problema posta la quantità cercata $=y$, ed in luogo di 30 preso in generale m, risulta $m^2y^2-2mny+n^2=y^3$; ma posta la quantità cercata $=x^2$, ne proviene $m^2x^2=x^3+n$.

Nel problema 3.° tratti al generale sotto le specie m, n i numeri 4, 13, se a quantità cercata si assume y si cade nell'equazione $m^2 y = n^3 - 3 n^2 y + 3 n y^2 - y^3$; e se in vece assumasi per quantità cercata x^3, si ottiene $x^3 + m x = n$.

Il problema 4.°, usando per espressione della quantità cercata y, conduce all'equazione $y^3 - 3 n y^2 + 3 n^2 y - n^3 = m^2 y$; e adoperando x^3, porge a dirittura $x^3 = m x + n$.

Zuanne de Tonini da Coi, considerati un poco i quesiti da Tartaglia dettatigli, a lui disse di accorgersi, che il 1.° spettava l'uguagliamento di cubo e censo a numero, il 2.° quello di censo a cubo e numero, il 3.° quello di cubo e cosa a numero, il 4.° quello di cubo a cosa e numero. Questa pronta penetrazione fa non poco onore a Zuanne de Tonini da Coi, e mostra quanto fosse esercitato nell'arte di esprimere il problema nella maniera più spedita, e con l'equazione più semplice. È naturale, che, portandosi egli via contento i quattro quesiti, adoperasse ogni studio, e sforzo di sua mente per trovarne lo scioglimento; ma ogni tortura di suo ingegno gli riuscì vana; onde ritornando il giorno 15 da Tartaglia non arrossì di supplicarlo a dargli la risoluzione di uno almeno. Rispose il Tartaglia dapprima, che essendogli la scoperta costata molta fatica, non credevasi in dovere di comunicarla sì facilmente, senza che onor gliene riuscisse, ed utilità; che riconoscea per altra parte non esser lecito voler tenere tali invenzioni totalmente sepolte, ma che sua intenzione era, come spedito si fosse da altri incominciati lavori, di pubblicarle ad ogni uomo. Indi, perchè quegli non pensasse apprezzarsi da lui più del dovere li proprj ritrovati, gli esibì che proponesse ad esso de' quesiti, obbligandosi per cadauno, cui non avesse saputo sciogliere, a barattare capo a capo, sebben fosse grande discapito offerire regola generale per soluzione particolare. M. Zuanne due gliene propose da lui stimati *belli e forti*; ma rispondendogli franco il Tartaglia, che glieli avrebbe dati sciolti in tempo d'un'ora, lasciato il garrire, ed abbandonate le reciproche condizioni, si volse il de Tonini da Coi alle preghiere, agli scongiuri, da' quali finalmente vinto, si piegò il Tartaglia a compiacerlo, dandogli la soluzione del primo quesito con prendere l'arbitrario numero razionale, e discreto $n = 2888$. Dissegli pertanto essere la cercata quantità irrazionale $x^2 = 78 - \sqrt{308}$, $x = -1 + \sqrt{77}$; e di fatto sostituendo nell'equazione $x^3 + 40x^2 = 2888$, si ha $(78 - \sqrt{308})(-1 + \sqrt{77} + 40) = (78 - 2\sqrt{77})(39 + \sqrt{77}) = 3042 - 2.77 = 3042 - 154 = 2888$. Gli aprì eziandio le ragioni, per le quali al del Fiore avea così indeterminato proposto il quesito, con lasciare ad arbitrio il numero razionale e discreto: la prima delle quali era stata il poter più facilmente convincerlo di sua scienza intorno la regola di sciogliere tale equazione, un numero sciegliendo che importasse per x un Reciso semplice, agevole a maneggiarsi; la seconda l'occultar meglio all'avversario essa regola generale. Con la ottenuta soluzione, e con tali lumi nell'animo ripartì M. Zuanne pago e giulivo per Brescia; e là studiando, meditando, operando giunse a discoprire la cagione dello scioglimento, e formar una regola. Ed eccolo esultante con lettera del dì 8 Gennajo 1537 scriverne al Tartaglia. La lettera è da questo riportata nella storia del quesito XXVIII, e la regola, che Zuanne de Tonini da Coi vi espone, è in nostro stile, di prendere

$$x^2 = 2m - 2 - \sqrt{4(2m - 2 - 1)}.$$

A conferma reca un altro esempio nell'equazione $x^2(x+8) = n$, che dice verificarsi prendendo $x^2 = 14 - \sqrt{52} = 14 - 2\sqrt{13}$, $x = -1 + \sqrt{13}$, posto $n = 72$, e così è realmente. Ed è altresì vero ciò che soggiugne, che preso $x^2 = 14 + \sqrt{52}$, onde $x = 1 + \sqrt{13}$, si verifica $x^3 + 72 = 8x^2$.

Siccome nella regola non entra n, così è chiaro dover il suo valore esser dipendente da quello di m, ed in esso inchiuso. Per la formola da me stabilita pag. 250 Vol. I si ha $\sqrt{\left(2m - 2 \mp \sqrt{4(2m-3)}\right)} = \mp 1 + \sqrt{(2m-3)}$. Sostituendo i valori di $x^2 = 2m - 2 \mp 2\sqrt{(2m-3)}$, $x = \mp 1 + \sqrt{(2m-3)}$ nell'equazione $x^2(x \pm m) = n$, ne proviene $(2m - 2 \mp 2\sqrt{(2m-3)})(\mp 1 + \sqrt{(2m-3)} \pm m) = n$, che riducesi a $\pm 2m^2 \mp 8m \pm 8 = n$, e serve a determinar n di maniera, che l'equazione $x^3 \pm mx^2 = n$ ammetta $x = \pm 1 + \sqrt{(2m-3)}$, cioè questa forma di radice avrà luogo, se l'equazion sia $x^3 \pm mx^2 = \pm 2m^2 \mp 8m \pm 8$. Convien dire che Tartaglia all'anno 1539 scordato si fosse dell'esempio da M. Zuanne recato di $x^2 = 14 + \sqrt{52}$, od $x = 1 + \sqrt{13}$ soddisfacente ad $x^3 + 72 = 8x^2$, allorchè nella storia del quesito XXXI scrisse *per la solutione datagli lui vi trovò una certa regola da solvere tutti simili casi, e però più non mi fidaria a proporli sotto tal forma* (lasciando cioè ad arbitrio n), *ma tal sua regola non serve salvo in quelli numeri over solutioni, che se risolveno in un residuo*: $x = 1 + \sqrt{13}$ è un binomio, non un residuo. Quelle parole *una certa regola da solvere tutti simili casi* starebber poco bene insieme, intendendo sotto la voce *certa* una limitazione. Nella storia del quesito XXXI dice Tartaglia su lo stesso proposito, che il de Tonini da Coi per la soluzione comunicatagli *trovò una regola particolare sopra simili quesiti*. Ma il senso di particolare si è egli quello di specifica, o quello di limitata? Il fatto vero si è che la regola di M. Zuanne è capace di estensione ben maggiore, ed altrettanto rimanea per sè lontana dalla generalità. Nella equazion $x^3 + m x^2 = n$, intendendo per m, n due quantità qualunque, positive, o negative, si sostituisca in luogo di x la formola indeterminata $a \pm \sqrt{b}$, si avrà $a^3 \pm 3 a^2 \sqrt{b} + 3 a b \pm b \sqrt{b} + m (a^2 \pm 2 a \sqrt{b} + b) = n$, onde dividendo l'equazione in due, con paragonare razionali a razionali, ed irrazionali ad irrazionali, si trova $a^3 + m a^2 + 3 a b + m b = n$; $\pm 3 a^2 \pm 2 m a \pm b = 0$, e quindi $m = - \frac{3 a^2 + b}{2 a}$, per lo che imparasi, che l'equazione

$$x^3 - \frac{3 a^2 + b}{2 a} x^2 = - \frac{1}{2} a^3 + a b - \frac{1}{2} . \frac{b^2}{a}, \text{ ossia}$$

$$x^3 - \left(\frac{3}{2} a + \frac{b}{2a} \right) x^2 = - \frac{1}{2a} (a^2 - b)^2$$

ha per radici $x = a \pm \sqrt{b}$.

Del rimanente, sebbene questa regola porti seco un qualche lume su l'equazione $x^3 + m x^2 = n$, il piantarla però non è propriamente uno sciogliere essa equazione; egli è a rovescio un comporla, e soltanto in modo particolare, poichè, in luogo di investigare, dati m, n, la forma ed il valore di x, supposta per lo contrario la forma di x si determinan le espressioni di m, n, e si stabilisce fra loro una particolar relazione. Ciò non obbiettando Tartaglia su la regola di M. Zuanne de Tonini da Coi, mi si presenta ragione di dubitare, che egli pure sino allora riguardo alle equazioni della forma $x^3 + m x^2 = n$, altra regola non avesse, che simile a quella da colui ricavata su l'esempio della soluzione ch'ei comunicata gli avea, solamente forse più estesa, e se si vuole a tutta quella generalità, alla quale io qui l'ho recata. Mi conferma nell'opinione la diffidenza, che Tartaglia conceputa avea, che proponendo in forma indeterminata i quesiti ad essa equazion relativi, facilmente se ne trovassero le soluzioni. Ma più di tutto mi fa forza, e trae a decisione il riflettere, che Tartaglia cominciò a versare su l'equazione $x^3 + m x^2 = n$, prima che su la $x^3 + p x^2 = n$, e senza di questa persuadevasi di aver di quella scoperto lo scioglimento.

Debbo ritornare alla lettera di M. Zuanne de Tonini da Coi. Dalla esultanza, e dal fasto trascorse egli nel progresso della medesima all'insolenza, rampognando aspramente Tartaglia di somma scortesìa per aver a lui, di aritmetica professore, negata, non che la regola, ma una soluzione ben anche particolare rispetto le equazioni $x^3 + m x = n$, $x^3 + n = m x$; ponendo a vile le sue soluzioni dei 30 quesiti del Fiore, sino a dire che premio assai grasso sarebbe stato quello di soldi cinque per ciascheduno; tacciando di uno spregevole ed inutile rifar il già fatto la sua invenzione, come sarebbe quella, parità strana, e a suo dispetto onorifica! di colui, che da sè inventasse la geometría di Euclide. Impertinenza sì fatta era una via ben sinistra a guadagnar Tartaglia, e rendersela generoso delle cose sue. Prese questi il partito di non curar la lettera; ma instando quegli con altra del 17 Febbrajo stimò di non dover più tacere, e lasciare senza rintuzzamento, e senza pena tracotanza sì eccessiva, e gli rendette pan per focaccia, terminando con dichiarargli, che non avrebbe più risposto ad alcuna sua proposta sinchè non fosse, giusta sua promessa, ritornato personalmente a Venezia; e così fu rotto tra il Tartaglia, e M. Zuanne de Tonini da Coi ogni matematico carteggio. Montucla chiamando questo, come il Cardano talvolta, Colla, l'onora del titolo di *una specie di avventuriere*, che prendeasi diletto d'imbarazzare i matematici con de' quesiti strani e capziosi. Non è in qualità di avventuriere, che ce lo dipigne Tartaglia, ma sì di maestro di

Aritmetica in Brescia sua patria, ed in qualche quesito loda la di lui perizia, e destrezza nel calcolo. E Cardano riferisce, che essendosi portato a Milano avea formata una scuola di 60 scolari, e che egli stesso avea conceputo disegno di rinunciargli una sua lettura, e ad eseguimento posto lo avrebbe se non avesse seco lui usato ingratamente. Non saprei se il trovarlo appunto ora maestro in Brescia, ora in Milano sia stato il motivo, per cui Montucla si è indotto a considerarlo quale un avventuriere. Ma per tal motivo, se valesse, avrebbesi a denominare un avventuriere anche Tartaglia, che lesse e in Brescia, e in Verona, e in Venezia; un avventuriere ancor più Frate Luca lettore per brevi corsi d'anni in Perugia, Venezia, Zara, Roma, Napoli, Milano, Pisa ed in talune di queste città per due, e tre volte alternamente; un avventuriere ad ugual modo, e grado il Pelacani, detto Biagio da Parma, lettore similmente a pochi anni, ed iterati ritorni a Bologna, Pavia, Parigi, Piacenza. Montucla, a quel che pare, non pose mente al costume dei matematici in quel tempo di trasferirsi da luogo a luogo a dar prove della vaglia loro, e diffondere la scienza, esponendosi a spiegare nelle Chiese i libri più difficili di Euclide, a sciogliere quesiti, a dettar lezioni; e le città destate a curiosità, o vero desiderio di addottrinamento chiamavano, e per un dato tempo a stipendio conduceano quelli, de' quali più alto, e più chiaro risuonava il grido.

§. VI. Caddero nella dimenticanza le molestie a Tartaglia recate da M. Zuanne de Tonini da Coi, ma restaron appresso gli analisti celebri la supplica, la promessa, e la violazion di Cardano. Disonorevol sì certo n'è per lui la memoria, e non può che divenirla vie più con la distinta ed esatta storia del fatto; ma io non debbo mancare al mio istituto. Stava Cardano in pubblicare un'opera in pratica di Aritmetica, e Geometría, ed in Algebra, quando trasferitosi Zuanne de Tonini da Coi da Brescia a Milano con aggiugnere alla fama della solenne tenzone tra il del Fiore ed il Tartaglia notizie più chiare dei ritrovati di questo, accese nell'animo del milanese matematico la voglia di appararli, ed arricchirne la stessa opera sua. Divisò di unire alla preghiera l'arte, e commise a certo Zuan Antonio da Bassano librajo di recarsi a nome suo da Tartaglia, e pregarlo in primo luogo di dargli la sua regola per risolver l'equazione di cubo e cosa uguale a numero, cioè $x^3+px=q$, con l'esibizione di porla sotto suo nome a pubblica luce, inserendola in quell'opera, se così piacevagli, e con promessa di tenerla segreta, se tal era suo volere; in secondo luogo di prendersi la pena di sciogliergli li 7 quesiti, che a lui presentava, ed erano

1.° *Partimi* 10 *in quattro continue parti proportionale, che la prima sia* 2.

2.° *Partimi* 10 *in quattro continue parti proportionale, che la seconda sia* 2.

3.° *Trovatimi* 4 *numeri continui proportionale, che il primo sia* 2, *il secondo e quarto giunti insieme facciano* 10.

4.° *Trovatime* 4 *numeri continui proportionale, che il primo sia* 2, *il terzo e quarto giunti insieme facciano* 10.

5.° *Trovatime* 6 *quantità continue proportionale, che la seconda sia* 2, *la prima e quarta giunte insieme facciano* 10.

6.° *Fatime de* 10 *tre parti continue proportionale, che moltiplicata la prima nella seconda faccia* 8.

7.° *Trovatime uno numero, che moltiplicato nella sua radice più* 3 *faccia* 21.

Le equazioni di questi sette problemi sono ordinatamente

1.ª $2+2x+2x^2+2x^3=10$. 2.ª $2+2x+2x^2+2x^3=10x$.

3.ª $2x+2x^3=10$. 4.ª $2x^2+2x^3=10$.

5.ª $2+2x^3=10x$. 6.ª $x^4+8x^2+8^2=10x^3$.

7.ª $x^3+3x^2=21$.

Quanto alla regola di scioglimento dell'equazione $x^3+px=q$ negò Tartaglia assolutamente di volersi a qualunque condizione indurre a concederla, ripetendo le ragioni, e li divisamenti suoi, che a Zuanne de Tonini da Coi già dichiarati aveva. Rispetto ai sette quesiti non valse a contenersi dal dire, che vi ravvisava il dettato del medesimo M. Zuanne; che il Cardano non avea sicuramente modo a scioglierli; poichè se ignorava lo scioglimento dell'equazione $x^3+px=q$, e da lui mendicavalo, a più forte ragione ignorar dovea gli scioglimenti delle equazioni *molto più strane*, cioè di termini più alti, ed in numero maggiore composte, alle quali per la massima parte conduceano quei sette quesiti; che il chiedergli tali scioglimenti era un'arte per strappargli di mano un qualche filo, con cui montar alle regole. Non si seppe che replicar il librajo, fuorchè encomj, e magnificamenti di sua Eccellentia Cardano, e per impetrargli qualche cosa, e non essere andato indarno, supplicò Tartaglia a dargli almen copia dei 30 quesiti del Fiore a lui, e dei 30 suoi al Fiore; e lo compiacque il Tartaglia riguardo ai primi, mandandolo a cercare i secondi dal Notajo per non serbarne egli in carta veruna, nè in mente chiara ed intera memoria. Furono dal librajo al Cardano riferite le espressioni del Tartaglia, e quanto più vere, tanto si avvisò di doverle accusare più false, e dolersi di essere più aggravato, ed ingiustamente offeso. Scrisse al Tartaglia, come nella storia del quesito XXXII si legge, con lo stile più risentito, altero ed acerbo; imputandogli anche, o dal librajo ingannato, o per formarsi qualche ragione, e color agli oltraggi un motivo, di aver detto ciò che detto non avea, cioè che tutte le sette sue quistioni erano sciolte sciolta una di esse, e sì ancora sciolta una di quelle di Antonmaria del Fiore, e sfidandolo su di tal proposito alla scommessa di scudi 100. Confidò poi forse, che per sì disdegnoso, intrepido e fiero tenore sbigottito il Tartaglia, valer potessero gli artificj prima caduti in vano per abbagliarlo; ed a farsi creder abile a risolver strani, e difficili problemi, e trarlo insieme a svelargli qualche orma de' suoi ritrovati mandò a lui due altre quistioni, vantando, che al messo in separate carte, di sigillo munite, affidate avea le soluzioni, ma con ordine di non consegnarle a lui che di mano in mano, che egli consegnate gli avrebbe le sue, o confessato di essere incapace a scioglierle. Le due quistioni erano

1.ª *Feme de* 10 *quattro parti continue proportionale, che li loro quadrati insieme giunti facciano* 60: *una simile pone Frate Luca, ma non solve*.

2.ª *Due fecero compagnia, e posseno non so quanti ducati, e guadagnorno il cubo della decima parte del suo capitale, e se havessero guadagnato* 3 *meno di quello che guadagnorno haveriano guadagnato tanto quanto fu il suo capitale apunto Se domanda il suo capital e guadagno*.

Nel caso, che di queste non avesse saputo trovar lo scioglimento, gli chiese, che in contraccambio delle due soluzioni che ricevute avrebbe, gli spedisse la soluzione di alcuna delle prime sette; e lo pressò in oltre di inviargli le 30 sue proposte ad Antonmaria Fiore, ritenendosi le sue risoluzioni, giacchè era così *carestioso*: dal che apparisce, che o il librajo non avea voluto prendersi la cura di andare dal Notajo a trascriverle, od il Notajo non gli avea ciò conceduto. Tartaglia data franca mentita risguardo a ciò, che non avendo egli detto, falsamente gli venía posto sul labbro, si tenne fermo, costante, e saldo nelle sue asserzioni, massime in quella, che Cardano non sapea sciogliere quei sette quesiti, offerendosi pronto a deporre a scommessa su di ciò gli scudi cento, e volare lui a Milano a questo oggetto, se non volea egli recarsi a Venezia. Sciolse la prima delle due quistioni, e niente doveva essergli più facile, essendo falsissimo, come in più opportuno luogo dimostrerò, che Frate Luca la ponga e non la solva, insegnando tutta la via per scioglierla, e solo commettendo sul fine un errore facile a rimediare, e del quale non può non avvedersi chi segue l'andamento del calcolo. Laonde ho qui ragione di maravigliarmi anche di Tartaglia, che in vece di rinfacciar ciò al Cardano impiega due pagine nel giro della soluzione per minuto, senza nominar Frate Luca. Schiettamente bensì gli rimbrottò di voler secolui giuocare a trappola o veramente al giuoco *della corrigiola come costumano li cingheni* nella seconda questione. Poichè conducendo essa all'uguagliamento di cubo a cosa, e numero cioè ad $x^3 = px + q$, era impossibile, e scommetteva ducati 10 contro uno esser falso, che al messo consegnata ne avesse la soluzione, come quegli che ignorava la regola per risolver l'equazione $x^3 + px = q$, *senza la quale egli stesso già mai haveria potuto investigar* quella dell'equazione $x^3 = px + q$. Soggiunse con ischerno relativamente all'iterata inchiesta della soluzione di qualchecduna delle prime sette quistioni, che se vero era, che in Milano molti ne avesser dottrina, e ch'ei la possedesse prima che M. Zuanne sapesse numerare fin a 10, come in sua lettera fastosamente gloriavasi, inutil tornava il riceverla da lui. Delle 30 quistioni da lui proposte al del Fiore gliene additò dieci, onde fu nel numero con il Cardano un po' più largo che con il de Tonini da Coi; ma altrettanto più ritenuto nell'esposizione di quelli, a' quali mirava il desiderio. Quattro geometriche qui non fanno. Una in algebra fu quella, anche nelle odierne scuole di Algebra stimata sì galante e sì applaudita, di una botte piena di vino puro, dalla quale di giorno in giorno si cavi una misura, dapprima di vino puro, poi di vino misto, rimettendo un' ugual misura di acqua: domandava il Tartaglia al del Fiore, posto che ciò si fosse fatto per 6 giorni, che il cavato e rimesso giornalmente fosse di 2 secchj, e che il vino nella botte ridotto fosse alla metà, qual era la tenuta della botte? L'equazione è $\frac{(x-2)^6}{x^5} = \frac{1}{2} x$, donde si trae $x = \frac{2}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{2}}}$. Confessa il Tartaglia, che tal quistione non era stata da lui escogitata, che anzi il del Fiore medesimo l'avea a lui prima sottomano proposta; ma che egli accresciuta aveala in difficoltà, il qual difficultamento consisteva in aver accresciuto il numero de' giorni da 3 a 6, con che si veniva ad esigere la estrazione della radice 6.ª di $\frac{1}{2}$, ed era una vera difficoltà in quei giorni, ne' quali vanto singolar di Tartaglia era la scienza di estrar qualunque radice. Ciò di passaggio, e solo per additare, occasione offertasi, l'autore e l'epoca di sì fatta quistione, la quale al nostro oggetto non appartiene, ugualmente, che altra, di trovare quantità, che moltiplicata per $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{1\frac{1}{2}}$ desse numero razionale e discreto. Furon quattro le quistioni in algebra spettanti a questo luogo: delle quali gli stese la prima in censo e cubo ugual a numero, cioè attinente ad $x^3 + mx^2 = n$, e fu la stessa prima dettata al de Tonini da Coi. Gli scrisse, che la seconda era stata in censo e numero uguale a cubo, in nostro stile $mx^2 + n = x^3$, ed avvertì che niuna gliene avea proposta in cubo e numero uguale a censi, che è quanto dire in $x^3 + n = mx^2$, perchè così all' improvviso non avea potuto trovar regola a tal capitolo o sia equazione. Al che apertamente contraddice la seconda dettata al medesimo Zuanne da Coi, che è appunto nella classe di $x^3 + n = mx^2$; e niente men vi contraddice l'asserito allo stesso de Tonini, che il giorno dopo l'invenzion della regola per l'equazione $x^3 + mx^2 = n$ ritrovò la regola per l'equazione $x^3 + n = mx^2$, *perchè l'una tira l'altra*. Il fatto è, che la formola generale pag. 105 da me stabilita $x^3 - \left(\frac{3}{2}a + \frac{b}{2a}\right)x^2 = -\frac{1}{2a}(a^2 - b)^2$ esibisce la forma $x^3 + mx^2 = n$, se a suppongasi quantità negativa, e porge la forma $x^3 + n = mx^2$, se a sia positiva, e non può in alcun modo produrre la forma $x^3 = mx^2 + n$, nè questa forma di equazione in guisa veruna ammette per radice la forma $a \pm \sqrt{b}$; onde le due equazioni affini nella forma di radice $a \pm \sqrt{b}$, e che conseguentemente tiransi l'una l'altra a sciogliersi, sono le due $x^3 + mx^2 = n$, $x^3 + n = mx^2$. Per la qual cosa è uopo conchiudere, che Tartaglia avesse le idee confuse nello scrivere a Cardano, ciò che su questo articolo scrisse. Intanto ciò, che rilevasi d'importante, si è, che sino allora afferrata non aveva l'arte a tutte e tre le forme $x^3 + mx^2 = n$, $x^3 + n = mx^2$, $x^3 = mx^2 + n$ comune, qual è di togliere il termine mx^2, e così avviarle allo scioglimento, con ridurle ad uguagliamenti di cubo cosa e numero. Nella sfera di questi accennò Tartaglia al Cardano, che stati erano i quesiti terzo e quarto al del Fiore proposti: il terzo in cosa e cubo ugual a numero, cioè $x^3+px=q$, del quale in quel punto non più ricordavasi; ma già veduto l'abbiamo a Zuanne de Tonini dettato; il quarto in cubo uguale a cose e numero, vale dire su la forma $x^3=px+q$, e soggiunse, che niuno proposto ne aveva riguardante la forma $x^3+q=px$, perchè così all'improvviso non avea potuto ritrovarne la regola; non tardò però guari a ritrovarla, essendo le forme $x^3=px+q$, $x^3+q=px$ *di natura* al suo parlare *quasi congiunte*: vedremo a suo luogo in qual senso. Rimaneano a compier la lista 20 quistioni; ma oltre le consuete scuse di ommessa copia e di memoria perduta addusse le angustie del tempo, e l'occupazione intensa d'animo, in cui trovavasi, a cagion del solenne impegno di cominciar la Domenica prossima nella Chiesa di San *Zuannepolo* l'esponimento della *Scienza de' pesi*, e delle sue invenzioni sopra i *tiri dell'artiglieria*: a conferma di che uno spedivagli dei cartelli di pubblico invito. Promisegli però, che, come di tal assunto sbrigato si fosse, ito sarebbe a cavar dal Notajo dell'intera lista delle sue 30 quistioni trascritto, e mandato gliel'avrebbe. Reca maraviglia l'indolenza di Tartaglia su di essa lista di sue 30 quistioni al del Fiore proposte, il non essersi in cinque anni mai, ad onta delle inchieste, risoluto di andare a levarne dal Notajo copia, posto vero che non ne avesse fatto sbozzo, il tenersi sempre in bisogno di ritornare alle medesime scuse; e per poco sta, che dalla maraviglia non si alzi il sospetto, che qualche mistero si nascondesse sotto, che forse nel gettar frettolosamente in carta, come in testa venute gli erano esse 30 quistioni, alcuna cosa sfuggita gli fosse, che all'occhio furatasi del mero pratico del Fiore potesse essere discoperta, ed a sua riprensione volta da un occhio più sottile e teorico. Contrastano tuttavía simil sospetto l'insinuare al librajo di girsene dal Notajo a pigliar trascrizion della lista, ed il promettere a Cardano di portarsi egli stesso a tempo libero a prenderla, e di mandargliela. Non erano però le quistioni propiamente, ma le soluzioni, le regole, che stavano a cuor di Cardano, e che egli volea. E avvedutosi, che Tartaglia non era l'uomo da vincer con le brusche, o da gabbar con le imposture, cangiò quinci tenore, e si volse agli artifizj di dolce seduzione. Indirizzogli il dì 19 Marzo 1539 una lettera, nella storia del quesito XXXIII riferita, tutta stima, tutta affetto, tutta lusinga, sin a coprire l'usata asprezza col pretesto di obbligarlo a rispondere, e di esercitar il pellegrino suo ingegno; respinse lungi le sfide, i depositi di denaro, i cimenti con il bel motto *di voler più presto vivere un poco poltrone, che morir valent'uomo*; venne a solleticarlo con più forza, ed a strignerlo, con dirgli di aver mostrate le cose di lui al marchese del Vasto, signor liberal, e magnanimo, e gran rimuneratore degli uomini virtuosi, che gli eran piaciute tanto, che innamorato si era di vederlo, di parlargli, che di comandamento suo scriveagli di recarsi a Milano senza fallo, senza indugio, e finì con esibirgli in propria casa alloggio, inculcandogli, per celar la sua intenzione, di portar seco il resto delle 30 quistioni. Tartaglia esitò un poco; ma all'aspetto del bene, che potea fruttargli la grazia del marchese, e del male che potea riuscirgliene, dispregiandola, cadde, e risolse di gire a Milano. Eccolo il giorno 23 Marzo colà giunto, eccolo in casa già del Cardano. Udiamo il dialogo loro quale dal Tartaglia vien riferito nella storia del quesito XXXIV.

Messer Hieronimo. *Ho molto accaro che uoi siati uenuto in questa che la excellentia del S. Marchese è caualcato per fina a Vegeuene, perche haueremo commodità di poterse godere et ragionare insieme delle cose nostre per fin che torni. Certamente uoi seti stato pur troppo discortese à non hauermi uoluto dare quella regola da uoi trovata sopra il capitolo di cosa, e cubo egual a numero, et massime hauendouene tanto pregato.*

Nicolo Tartaglia. *Io ue dirò, io non fazzo tanto il carestioso per il semplice capitolo, ne per le cose ritrouate per lui, ma per quelle, che per notitia di quello si possono ritrouare, perche egli è una chiaue che ne apre la uia à potere inuestigare infiniti altri capitoli, et se il non fusse che al presente son occupato nella tradutione di Euclide in uolgare (et per fin à quest'ora l'ho tradotto per fin al suo 13 libro) à molti altri capitoli haueria già trouato regola generale, ma spedito che habbia questa mia fatica di Euclide già principiata, ho disegnato di componere un'opera di pratica, et insieme con quella una nuoua Algebra, nella quale non solamente ho deliberato di publicare ad ogni huomo tutte le dette mie inuentioni de capitoli nuoui, ma molti altri che spero di ritrouare, et anchora uoglio mostrare la regola di potere inuestigarne infiniti altri, qual spero che la sarà una cosa utile, et bella, et questa è la causa, che me li fa negar ad ogniuno, perchè io al presente non ui pongo alcuna cura sopra di loro (per esser, come detto, occupato sopra Euclide) et insignandoli ad alcuno speculativo (come che è uostra eccellentia) facilmente potria con tal euidentia trouar altri capitoli (per esser facile lo aggiungere alle cose trouate) et publicarli come inuentore, il che facendo mi gua-*

steria ogni mio dissegno. Si che questa è la principal causa, che mi ha fatto esser tanto discortese con uostra eccellentia, et tanto piu facendo al presente imprimere quella sua opera in simil materia, et hauendomi ancor scritto di uoler dar fuori tai mie inuentioni sotto mio nome, et farmene inuentore. La qual cosa in effetto non mi piace in conto alcuno, perche tale mie inuentioni le uoglio publicare in opere mie, et non in opere de altra persona.

M. H. *E ue ho pur scritto ancora, che se uoi non ui contentai, che io ue la dia fuora, che io le retenirò secrete.*

N. *Basta, che in questa parte non ui ho uoluto credere.*

M. H. *Io ui giuro ad Sacra Dei Euangelia et da real gentil'huomo non solamente da non publicar giamai tale uostre inuentioni, se me le insignate. Ma anchora ui prometto, et impegno la fede mia da real Christiano da notarmele in zifera, accioche da poi la mia morte alcuno non le possa intendere. Se me il uoleti mo credetilo, se no lassatilo stare.*

N. *Non uolendo io prestar fede a tanti uostri giuramenti io meritaria certamente da esser giudicato huomo senza fede, ma perche ho deliberato di caualcare per fino a Vigeuene à ritrouar la eccellentia del S. Marchese, perche egli è hormai tre giorni, ch'io son qua, et me rincresse lo aspettare tanto, ritornato che sia, ui prometto dimostrarui il tutto.*

M. H. *Dapoiche haueti deliberato da uolere ad ogni modo caualcare per fina a Vegeuene dal S. Marchese, ui uoglio dar una lettera da dar a sua eccellentia, accio che quella sappia, che uoi seti, ma nanti che ue porteti, uo-*

glio che mi mostrati la regola di questi uostri capitoli, come che me haueti promesso.

N. *Io son contento, ma uoglio che sappiati, che per potermi aricordare in ogni mia improuisa occorrentia tal modo operatiuo, io l'ho redutto in uno capitolo in rima, perche se io non hauesse usato questa cautella, spesso me saria uscito di mente, et quantunque tal mio dire in rima non sia molto terso, non mi ho curato, perche mi basta che mi serua à ridurme in memoria tal regola ogni uolta, che io il dica, il qual capitolo ue lo uoglio scriuere de mia mano, accio che siati sicuro, che ui dia tal inuentione giusta, et buona.*

Quando che 'l cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouati dui altri differenti in esso

Dapoi terrai questo per consueto
Che 'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose netto

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale

In el secondo de cotesti atti;
Quando che 'l cubo restasse lui solo
Tu osseruerai quest'altri contratti,

Del numer farai due, tal part' à uolo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo;

Delle qual poi, per commun precetto,
Torrai li lati cubi insieme gionti,
Et cotal somma sarà il tuo concetto:

El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trouai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent' e quattro e trenta
Con fondamenti ben saldi e gagliardi
Nella città dal mar intorno centa.

Il qual capitolo parla tanto chiaro, che senz'altro esempio credo, che uostra Eccellentia intenderà il tutto.

M. H. *Come se lo intenderò, e l'ho quasi inteso per fino al presente, andati pur, che come sareti ritornato ue farò poi uedere se l'hauero inteso.*

N. *Hor uostra Eccellentia se aricordi mo a non mancar della promessa fede, perchè se per mala sorte quella me mancasse, cioè che me desse fuora questi capitoli, o sia in questa opera che fatti imprimere al presente, ouer in altra, anchor che quella li desse fora fatto mio nome, et che mi facesse il proprio inuentore, ui prometto et giuro di farne stampare immediate drio un'altra, la qual non ui sarà molto agrata.*

M. H. *Non ui dubitati, che quello, che ui ho promesso, ue lo attenderò, andati e stati sicuro, tolè dareti questa mia lettera al S. Marchese da mia parte.*

N. *Hor su me arricomando.*

M. H. *Andati in bon' hora.*

N. *Per la fede mia che non uoglio andare altramente a Vigeuene, anzi me uoglio voltare alla uolta di Venetia, uada la cosa come si uoglia.*

Voltò di fatto, e ritornossene a dirittura a Venezia. Strano cangiamento! E qual ne fu la causa? Il Cardano, scrivendogli in data del 9 Aprile, si vantò di saperla da coloro stessi, che consigliato l'aveano; ma Tartaglia, rispondendo, gli smentì l'infinta scienza, apertamente negando, che alcun gli avesse dato consiglio, e addusse per cagione la promessa, che a' suoi amici in Venezia fatta avea di là restituirsi per Pasqua, e che diriggendovisi immediatamente, e andando a staffetta avea avuto fatica a giugnervi il sabato santo. Il modo però della deliberazione significa tutt' altro, un animo cioè da improvviso riflesso colpito, disgustato, rovesciato: forse gli nacque in animo timore di far il viaggio a Vigevano indarno, non vi trovando il signor Marchese; o trovandovelo, di essere dalle sue buone grazie strascinato più oltre, cioè alla comunicazione delle dimostrazioni, ed al consenso del divulgamento di tutto. Ma lasciam ciò. Nella stessa lettera posta alla testa della storia del quesito XXXV dopo avere il Cardano rinovata la protesta, che gli farà conoscere di non essergli ingrato, umiliossi a confessargli, di non esser di tanto ingegno da aver potuto sino allora riuscire ad intender la regola per risolver l'equazione $x^3+px=q$, e discese a pregarlo per l'amicizia tra loro stretta, e che sperava eternamente durevole, a dispiegargliela con l'applicamento all'equazione $x^3+3x=10$. Ecco un bel punto per Tartaglia, e se è già pentito di aver consegnate le regole, non ha, per rimediarvi, che a lasciar Cardano nella sua oscurità. No: tutto all'opposto prende egli buonamente senza indugio a dichiarargliela, e pensando che siasi ingannato su quelle parole *al terzo cubo delle cose netto* con prendere il terzo del cubo delle cose, lo avverte doversi pigliar il cubo del terzo delle cose, cioè non $\frac{1}{3}p^3$, ma $\left(\frac{1}{3}p\right)^3=\frac{1}{27}p^3$; gli segna parte per parte l'applicazione della regola all'equazion propostagli $x^3+3x=10$, e gli porge il valor di x; e non contento di ciò gli presenta un altro esempio nell'equazione $x^3 + x = 11$. Era da aspettarsi, che dopo ciò Cardano profondesse a Tartaglia ringraziamenti ed encomj; e così fece nella sua lettera del 12 Maggio 1539, alla quale unì ad atto di riconoscenza, e testimonio di sua fede il volume già compito della sua opera, soggiugnendo però, che più che su di un libro, al quale poteasi sempre aggiugnere, dovea Tartaglia far punto di sua tranquillità e sicurezza la giurata di lui promessa, non essendo *mazor tradimento che a esser mancator di fede, et far dispiacere a chi a fatto appiacere*. Eppure non trascorse un mese che certo Maestro Maphio Povejano già discepolo di Tartaglia, e che stanziava in Bergamo, con lettera del 10 Luglio del medesimo anno 1539 rese consapevole Tartaglia stesso della notizia che un suo amico di Milano gli dava, che il medico Cardano componeva un'altra opera in Algebra sopra certi *capitoli* nuovamente ritrovati. Fu di grande fastidio a Tartaglia cotal novella, e pregò il discepolo a stare attento, e, se altro risaputo avesse, dargliene ragguaglio. Cardano intanto esercitandosi su le tre regole, in applicar la seconda spettante la forma $x^3 = p\,x + q$, all' equazione $x^3 = 9\,x + 10$ cadde nel caso dei radicali immaginarj proveniente da $\frac{1}{4}\,q^2 < \frac{1}{27}\,p^3$, essendo in effetto $\frac{1}{4}\,10^2 = 25 < \frac{1}{27}\,9^3 = 27$; ricorse perciò a Tartaglia supplicandolo a sciogliergli questo intrico, e mandargli ad un tempo il modo da lui stesso trovato di descrivere geometricamente un quadrato in un triangolo di lati diversi, confessando di essersi affaticato assai, ma senza potervi riuscire, su questo problema. Tartaglia agitato per la nuova dal Povejani scrittagli volle tentar questa volta, con ottenebrare il vero, ciò che prima ottener potea non esponendolo, di render a Cardano infruttuoso il possesso delle regole. *Da poi che vedo* (esprime così egli stesso il ripiego nell'animo concepito) *da poi che vedo, che va sospettando sopra la retta via della regola del capitolo di cose e numero egual a cubo, voglio tentare se gli potesse cambiare li dati che ha in mane, cioè removerlo di tal via retta, et farlo entrare in qualche altra, à benche credo non vi sarà meggio* (mezzo), *nondimeno il tentar non nuoce*. In tuono pertanto magistrale, e sentenzioso gli scrisse, che appresa non avea la buona strada, che anzi tutto il suo procedere era falso, e rispetto allo scioglimento del caso particolare dell'equazione $x^3 = 9x + 10$ si espresse che non voleva esser con lui liberale di più, rincrescendogli già di ciò, che dato gli aveva, per essere da persone degne di fede accertato che lavorava una nuova opera in Algebra, e millantavasi di aver trovati de' *capitoli* nuovi; conchiudendo con la intimazione, che se mancato gli avesse esso di parola, mancato non avrebbe egli a lui della protestata vendetta, anzi atteso gli avrebbe più di quel che gli avea minacciato. Poco accortamente operò Tartaglia in questo* sfogo; chè dovea infinger continuazion di fidanza, se voleva ingannar Cardano, ed imbarazzarlo. Benchè fallito ad ogni modo gli sarebbe andato l'intento, poichè non era Cardano un intelletto nel suo vedere sì superficiale, e mal sodo da potersi indurre in dubitazion di ciò che vedea per ciò che non vedeva, o per cagion di non veder tutto. Piccatosi in effetto altamente Cardano, che il tenesse per uomo da fargli smarrire la via, e da menare in errore a suo piacere, non soffrì ritegno, e prese con ardir a rimproverargli che fosse uscito per soverchio studio di cervello, e vaneggiasse, esibendo il deposito di scudi 100 contro 25 a scommessa, che giustamente avea penetrate le regole; negandogli, che avesse potuto udire ch'ei fosse per produrle in una nuova opera a pubblica luce; dichiarando che il suo pentimento non lo movea ad alcuna cosa contro la giurata fede. Non osò tuttavía Cardano di porsi con Tartaglia a confronto, ed inserì, *che se voleva mo dire esservi modo più generale di quello che insegnato* gli *avea, non contendeva* con lui. Tartaglia, veduto cader a voto il suo tentativo, si appigliò al partito di non dar più veruna risposta. Ecco con tutto ciò il dì 5 Gennajo 1540 Cardano a protestargli amore, e confidenza, quanto fratello, e raccontargli, che era ritornato a Milano Zuanne Colle, che costui godeva già cognizione delle regole per risolver ambedue le forme $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, e gloriavasi di averle insieme con un compagno a pena di studio, e forza di conghietture tratte dai lumi raccolti nelle di lui dispute con il del Fiore, che egli stesso avea ad arte promosse, e moltiplicate; che il medesimo sapeva estrarre la radice cuba da qualunque binomio e reciso di essa capace, e recavane esempj in $\sqrt[3]{(10+\sqrt{108})} = 1+\sqrt{3}$, e $\sqrt[3]{(-10+\sqrt{108})} = -1+\sqrt{3}$; che in possesso pur era dell'artificio di partire il 10 in tre parti continuamente proporzionali di tal condizione, che il prodotto della prima, e della seconda sia 8; e che in geometría parimenti avea dottrina di alte cose e singolari. E dopo tal racconto in aria di amoroso avviso, ecco invitarlo a porre, com'egli fatto avrebbe, studio a rinvenire e quella generale estrazione, e quel partimento del 10, e di più la soluzione di quest'altro problema, al quale il da Coi non dissimulava di aver suo ingegno inutilmente inteso, di assegnar tre quantità continue proporzionali, che la prima unitamente alla terza faccia 10, e la prima nella seconda moltiplicata faccia 7, con patto, che chi il primo in tali ricerche riuscisse, all'altro facesse parte dei ritrovati. Qualcheduno avrebbe concepito sospetto, che tutto ciò fosse un giuoco di Cardano per far credere divenuto già inutile il segreto, e così liberarsi dall'osservanza del giuramento. Tartaglia ebbe per ingenua tutta l'esposizione, e le grandi cose dal Cardano narrate per astute millanteríe del da Coi ad oggetto di impaurire Cardano, e guadagnarsi presso il comune di Milano sopra lui preferenza, mirando a rubargli la pubblica lettura di Aritmetica: laonde per essere lui stato credulo a tali baje, per non averne rilevata la falsità e l'incoerenza, e per l'ammirazion senza merito a taluna conceduta inferì che fosse molto più *tondo* di quello prima stimato lo aveva. Così Tartaglia nelle sue osservazioni alla citata lettera di Cardano nella storia del quesito XL soggiunte, le quali osservazioni però egli per sè ritenne stando nel proponimento di non voler più a Cardano rescrivere, nè più altro comunicargli. Del che avvisatosi Cardano, il corso delle lettere fra loro restò per ogni parte troncato.

§. VII. Alla serie delle lettere fra Cardano e Tartaglia, che fu dal 2 Gennajo 1539 al 5 Gennajo 1540, e che leggesi dalla storia del quesito XXXI sino a quella del XL, succede, e, la materia costituendo della storia del quesito XLII, pone fine al libro un dialogo tra Tartaglia e certo Ricardo Ventuorthe gentiluomo inglese l'anno 1541. Era questi stato suo scolaro, stretto lo si avea con vincolo di compare, e riconoscealo per suo grande benefattore, e destinato avealo mecenate al suo generale trattato di Aritmetica, Geometría ed Algebra; ma perciò appunto chiesegli di dispensarlo dal manifestargli le sue invenzioni riguardanti gli uguagliamenti composti di cosa o censo, e cubo, e numero, perchè l'anticipargliene la notizia sarebbe stato un degradare di pregio l'opera, che dedicar voleagli, di essa, e di altre molte, che per mezzo loro conseguire sperava, arricchita. Ristrignendo però il gentiluomo alle mere soluzioni di alcuni esempj le sue preghiere, non potè Tartaglia non arrendersi. E primieramente sul problema di trovare una quantità, che moltiplicata per la sua radice più un dato numero faccia un numero, gli diede sciolto il seguente esempio:

$$x^2(x+6)=x^3+6x^2=100 \ldots x=\sqrt[3]{(42+\sqrt{1700})}+\sqrt[3]{(42-\sqrt{1700})}-\tfrac{1}{3}.6.$$

Indi a maggior soddisfazione del gentiluomo, desiderando egli valori di x più facili da maneggiarsi, e sottomettere alla prova, gli porse questi altri tre:

$$x^3+9x^2=100 \;\ldots\ldots\; x=-2+\sqrt{24}$$
$$x^3+3x^2=2 \;\ldots\ldots\; x=-1+\sqrt{3}$$
$$x^3+7x^2=50 \;\ldots\ldots\; x=-1+\sqrt{11}.$$

E addimandandogliene il gentiluomo taluno su la forma $x^3+n=mx^2$, gli fece dono dei due

$$x^3+4=5x^2 \;\ldots\ldots\; x=2+\sqrt{8}$$
$$x^3+6=7x^2 \;\ldots\ldots\; x=3+\sqrt{15}.$$

Chiamandosi l'inglese signore pago, e credendosi a portata di tentar per mezzo di tali soluzioni di rinvenir da sè le regole, Tartaglia, quantunque di mirabile e profondo ingegno il dica, lo esortò a non mettersi a tal impresa, che sarebbe stata perdita di tempo, e inutile rompimento di testa, poichè sì fatte regole vogliono esser ricercate *speculativamente non con esperienze di numeri*, massime che tutte le equazioni di cotal sorta *ricevono due diverse risposte* (soluzioni) *e forsi più, onde seguita che habbiano, over ricevano due diverse regole, e forsi più, et l'una più difficoltosa dell'altra*. Suona una grande scoperta questo dir di Tartaglia. Lungi però da me l'esagerare a favor, ugualmente che a discapito, di chiunque, e il dar a qualunque cosa un prospetto al vero superiore, od inferiore. La scoperta di Tartaglia sarebbe d'insigne momento, e di alta lode per lui, se non venisse a deprimerla l'esempio, che egli stesso arreca nell'equazione $x^3+3x=14$. Osserva egli, che questa equazione si verifica patentemente per $x=2$, e nel tempo stesso dice dalla sua regola esibirsi $x=\sqrt[3]{(7+\sqrt{41})}-\sqrt[3]{(7-\sqrt{41})}$. Perdoniamo gli errori di calcolo a Tartaglia qui sfuggiti, e correggendoli poniamo, che egli abbia scritto, come doveva, $x=\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}+\sqrt[3]{(7-\sqrt{50})}$. A cagion delle due risultanze rispetto ad x, irrazionale l'una qual è questa, razionale l'altra quale è il 2, inferisce Tartaglia avervi nell'equazione $x^3+3x=14$ due radici, e lo stesso dover generalmente succedere nelle sei equazioni $x^3+px=q$, $x^3=px+q$, $x^3+q=px$, $x^3+mx^2=n$, $x^3=mx^2+n$, $x^3+n=mx^2$, ogni qual volta in esse cada radice razionale, perchè oltre questa vi avrà la irrazionale dalle sue regole esibita; anzi poter *per certi accidenti* avvenire, che le radici crescano a più di due; non aver gli antichi potuto rinvenire la irrazionale, che egli poi trovò, per aver eglino cercato esperimentalmente per via di numeri razionali *apostati*, cioè presi a loro posta, o piacimento; e per colpa di questo stesso singolar tentare non esser tampoco riusciti a scoprire la regola della radice razionale, che pur esser vi debbe. Benissimo quanto a questi ultimi riflessi. Ma quanto alla distinzione di $x=2$, e di $x=\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}+\sqrt[3]{(7-\sqrt{50})}$, se per la formola da me spiegata pagina 260 del volume I. si estraggano le radici cubiche, trovasi $\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}=1+\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{(7-\sqrt{50})}=1-\sqrt{2}$, onde

$\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}+\sqrt[3]{(7-\sqrt{50})}=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$: il che manifesta esser 2, e $\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})}+\sqrt[3]{(7-\sqrt{50})}$ non due radici diverse, ma due espressioni diverse della radice medesima, una razionale giusta sua natural forma, perchè esperimentalmente presa, l'altra irrazionale, e da ridursi, perchè investigata speculativamente. Si dèe ciò trasportare in genere al caso, che le sopra schierate sei equazioni fornite sieno di una radice razionale: la espression irrazionale somministrata dalle regole di Tartaglia darà in ultimo riducimento la stessa razional radice. Il pregio di tale espressione è di comprender sì il caso della irrazionale radice, e sì il caso della razionale, quello spiegatamente in forma propria, questo nascostamente in forma aliena. In fondo perciò di realità apparisce aver Tartaglia peccato contro il vero, e contro la virtù delle sue regole in valutar come diversa, e nel risultato loro non contenuta la razionale radice. E fa maraviglia che avvisato non siasene Tartaglia, non ignorando egli la maniera di estrarre le radici cubiche da' binomj e da' recisi, del che ne dà prova nelle osservazioni su la ultima lettera di Cardano, con effettuare le estrazioni dal de Tonini da Coi vantate $\sqrt[3]{(\pm 10+\sqrt{108})}$. Tutto pertanto il vero della scoperta di Tartaglia si limita al poter avere la razionale radice due regole, ond'esser ritrovata, e corrispondentemente due espressioni, una naturale, l'altra fuor di natura ed irrazionale. Anche questo fu un passo in analisi; ed eziandío una distinzione portata oltre i suoi limiti potè esser seme di distinzioni giuste. Di maggiore importanza, e gloria per Tartaglia è un altro tratto della sua esortazione, con cui ripete al gentiluomo Ventuorthe di dimettere il pensiero di cercar esperimentalmente le regole, e di aver pazienza sinchè egli gliele mandi *con li fondamenti loro dimostrativi, e prima del capitolo di cosa e cubo egual a numero con gli altri dui suoi compagni, dalle quali regole se cava le regole dimostrative de tutti gli altri, perchè tutte sono insieme concatenate, dico quelle de censo e cubo egual à numero et suoi compagni à quelle de cosa e cubo egual à numero, et suoi compagni come a luoco e tempo faro vedere*. Questo parlare ci presenta nel capo di Tartaglia un nuovo ordine d'idee, una nuova teoria: concatenate le regole disgiuntamente trovate; le equazioni di censo, cubo, e numero, che furon le prime ad esser a lui proposte, e da lui trattate divenute da quelle di cosa cubo e numero nella soluzion dipendenti. Ed attenzione pur richiede ciò, che Tartaglia narrò al medesimo gentiluomo, allorchè persuaso, ed arresosi ai consiglj di lui, tolse dalla complicazione, che involgono le equazioni di terzo grado, ad argomentare il *chaos* contenuto nelle equazioni di più alta dignità, con dargli lode che fosse egli arrivato sin dove era possibile. Gli narrò Tartaglia, che l'anno 1536 la notte di San Martino trovato avea modo di sciogliere le equazioni $x^6+fx^3=g$, $x^6=fx^3+g$, $x^6+g=fx^3$. Ho detto rispetto al vanto del ritrovato, volume I., capo VII., §. IV. Qui rifletter si dèe, che noi comunemente presupponiamo la soluzione di queste equazioni nel calcolo della soluzione di quelle di terzo grado; Tartaglia sin dai primi di Febbrajo del 1535 scoperto avea la regola solutrice delle equazioni di terzo grado, mesi 21 prima che pensasse a scioglier per la regola di quelle di 2.° codeste di 6.°.

§. VIII. Si appalesa dal nuovo sistema, in cui Tartaglia fra l'anno 1535 e l'anno 1541 legate avea le sue regole, che sebbene principalmente occupato in tradurre, e rassettar Euclide, ed in correggere, come anche dice nel principio del dialogo con il gentiluomo inglese, le figure ed altri errori fatti dagli scrittori e traduttori sopra Archimede siracusano, tuttavía non lasciava di tener di vista le equazioni di 3.° grado, e di quando in quando meditarvi sopra, e così di lontano apparecchiar il pieno trattato, che aveva in animo di pubblicar intorno ad esse. Ma con più intenso studio, ed assiduo vi si affaticava Cardano, facendosi prestare ajuto da un bravo suo scolaro, Lodovico Ferrari. Recata a tutta estensione l'arte di Tartaglia per risolver le equazioni di 3.° grado, scoperta una nuova arte per lo scioglimento di quelle di 4.°, conseguiti cento bei lumi spettanti la natura delle equazioni, tessute le regole e le cognizioni novelle in una teoría, all'anno 1545 diede Cardano in luce la sua *Arte magna*, con l'aggiunta del libro *De regula Aliza*, cioè della regola portante al caso irresolubile. Il sacro giuramento tante volte ripetuto fu rotto, il segreto, che in evento di inopinata di lui morte dovea restare in cifere inintelligibili, uscì in migliaja di stampati esemplari a notizia del mondo intero. Oltre la violata fede mancò Cardano verso Tartaglia in non essere interamentè giusto. Poichè non altra regola disse nel capo I di aver da lui a grandi preghi ottenuta che quella dell'equazione di cubo e cosa eguali a numero, cui primo di tutti sciolta avea Scipione Ferreo, quando per i versi sopra recati vien dimostrato, che ricevute pur aveva le altre due di cubo ugual a cose e numero, e di cubo e numero uguali a cose. *Scipio Ferreus bononiensis capitulum cubi et rerum numero aequalium invenit rem sane pulchram et admirabilem . . . . Hujus aemulatione Nicolaus Tertalea brixellensis amicus noster, cum in certamen cum illius discipulo Antonio Maria Flori do venisset, capitulum idem, ne vinceretur, invenit, qui mihi* *ipsum multi precibus exoratus tradidit*. Perchè tacere ciò, che Tartaglia avea trovato di più, che eragli singolare, e che ugualmente avea a lui dato? Forse che si riserbò a rendergliene la dovuta gloria nei particolari capi? No: neppur ombra in essi di cenno di Tartaglia, all'incontro nel capo xI, che è su l'uguagliamento di cubo e cose e numero ripete, e la invenzion trent'anni prima di Scipione Ferreo, e la disfida tra il di lui scolare del Fiore e Tartaglia, e la occasione, che quinci ebbe questi: *Ut inveneñt et ipse*, soggiugnendo, *qui cum nobis rogantibus tradidisset suppressa demonstratione, freti hoc auxilio demonstrationem quaesivimus, eamque in modos, quod difficillimum fuit, redactam subjiciemus*. Lasciamo per ora il sindacato di tanta vantata difficoltà della dimostrazione, saputa la regola. Il divulgamento contro sacrata fede delle proprie invenzioni, a sè serbando di produrle il contento e l'onore; la confessione di una terza parte solamente del segreto dono, e di quella, nella quale altri l'avea nell'invenzion prevenuto esser dovettero all'animo di Tartaglia due congiunti motivi di gran disgusto e collera. È naturale che riclamasse, che rinfacciasse al Cardano e la sacrilega infedeltà, e l'ingiustizia, e che a confronto di questi atti accusasse di mendace ed insultante quel titolo *amicus noster*. A qual grado però montasse l'adiramento di Tartaglia, e quale fosse il modo delle querele non abbiamo, nè presso di lui, nè presso il Cardano, tratto, che lo dimostri. Il Nugnez sul fine della sua Algebra, toccando le equazioni di terzo grado, condanna, e biasima Tartaglia di essersi riscaldato nell'affare a segno di mostrare d'avervi perduto il cervello. Ma codesto portoghese matematico, quanto vicino di tempo, tanto scrivea lontano di luogo; e Tartaglia era un di quegli uomini a' coetanei per superiorità e sincerità insieme incomodi, e tra la fama dei trionfi medesima notati o di sregolato ardore, o di mal talento. Quello, che sappiamo di certo, si è, che in seguito alla pubblicazione dell'*Arte magna* vi fu tra il Cardano, ed unitamente il suo discepolo Lodovico Ferrari per una parte, ed il Tartaglia per l'altra, dopo alcuni epistolari contrasti, una formale solenne disfida. Se prestiam fede al racconto, che Tartaglia ne inserisce nella Parte II, lib. II, c. VI, n. 7 del suo Generale Trattato, il Cardano, ed il Ferrari quelli si furono, che con impressi cartelli l'anno 1547 la mossero. La sfida fu di proporsi scambievolmente un numero di quisiti da doversi sciogliere nel termine di 15 giorni, così che tutte le soluzioni, che dopo di tal termine venisser fatte, si avessero a contare per nulla. Si credean forse i due rivali di Tartaglia di averlo spogliato di ogni arma segreta, togliendogli quella delle equazioni di terzo grado; ma s'ingannavano: due altre egli ne avea, quella del metodo generale per comporre una qualunque potenza, e per estrar reciprocamente qualunque radice in aritmetica; ed in geometría quella della sottilità di effettuare con qualsivoglia apertura di compasso dall'avversario data pressocchè tutti, 67 cioè di 75 dei problemi piani di Euclide, e molti altri più squisiti alle rette ed al cerchio non solo, ma eziandío alle sezioni coniche spettanti. Tartaglia fu pronto a mandare i suoi quisiti al numero di 31, alcuni sul primo genere, ben diecisette sul secondo, ed altri su altri generi, in particolare su la Geografia di Tolommeo. Stettero mutoli per due interi mesi il Cardano, ed il Ferrari, e dopo tale spazio di tempo non fecero che spedire a Tartaglia i 31 quesiti loro senza lo scioglimento pur di uno di quelli, che da Tartaglia aveano ricevuti. Questi all'incontro il giorno stesso, che gli pervennero li 31 quesiti con istudio tanto dai due nimici architettati, dieci ne sciolse, ne' seguenti due giorni altri cinque, e in capo a giorni sette 22, e subito, fatte imprimer le soluzioni, ne spedì loro per il corriere la stampa. Scorsero altri cinque mesi, e finalmente Cardano, e Ferrari corrisposero con una fastosa stampa delle soluzioni loro ai 31 quesiti di Tartaglia. Fra questi uno solo ve ne avea alle equazioni di terzo grado, delle quali vo al suo termin appressando la storia appartenente, ed era: Se per regola generale solubil fosse la equazione

$$27x^6 + 36x^4 + 54x^5 + 8x^3 = 1000;$$

ed, essendolo, quale fosse il valore di x? Basta estrar da una parte, e dall'altra la radice cuba per ottener tosto $3x^2 + 2x = 10$, onde la soluzion si riducea all'uso della prima delle regole, che Tartaglia stesso avea a Cardano insegnate. Questo pertanto Tartaglia pretese esser l'unico dei 31 quesiti giustamente sciolto dal Cardano, e dal Ferrari. Qual disonore, qual umiliazione per essi? A giudicare però imparzialmente, Tartaglia avea torto in disapprovare il metodo da lor tenuto per estrarre le radici prossime di 5.°, e di 7.° grado da' numeri, che non erano di tali gradi potenze; chè solo biasimar li potea di non aver più oltre spinta l'estrazione, come nella mia storia *dell'Aritmetica* ho dimostrato. Si slanciarono da ambi i lati con animosità le repliche, al solito senza nulla conchiudere. Ciò che le stampe non avean fatto, si pose, non so come, Tartaglia in animo speranza, che far potesse una disputa personale; ed al mese di Agosto dell'anno 1548 per *por fine al far cartelli, quali hormai fastidiauano gli huomini del mondo,* si recò a Milano. Ivi con pubblico cartello invitò Cardano, ed il

Ferrari a trovarsi il giorno 10 a ore 18 nella Chiesa di Santa Maria del Giardino de' Frati Zoccolanti; chè convinti gli avrebbe degli errori e difetti delle vantate lor soluzioni. Il Cardano si tolse d'impaccio con sottrarsi, cavalcando, da Milano. Comparve Lodovico Ferrari, il discepolo, cinto di numerosa comitiva di amici. Tartaglia non avea seco che un fratello idiota preso a compagno del viaggio. La zuffa incomincia; Tartaglia attacca, ma gli vengon troncate le prime parole, chè si pretende, che avanti in legali forme eletti sieno i giudici; Tartaglia ricusa costantemente, non conoscendo coloro, che si volean tali fuor che quali amici del Ferrari di lor corteggio altero entrato nella Chiesa. Due ore se ne vanno in litigiose strida su questo articolo. Finalmente concedesi, che Tartaglia assalga, confidando certamente che il Ferrari saprà ripararsi. Tartaglia si getta di botto su la soluzione da lui, e dal Cardano data ad un suo quesito intorno al capo ventesimoquinto della Geografia di Tolommeo, e sì con i raziocinj lo circuisce, lo inviluppa, lo strigne, che non ha scampo, ed obbligato trovasi egli il Ferrari a confessare d'aver esso ed il maestro suo errato. Vuole il Tartaglia passare alle altre sue impugnazioni, e moltiplicarsi le palme; ma un alto grido degli amici del Ferrari lo interrompe, che lasci mo al Ferrari il luogo di dire contro le soluzioni di lui. Non vale al Tartaglia l'insistere sul diritto di proseguire e compiere l'incominciata confutazione, e che Ferrari parlerà di poi quanto vorrà, sebben a difendersi non a sindacare invitato: il clamore di mille voci animate dalla tema di nuove sconfitte per il Ferrari lo soverchia e soffoca. Il Ferrari gli rimproccia di non aver esibita soluzione del quarto suo quesito sopra Vitruvio, e si espande in lungo discorso intorno ad esso, sinchè giugne l'ora tarda di cena. Tutti riputando già il Ferrari bastantemente reintegrato, colto il motivo, si partono, il tempio si vota; Tartaglia debbe girsene anch'esso con le apparecchiate censure in gola, con un ramo d'alloro sul capo, con una macchia di rossore su la faccia. Vorrebbe replicare la mischia; ma solo, senza appoggio, in mezzo ad una folla di amici del Ferrari si scorge in pericolo, paventa che gli avvenga di peggio, che in applaudir all'avversario, o per animarlo, gli si scaglj contro qualche scherno od insulto, delibera di abbandonare l'impresa e Milano, con animo di produrre con le stampe tutta intera la confutazione a viva voce impeditagli. Ma ritornato a Brescia un nuovo genere di travagli lo circonda e l'angustia. È già compiuto l'anno da che pressato dagli inviti a nome della città si trasferì con tutta la famiglia da Venezia a leggere in Brescia Euclide nelle Chiese successivamente di Sant'Affra, e di San Barnaba: chiede l'esibitogli stipendio di scudi centoventi d'oro. Puntiglio di un Deputato della città contro dell'altro per la scelta del luogo a suo, anzi che a comodo del comune dei cittadini, accusa di arbitrio contro l'agente dell'affare nelle offerte, e nei patti, incolpazion degli uditori di non aver contribuito, querela d'infedeltà nei riscuotitori. Tartaglia divenuto il giuoco delle dissensioni e dei livori, è rimbalzato da uno ad altro senza trovar chi lo paghi, e voglia impegnarsi a farlo pagare. La cosa va al foro, il matematico, l'ingenuo e semplice amator della verità è tra gli artefici de' cavilli, e de' raggiri; il litigio lo stanca; da lusinghiere promesse si lascia indurre a nuove lezioni, anche su la teorica de' pianeti; ma di nuovo è deluso. Disperato, spoglio di quanto in molti anni con fatica raccolto aveva, impaurito della prepotenza, e della peste, di cui si alza sospetto, ritogliesi alla patria, s'incammina a Venezia per riprendervi le sue fruttifere letture; ma cresciuto della peste in Brescia il timore vien arrestato con la famiglia a *Lucefossina*. Tali infortunj gli tolsero il tempo, la voglia, il modo di stampare le sue dimostrazioni contro i millantati scioglimenti del Cardano e del Ferrari. È da uomo saggio e virtuoso il sentimento, con cui chiude egli la narrazion sua, che *ogni cosa fu per il meglio; perchè* (dice egli) *se io havessi dato fuora tai mie reprobationi a quel tempo et in quella mia alteratione di animo, son certo che le mie ragioni sariano state malamente intese dagli intelligenti*. Forse il partir, che fece Tartaglia da Milano alla mutola, ed il non pubblicare, nè scrivere più nulla fu al Ferrari d'appiglio per menar trionfo, e al Cardano di dire nel capo XLV della propria Vita, che Tartaglia volle piuttosto averlo emolo e superiore che amico, e per beneficio attaccato: *maluit aemulum habere, et superiorem quam amicum et beneficio devinctum*. Ma non so poi come nel capo XLIII, schierando le testimonianze dei chiari uomini a suo favore, o a voce, o in libri, tra le seconde sotto il numero 66 collochi, che Tartaglia, dopo aver di lui detto male, fu in Milano costretto a cantar la palinodia. *Nicolaus Tartalea, qui, cum male dixisset, palinodiam Mediolani recinere cautus est*. Qual fu o potè esser codesto libro, o cartello anche solo, della palinodia di Tartaglia, stampato per lui in Milano, se il giorno dopo il conflitto con il Ferrari da quella città tacitamente furossi, e timoroso cambiò sin via, per altra che quella, per cui venuto era, restituendosi a Brescia? Del rimanente è cosa molto rimarchevole, che Cardano tocchi così leggiermente le sue triche con Tartaglia, e non ne faccia menzione veruna nei due capi, ne' quali era di proposito il parlarne, cioè nel capo delle dispute sostenute, ed in quello delle querele mossegli contro, e delle diffamazioni intentategli. La violazione della fede giurata a Tartaglia eragli di rossore, e nei due luoghi riferiti dell'*Arte magna* confessa le sue instanti preghiere, ma tace le sue sacre promesse.

§. IX. Massima esser dovrebbe di ogni scopritore, per la gloria sua, e per la pubblica utilità, di non tardare a svolgere, ed estendere bastantemente la scoperta, e quanto prima può in luce produrla: imperciocchè molti disastri possono in lunga dilazione venire ad opporsi al disegno, e privar lui dell'onore, ed i cultori della scienza del beneficio. Spesse volte anzi necessario si rende al proprio vanto il pubblicare della scoperta il primo germe. Poichè ordinariamente le scoperte sono apparecchiate nel tempo, vale dire che per le cognizioni via via aggiunte si è già condotta la stagione, nella quale quasi in lor primavera da fecondati semi debbono germogliare; ond'è che contemporaneamente sbucciano, e fioriscono nel capo di molti; e quindi le contese nel primato. Così io penso esser accaduto nell'invenzione del calcolo infinitesimale, così in fisica nella costruzion del termometro, e dei vetri acromatici, nella dimostrazion della teoria de' gravi, ed in altre cento meccaniche e specolative invenzioni: così in Anatomia riguardo ai sacchetti di elastico fluido ripieni, che per i canali semicircolari in bell'ordin disposti si son recentemente discoperti, e riconosciuti essenzialissimi, sebben per tante età ignorati, membri dell'organo dell'umano udito. Nelle cose specolative lo scopritore è in massimo pericolo di perdere la sua proprietà, qualora solennemente si sappia ciò, che gli riuscì di scoprire: gli emoli ingegni si aguzzano per arrivare dov' egli è pervenuto, e a forza di tentativi ritrovan la via di giugnervi. Peggio è, se a talun di lor comunichi un qualche raggio, come una soluzion particolare, ed è un dargli la face in mano, e voler che non vegga, l'insegnargli la regola, e sperar che arcana resti la dimostrazione. Per tutto ciò inavveduto io stimo il Tartaglia in continuare dopo la solenne pugna con il del Fiore i suoi rassettamenti di Euclide e di Archimede in luogo di tutto darsi a sviluppare la sua scoperta rispetto le sue equazioni di terzo grado, ad estenderla a tutti i casi, a tesserne e stamparne la teoría. Le inchieste fattegli doveano aggiugnergli stimolo, e renderlo più sollecito; ed almen, dopo la condiscendenza a svelar a Cardano le tre regole, al primo mormorio del nuovo lavoro di esso Cardano sopra equazioni novelle non doveva tardar un istante a produrre, come poteva meglio, i suoi ritrovati, le sue dimostrazioni, le sue viste, per mettersi presso il pubblico in possesso del nuovo fertil campo di cognizioni. Ma Tartaglia si fisse, e contro ogni spinta che dovette dargli l'amor proprio, tenne fitto in capo il disegno di formare un'algebra nuova, e di coronar di essa il General Trattato di numeri e misure, che divisato avea di comporre, per raccogliere in esso ordinatamente, ed immortali a' posteri tramandare tutte le sue aritmetiche, algebraiche, e geometriche invenzioni. Venne finalmente il tempo, in cui sì fatto general lavoro, interrotto, appena intrapreso, dalle dispute con il Cardano ed il Ferrari, e dalle sventure in Brescia, ma ripigliato con fervore di poi, incominciò a comparire, e fu l'anno 1556. Nella dedica all'inglese gentiluomo Ricardo Ventuorthe, giusta la promessa, che gliene aveva fatta, dice Tartaglia, che il gran desiderio avuto sempre di giovare altrui l'avea da due anni provocato sì, che con grandissima celerità proseguita avea la *gran manifattura*, temendo *essere altra volta da morte o da infermità, o da altro strano caso impedito e disturbato; talmente, che con l'ajuto di colui che il tutto regge l'avea ridutta a fine, ed in sei parti per la diversità de' soggetti divisa*. Con ciò è ben lungi, che concordi; chè anzi in massimo grado discorda ciò, che asserisce l'editore Curtio Trojano nella dedica della sesta, ed ultima parte al signor Girolamo Martinengo, essere stato il Tartaglia da morte rapito stando per compiere essa ultima parte, nella quale *amplissimamente dell'Algebra trattava*. Ma anche a questo suo dire, ed alla verità contraddice il buon editore soggiugnendo, che la morte però fu sì discreta *e pietosa di non toglierlo prima, che in diversi fragmenti e in certi memoriali scritta egli avesse tutta intorno a tal parte l'intenzione sua*; onde non restava che disporre e legare in continuo ragionamento le cose a tali carte raccomandate; il che per dotto matematico, dice l'editore, aver fatto adempire. Essa sesta parte ciononostante parola non offre su le equazioni di terzo grado; per la qual cosa, o quei frammenti da Tartaglia lasciati non comprendevano tutta la intenzion sua, o il matematico incaricato di unirli la deluse nel principale. Io non so assolverlo da colpa. Imperocchè supposto ben falso, non pur che Tartaglia ridotta avesse a fine, come asserisce, in tutte e sei le parti l'opera sua, ma eziandio, che della teoría delle equazioni di terzo grado destinata ad esser della sesta parte la gioja, segnati di proposito avesse i primi elementi, chi potrà però credere che tra le carte di Tartaglia non vi fossero intorno allo scioglimento di esse equazioni molti calcoli, molti riflessi, e tentativi? E, se non altro, dovea quel matematico ragunare, e congiungere, e articolar fra di loro il meglio possibile le soluzioni, e le regole sparse per il carteggio matematico di Tartaglia con il de Tonini da Coi, con il Cardano, e con Ricardo Ventvorth; chè composto di tal guisa un dottrinale, e di esso arricchita l'opera nella sua sesta parte, sarebbersi in qualche modo effettuate le brame dell'autore, e con qualche ragione l'editor avrebbe al mecenate vantato di dedicargli una parte *colma d'invenzioni*, laddove essa n'è vuota. Qualunque stata sia la cagione, per cui quel matematico non fece ciò che ho detto, la cosa è, che il disegno di Tartaglia andò interamente fallito: ritardò egli anni a pubblicar le sue invenzioni algebraiche per fregiarne il suo General Trattato, e questo di tal fregio restò scemo.

§. X. Ho tessuto una storia minuta e prolissa, ma le cose false dagli altri scrittori spacciate hanno renduta la minutezza e la prolissità necessaria. Le esporrò con succinte animadversioni; chè serviran esse insieme di epilogo della diffusa storia.

Wallis *Tractatu Historico-Practico de Algebra* capo XIII, pag. 67. *Hieronimus Cardanus an.* 1545. *tractatum edidit de Algebra cui nomen Ars magna, quam vulgo cossam vocant, seu regulas Algebrae*: confusione di tempi e di nomi. *Memoratque Mahometem filium Mosis arabem, ut hujus authorem, et Leonardum Pisauriensem (eundem credo cum Leonardo Pisano)* Pisanus di fatto non Pisauriensis leggesi tosto nella linea terza dell'*Arte magna*, *et Lucam Paciolum (alias Lucam de Burgo dictum)*. *Atque tum demum Scipionem Ferreum bononiensem, quem ait primum invenisse duas regulas pro solvendis quibusdam aequationibus cubicis*, non due ma una sola, *quas regulas Cardani vocant (utpote a*

Cardano primum editas, sed a Scipione Ferreo inventas). *Atque hanc primam accessionem Algebrae factam reputo, postquam eam ab Arabibus accepimus*. E non si aggiunse innanzi l'analisi delle equazioni proporzionali in genere, con altre analisi particolari? Vedi il capo VII del volume I di quest'opera. *Easdem refert Cardanus etiam Tartaleam invenisse* (*suo marte*) *ipsique roganti communicasse*. Cardano, siccome a Scipione Ferreo, così a Tartaglia, non di due, ma di una regola dà lode, e non di una stessa, ma intorno alla stessa equazione. Riguardo però al Tartaglia ingiustamente, perchè tre Cardano da Tartaglia ne ebbe, e di altre fonti gli furon dette. *Quibus, et Cardanus ipse nonnulla addidit, aliaque* (*discipulum suum*) *Ludovicum Ferrarium addidisse dicit. Puta methodos aliquas compendiarias, aut novas demonstrandi modos, aliaque hujusmodi. Nam rem ipsam quod spectat, non video, quod ars ipsa quicquam hactenus promota fuerit ultra quod a Luca de Burgo traditum fuerat, praeter duas illas Regulas Scipionis Ferrei*. Che dir si può, fuorchè non aver Wallis veduto punto l'*Arte magna* di Cardano? Spiegherò io sotto l'occhio curioso dei passi delle scienze il suo contenuto in progresso. Qual cumulo intanto di errori in sì poche linee del Wallis! Ascoltiamo Montucla.

Montucla *Histoire des Mathématiques* part. III, livr. III, n. 5: *Tartalea prétendoit faire de sa découverte le même usage que Ferreo, et Florido. Content d'être par-là en état de résoudre des questions inaccessibles aux autres analystes, il vouloit la réserver pour lui*. Concorda egli ciò con le dichiarazioni di Tartaglia al da Coi, al Cardano, al Ventuorthe da me riportate pag. 102, 116, 124? Non è da onesto storico l'infingersi e dipigner l'uomo morale a capriccio, o l'essere sì negligente da cadere in tanta luce contraria ad ap-porre biasimevole sentimento, e massima. *Il ne consentit* (*Tartalea*) *qu'avec beaucoup de peine à la communiquer à Cardan; et ce ne fut qu'après avoir exigé son serment, qu'il ne la publieroit point, et même qu'il ne la garderoit que écrite en chiffres, afin qu'elle ne tombât entre les mains de personne*. Questo è un mescolare e confondere ciò che Tartaglia richiese, e ciò che Cardano spontaneamente esibì e fece, e fu il giurare il segreto, ed il prometter il velo delle cifre. Vedi il dialogo tra loro pag. 117. *Cardan fit plus* (oltre pretender che le aggiunte fatte ragion gli avean data a pubblicare la scoperta di Tartaglia), *il jetta quelques soupçons sur le droit, que Tartalea pouvoit avoir à cette découverte*. Sarebbe egli stato ben iniquo, se a tanto giunto fosse; ma nei due luoghi già da me riferiti dell'*Arte magna*, e nel capo II del trattato *De integris*, frammento di *Arte aritmetica*, e 7.° tra i frammenti raccolti nel tomo 10.° di tutte le opere, Cardano tributa a Tartaglia l'onore dell'invenzione dicendo: *invenit*; e nel tomo IV, parte V, il cui argomento è *Ars magna Arithmeticae* nel titolo del capo XXVIII denomina l'equazione $x^3+px=q$, equazione di Niccolò Tartaglia bresciano, così ponendo in fronte *De Capitulo generali cubi et rerum aequalium numero Magistri Nicolai Tartagliae brixiensis*.

Andres *Storia d'ogni Letteratura* tomo IV, capo III, pag. 85 e 86 edizione di Parma. *Frate Luca non sol credeva, ma apertamente asseriva, che non si potessero trovare le equazioni del terzo grado*. Me ne appello al tratto di Frate Luca trascritto al principio di questo mio capo. *Tartaglia aguzzò l'ingegno, ed inventò una regola per la soluzione di tali problemi, che aveva il pregio di essere più generale, e di comprendere molti casi, ai quali non era applicabile quella* *di Scipione Ferreo*. Non rimanendoci della regola di questo primo inventore notizia veruna, non veggo con qual fondamento asserir si possa, che non fosse ad altri casi oltre quello dell'equazione $x^3 + px = q$ applicabile; l'affinità d'altro canto di questo con il caso massimamente $x^3 = px + q$ induce a credere il contrario. *Il Nugnez accusa distintamente Tartaglia di quella sua per così dire letteraria avarizia*: il mio leggitore non accorderà all'accusa del Nugnez il suo suffragio: dovea piuttosto accusar Tartaglia di sconsigliata lentezza in effettuar con il pubblico il suo generoso disegno, e di inavveduta connivenza in affidare ad un emolo il segreto. *Buon per noi, che l'ardente, ed ostinata importunità del Cardano giunse a strappargli di bocca il bramato arcano, e la sua ambizione di gloria gli fece superare lo scrupolo di mancare alla data parola di secretezza, e prendersi la compiacenza di comunicarla anche al pubblico*. È evidente, che l'abate Andres, non men commendevole per le sue virtù, che per le estese sue cognizioni, non seppe lo spontaneo giuramento di Cardano di avvolger per sino in cifere impenetrabili, onde neppur disastro di repentina morte suo malgrado lo svelasse, il segreto. Cardano stesso non ebbe ardir di vantar la compiacenza di superare uno scrupolo, ma vergogna per l'opposto di far in alcun luogo la menoma rimembranza di sua violazione. *Cardano trovò della regola la dimostrazione, a cui non avea pensato il Tartaglia*. Aveva il Tartaglia specolativamente, non esperimentalmente per tentativi particolari di numeri, inventata la regola, e non s'inventa specolativamente senza veder la ragione, a comprender la dimostrazione. Nella parte II del suo General Trattato lib. II, capo III, al fine del n. 14 prenunzia, e nel n. 15 dimostra Tartaglia il teorema, per mezzo del quale dice essere *stata* da lui *trovata* la *regola generale al capitolo di cubo e cose uguali a numero ed a molti altri suoi dipendenti*. Il chiarissimo storico ingenuo amator del vero non avrà disgrate queste notizie, che gli storici delle cose analitiche mancarono di presentargli. Sarebbe iniqua cosa il pretender da lui in estensione cotanta supplemento ai difetti di chi limitossi ad oggetti particolari. La sua storia di ogni letteratura è un vastissimo edifizio. E l'architetto fa dimostro il suo valore in disporre, simmetrizzare, comporre il tutto in ordine, in eleganza, in magnificenza, sì che ne resulti una grandiosa bellezza; e suppone esatti nella scelta de' materiali, e ne' lavori varj gli artefici parziali.

§. XI. La diligente storia da me descritta non solo vale a correggere i molti errori dagli altri storici commessi; ma inoltre, in segnare distintamente i gradi, per i quali Tartaglia camminò, il modo ci porge d'inferire l'ordine dei suoi specolamenti, e la tessitura delle sue dimostrazioni. Avanti di procedere a ciò raccolgo qui sotto un punto di vista essi successivi gradi.

Serie Cronologica delle soluzioni di Tartaglia.

1.ª Equazione $x^3 + \left(\frac{3}{2}a + \frac{b}{2a}\right)x^2 = \frac{1}{2a}(a^2 - b)^2$

Radice $x = -a + \sqrt{b}$.

2.ª Equazione $x^3 + \frac{1}{2a}(a^2 - b)^2 = \left(\frac{3}{2}a + \frac{b}{2a}\right)x^2$

Radice $x = a + \sqrt{b}$.

3.ª Equazione $x^3 + px = q$

Radice $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$.

4.ª Equazione $x^3 = px + q$

Radice $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$.

5.ª Equazione $x^3 + q = px$

Radice. Dice Tartaglia questo caso risolversi per l'antecedente.

6.ª Equazione $x^3 + mx^2 = n$

Radice $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}m^3 - \frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\left(\frac{1}{27}m^3 - \frac{1}{2}n\right)^2 - \left(\frac{1}{9}m^2\right)^3\right)}\right)}$
$+ \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}m^3 - \frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\left(\frac{1}{27}m^3 - \frac{1}{2}n\right)^2 - \left(\frac{1}{9}m^2\right)^3\right)}\right)}$.

7.ª, 8.ª, 9.ª Equazioni $x^6 + fx^3 = g$, $x^6 = fx^3 + g$, $x^6 + g = fx^3$

Radici $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}f + \sqrt{\left(\frac{1}{4}f^2 + g\right)}\right)}$, $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}f + \sqrt{\left(\frac{1}{4}f^2 + g\right)}\right)}$,
$x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}f^2 - g\right)}\right)}$.

PARTE TEORICA

Cammino specolativo di Tartaglia dalla storia inferito.

Il prestantissimo la Grange nella sua bella Memoria intitolata *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, inserita nel volume dell'Accademia di Berlino dell'anno 1770, prendendo a trattare delle equazioni della forma $x^3 + hx + l = 0$, dice: *C'est dans cet état que les équations du troisieme degré ont été d'abord traitées par Scipio Ferreo, et par Tartalea, à qui on doit leur résolution; mais on ignore le chemin qui les y a conduits*. Vera l'una parte, e l'altra rispetto a Scipione Ferreo; od almeno non insegnò egli al suo discepolo del Fiore che la regola per sciogliere l'equazione $x^3 + px = q$ spettante a quella forma, posto l negativo, e tale regola non si sa, che fosse dallo stesso del Fiore ad alcuno tramandata, ed a noi certamente resta ignota del tutto. Rispetto a Tartaglia, è chiaro per la descritta storia, e per la cronologica serie testè schierata, che le prime equazioni di terzo grado, che egli ebbe a trattare, furon di quelle che contengono il quadrato x^2 senza la semplice x, non a rovescio come nella forma esposta; e con le tracce dalla storia stessa esebite io mi lusingo di delineare il cammino di Tartaglia nelle sue invenzioni, sicchè in avvenire non abbia più luogo il lamento della ignoranza di esso. Prosegue il la Grange con passar ad assegnare il metodo da lui stimato il più naturale: *La méthode la plus naturelle pour y parvenir me paroît celle que Hudde a imaginée, et qui consiste à représenter la racine par la somme de deux indéterminées, qui permettent de partager l'équation en deux parties propres à faire en sorte, que les deux indéter-*

minées ne dépendent que d'une équation résoluble à la maniere de celles du second degré. Suivant cette méthode on fera donc $x = y + z$, *ce qui étant substitué dans la proposée, la réduira à celle-ci*

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + h(y+z) + l = 0,$$

qu'on peut mettre sous cette forme plus simple.

$$y^3 + z^3 + l + (y+z)(3yz + h) = 0.$$

Qu'on fasse maintenant ces deus équations séparées

$$y^3 + z^3 + l = 0 \qquad 3yz + h = 0,$$

l'on aura $z = -\frac{h}{3y}$; *et substituant dans la premiere,* $y^3 - \frac{h^3}{27y^3} + l = 0$, *c'est à dire*

$$y^6 + ly^3 - \frac{h^3}{27} = 0.$$

Cette équation est à la verité du sixieme degré . . . ; mais il est clair, qu'elle peut se résoudre comme celles du second degré . . . . Ainsi on connoîtra y *et* z, *et de-là on aura* $x = y + z = y - \frac{h}{3y}$.

Per il quadro cronologico delle soluzioni di Tartaglia dimostrandosi, che le equazioni di 6.° grado risolubili per la regola di quelle di 2.° non gli caddero in contemplazione che mesi 21 dopo aver trovato l'artificio di sciogliere le equazioni di 3.° grado $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, rendesi perciò manifesto, che il metodo di lui fu rispetto a questo punto diverso dal metodo di Hudde, e tale, che in luogo di condurlo ad equazione di 6.° riducibile a 2.°, debbe averlo a dirittura condotto ad equazione di 2.° grado. La diversità però non consiste che nella prima posizione; poichè nello spirito, nella condotta, vedremo, che il metodo di Hudde è lo stesso stessissimo di quello di Tartaglia, pubblicato poi nell'*Arte magna* da Cardano, cosicchè io non posso concepirlo da Hudde immaginato, se non fingendo, che Hudde letto non abbia Cardano, e gli altri, che scrissero da esso insino a lui. Quale poi dirassi più natural posizione, quella che conduce la risoluzione delle equazioni di 3.° grado a dipender da una di 6.° grado riducibile a 2.°, o quella che la conduce a dirittura a dipender semplicemente da una di 2.°? Questa del certo.

Il fondamento di tutte le regole da Tartaglia ritrovate per lo scioglimento delle equazioni di 3.° grado è il seguente teorema, che Tartaglia pur vanta aver da sè inventato, su la composizione del cubo, e dimostra nel già citato luogo parte II, lib. II, capo III, n. 15.

Proposizione speculatiuamente trovata, son sue parole, *dal presente autore*.

Se sarà una linea divisa in due parti (come si voglia), il cubo fatto da tutta la detta linea sempre sarà eguale a questi otto prodotti, ouer solidi, cioè alli duoi cubi fatti da quelle due parti, insieme con quelli sei solidi, delli quali tre sono contenuti da tre superficie quadrate di l'uno di cubi et dall'altra parte della linea divisa, et tre sono contenuti da tre superficie quadrate de l'altro cubo et de l'altra della linea divisa. Compendiosamente in nostro stile algebraico

$$(P+Q)^3 = P^3 + Q^3 + 3\,P^2 Q + 3\,Q^2 P.$$

Dimostrazione geometrica. Questa nel volume di Tartaglia riesce oscurata pei difetti, e pei falli delle lettere nelle figure, e nel testo. Ne darò la sostanza sparsa di maggior lume. Sia (*Fig.* 1) la retta AB divisa in C nelle due parti AC, CB, e se ne formi il quadrato $ABED$, indi dal punto C si tiri la retta CF parallela alla AD, e presa su la stessa AD la parte DH uguale alla AC, dal punto H si conduca HI parallela alla DE: sarà $CBIG$ quadrato della parte CB, ed $HGFD$ uguale al quadrato della parte AC; il rettangolo $ACGH$ sarà uguale al rettangolo della parte AC con la parte CB, ed istessamente il rettangolo $IEFG$. Intendasi sul quadrato intero $ABED$ costrutto un cubo, e sia (*Fig.* 2) $ABLK$ la sua faccia sopra AB eretta, ed anteriore, o sia allo sguardo rivolta, $BLOE$ la faccia di esso collocata a destra, ed $LOPK$ la faccia di lui superiore. Nelli due perpendicolari lati AK, BL pigliate le altezze AM, BN uguali fra loro, e ciascuna alla parte CB, per la retta MN si concepisca tradotto un piano equidistante alla base del cubo $ABED$, il quale segherà il cubo in parte superiore, e parte inferiore; un altro piano si immagini elevato sopra la retta CF segnante su la faccia del cubo anteriore la retta CZ, e su la faccia superiore la retta ZU, e segante il cubo in parte destra e sinistra; ed un altro la mente se ne rappresenti alzato sopra la retta HI, su la faccia superiore del cubo terminante nella retta SY, e su la faccia destra nella retta YI, e segante il cubo in parte anteriore, e parte posteriore. Sopra il quadrato $CBIG$ della retta CB insisterà il cubo di essa, del quale incontro all'occhio apparisce la superficie $CBNQ$, ed a destra la superficie $BNRI$. Le tre superficie di lui interne, cioè la superiore nel piano protratto dalla retta QN parallelamente alla base $CBIG$, la sinistra eretta sopra CG, e la posteriore stante sopra GI moltiplicate per le tre rette NL, AC, IE, la prima e terza delle quali son pure uguali ad AC, costituiscono tre solidi, ciascun uguale al quadrato di CB moltiplicato nella retta CA; e del primo appariscono nella figura 2ª le tre superficie $QNLZ$, $NRYL$, $LZTY$, del secondo la superficie unicamente $ACQM$, e del terzo la sola superficie $IEXR$. Sopra il secondo, ed il terzo posa-no due solidi, uguali l'uno e l'altro al quadrato della retta AC moltiplicato nella retta CB: fatto essendo l'uno dalla superficie $MQZK = AC^2$ condotta per la retta $KS = AH = CB$, onde spettagli pure la superficie $KSTZ$; l'altro dalla superficie $RXOY$ parimenti $= AC^2$ condotta per la retta $OU = EF = CB$, sicchè di lui superficie è ancora la $YOUT$. Rimane nella faccia superiore del cubo il quadrato $STUP$ uguale al quadrato $HGFD = AC^2$; immediatamente gli sottogiace un cubo $= AC^3$, ed a questo sta sottoposto, e termina su la base $HGFD$ un solido fatto del quadrato $= AC^2$ nell'altezza $= CB$. Raccogliendo dunque, il cubo intero costrutto sopra la base $ABED$, o sia il cubo della retta AB divisa nelle due parti AC, CB è composto, siccome fu asserito, dei due cubi di AC, CB, di tre solidi formati del quadrato della parte AC moltiplicato nella parte CB, e di tre altri reciprocamente formati del quadrato della parte CB moltiplicato nella parte CA.

Più brevemente, e più chiaro senza intervento della seconda figura. Essendo il cubo su la base $ABED$ costrutto dell'altezza BCA, sopra il quadrato parziale $CBIG = CB^2$ si alzerà il solido $CB^2 \times BCA$; che si divide nel cubo CB^3, e nel solido $CB^2 \times CA$; sopra il quadrato parziale $HFGD = AC^2$ si alzerà il solido $AC^2 \times BCA$, che si divide nel solido $AC^2 \times BC$, e nel cubo AC^3; sopra il rettangolo $ACGH = AC \times BC$ si alzerà il solido $AC \times BC \times BCA$, che si divide nel solido $AC \times BC^2$, e nel solido $AC^2 \times BC$; e similmente sul rettangolo $IEFG$, del pari $= AC \times BC$, si alzerà il solido $AC \times BC \times BCA$, che si divide nei due $AC \times BC^2$, $AC^2 \times BC$. Laonde la somma risulta $= CB^3 + CB^2 \times CA + AC^2 \times BC + AC^3 + AC \times BC^2$

$+AC^2 \times BC + AC \times BC^2 + AC^2 \times BC = AC^3 + CB^3 + 3\,AC^2 \times CB + 3\,AC \times CB^2$.

Dal teorema $(P+Q)^3 = P^3 + Q^3 + 3\,P^2Q + 3\,Q^2P$ debbe Tartaglia essersi avanzato al teorema $(P-Q) = P^3 - Q^3 - 3\,P^2Q + 3\,Q^2P$, valendosi dell'uno, e dell'altro nelle sue soluzioni. Del secondo non parla nel citato luogo, perchè trattando della estrazione della radice cubica dai numeri non era a proposito; ma stabilito, e dimostrato l'avrebbe nella sua nuova Algebra. Io credo, che dimostrato l'avrebbe su la stessa Figura 1ª così. Il gnomone superficiale $CADEIH$ è $= 2\,CA \times AB - CA^2$, e costrutto sopra l'intera base $ABED = AB^2$ il cubo AB^3, sopra di esso gnomone si alza il solido $(2\,CA \times AB - CA^2) \times AB = 2\,CA \times AB^2 - CA^2 \times AB$, e sottraendo questo gnomone solido dall'intero cubo resta il solido, che alzasi sopra il quadrato $CBIG = CB^2$, il qual solido è $= CB^2 \times AB$; sicchè si ha $AB^3 - 2\,AC \times AB^2 + AC^2 \times AB = CB^2 \times AB = CB^3 + CB^2 \times AC$, essendo $CB^2 \times AC$ il solido, che posa sopra il cubo CB^3. Ma questo solido $CB^2 \times AC$ posante sul parzial cubo CB^3 è uguale a tutta la porzione dell'intero cubo AB^3 al di sopra dell'altezza CB, formata di una superficie parallela ed uguale alla $ABED$ moltiplicata nell' altezza CA, e perciò $= AB^2 \times CA$, meno il gnomone solido formato di un gnomone superficiale parallelo ed uguale al $CADEIH$ moltiplicato nell'altezza medesima CA, conseguentemente $= (2\,CA \times AB - CA^2) \times CA = 2\,CA^2 \times AB - CA^3$: vale dire, che il solido $CB^2 \times AC$ è $= AB^2 \times CA - 2\,CA^2 \times AB + CA^3$. Dunque dal primo membro dell'equazione $AB^3 - 2\,AB^2 \times AC + AC^2 \times AB = CB^3 + CB^2 \times AC$ sottraendo $AB^2 \times CA - 2\,CA^2 \times AB + CA^3$, e dal secondo membro sottraendo $CB^2 \times AC$, i resti saranno uguali, e risulterà $AB^3 - AC^3 - 3\,AB^2 \times AC + 3\,AC^2 \times AB = CB^3$. Or $CB = AB - AC$, $CB^3 = (AB - AC)^3$; dunque $(AB - AC)^3 = AB^3 - AC^3 - 3\,AB^2 \times AC + 3\,AC^2 \times AB$. Questa secondo lo spirito geometrico essere stata mi persuado la via tenuta da Tartaglia.

Più speditamente secondo lo spirito algebraico si compie la dimostrazione in questa guisa. Per l'apparecchio della Figura 1ª è $CB = AB - AC$, $CB^2 = AB^2 - 2\,AB \times AC + AC^2$; e per il teorema primo essendo $AB^3 = AC^3 + CB^3 + 3\,AC^2 \times CB + 3\,CB^2 \times AC$, se ne tira ad immediato corollario $CB^3 = AB^3 - AC^3 - 3\,CB^2 \times AC - 3\,AC^2 \times CB$, e sostituendo in luogo di CB, CB^2 i valori loro, ne nasce CB^3, o sia $(AB - AC)^3 = AB^3 - AC^3 - 3\,AB^2 \times AC + 6\,AB \times AC^2 - 3\,AC^3 - 3\,AB \times AC^2 + 3\,AC^3 = AB^3 - AC^3 - 3\,AB^2 \times AC + 3\,AB \times AC^2$.

Proposto essendo a Tartaglia di sciogliere l'equazione $x^3 + mx^2 = n$, era naturale, che il primo pensiero a sorgergli in mente fosse, che siccome per l'antica regola a scioglimento dell'equazione di secondo grado risultava in genere immediatamente un binomio o reciso irrazionale; di simil guisa la risoluzione in generale delle equazioni di terzo grado consister dovesse nella ricerca di un binomio, o reciso irrazionale confacente. Da questo pensiero nacque il bisogno degli esposti due teoremi. Incominciando ad applicarli all'equazion $x^3 + mx^2 = n$, gli fu facile vedere, che x non poteva esser un binomio irrazionale qualunque $= AC + CB$ (*Fig.* 1), perchè sostituendone nel primo membro dell'equazione il cubo ed il quadrato, le parti irrazionali essendo tutte positive non poteano distruggersi. Suppose dunque $x = AB - AC$, e valendosi del secondo teorema per comporne il cubo, trasformò l'equazione in

$AB^3 - AC^3 - 3\,AB^2 \times AC + 3\,AB \times AC^2 + m(AB^2 - 2\,AB \times AC + AC^2) = n$. Tra i recisi irrazionali, che $AB - AC$ può rappresentare, volle tentare, se poteva servire, o soddisfar all'equazione quello di più semplice forma, e nel quale si scioglie l'equazione di secondo grado $x^2 + fx = g$, composto di un radicale quadrato, e di una razionale quantità, ed algebraicamente espresso per $\sqrt{b} - a$. Immaginata per tanto la retta AB una linea irrazionale, qual $\sqrt{b}$, e la retta AC una linea razionale, qual a, fatti su le linee i calcoli ed i raziocinj da me nel §. V della *Parte storica* pag. 105 segnati in algebraici simboli, giunse a ricavare quali esser doveano m, ed n, e quale aver tra loro rapporto, onde l'equazione $x^3 + mx^2 = n$ ricevesse per $x = AB - AC = \sqrt{b} - a$, adempimento. La posizione $x = AC + CB$, che veduto avea non esser ammessa dall'equazion $x^3 + mx^2 = n$, non tardò a riflettere aver luogo nell'equazione $x^3 + n = mx^2$, ed avvertì, che sotto la condizione del medesimo rapporto tra m, n questa verificavasi per il binomio della forma $a + \sqrt{b}$. Avrà Tartaglia proceduto anche per numeri, ma con viste generali, probabilmente ajutate dalla bella industria della *Regola del modo*, che ho descritta nel §. VII del capo III del vol. I. Ma codeste scoperte di Tartaglia non erano delle equazioni $x^3 + mx^2 = n$, $x^3 + n = mx^2$ che scioglimenti troppo imperfetti. Tali equazioni aspettavano il pieno loro scioglimento da quello delle equazioni $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$.

Datosi Tartaglia, per munirsi contro i vanti del baldanzoso del Fiore, ad investigare la regola per risolver l'equazione $x^3 + px = q$, avvidesi anche qui, che l'uso del primo teorema, con porre $x =$ ad un irrazional binomio $AC + CB$ avrebbe introdotte nel primo membro dell'equazione quantità irrazionali soltanto positive, e perciò incapaci di distruggersi fra loro; il perchè si appigliò al teorema secondo, ponendo $x = AB - AC$, e sostituendo, trasformò l'eqnazione da sciogliere nella seguente

$$AB^3 - AC^3 - 3\,AB^2 \times AC + 3\,AB \times AC^2 + p(AB - AC) = q.$$

In buon punto egli si accorse, che $-3\,AB^2 \times AC + 3\,AB \times AC^2 = -3\,AB \times AC(AB - AC)$, e lo potè vedere su la Figura 1.ª stessa, essendo $AB^2 \times AC$ il solido tutto alzantesi su dell'area $ACFD$, ed $AB \times AC^2$ la porzione di lui al di sopra dell'altezza BC, ed alta quanto AC. Ciò inteso, naturale si fu l'inferire, che si distruggessero fra loro la quantità $-3\,AB \times AC$, e la quantità p, ambedue moltiplicatrici di $AB - AC$, e di condizion contraria, sottrattiva l'una, additiva l'altra. Ma tal distruggimento non può darsi senza l'uguaglianza tra le contrarie quantità; ecco dunque una parziale equazione $3\,AB \times AC = p$. Necessaria conseguenza fu l'altra $AB^3 - AC^3 = q$; e così l'equazione da sciogliere, dopo essere trasformata, fu divisa in due. Or dovendo, proseguì Tartaglia, dovendo essere $AB - AC$ un reciso irrazionale, come potrà la differenza dei cubi $AB^3 - AC^3$ esser quantità razionale $= q$, se sola la retta AB, o la sola AC sia irrazionale; ed essendo irrazionali ambedue, in qual altra maniera fia essa differenza razionale, fuorchè essendo AB, AC l'una e l'altra quantità irrazional cubica? Questo raziocinio trasse Tartaglia a porre $x = AB - AC = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$, con che l'equazione $AB^3 - AC^3 = q$ convertita in $t - u = q$, e l'equazione $3\,AB \times AC = p$ in $3\sqrt[3]{t} \times \sqrt[3]{u} = p$, e da questa, elevando al cubo, ricavata l'equazione $t \times u = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 = \frac{1}{27}p^3$, lo scioglimento dell'equazione $x^3 + px = q$ fu ridotto al problema compreso nelle due equazioni

$$1.^a \quad t - u = q \qquad 2.^a \quad t \times u = \frac{1}{27} p^3,$$

cioè al problema di trovar due numeri t, u differenti tra loro del numero q, ed il prodotto dell'uno nell'altro danti $\frac{1}{27} p^3$ cubo della terza parte di p coefficiente di x. Questo è ciò, che Tartaglia prescrive nei due primi terzetti del suo rimato Capitolo:

Quando che 'l cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouati dui altri differenti in esso;
Dapoi terrai questo per consueto
Che 'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose netto;

E già quanto all'equivoco senso dell'ultimo verso si è veduto pag. 120 Tartaglia stesso a Cardano spiegare doversi intendere il cubo del terzo del numero p delle cose. Ora dall'equazione 2.^{a} ne segue $u = \frac{p^3}{27 t}$, e sostituendo questo valor di u nella prima, risulta $t - \frac{p^3}{27 t} = q$, e levando le frazioni si ottiene

$t^2 = q t + \frac{p^3}{27}$ equazion di 2° grado, la cui radice $t = \frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$ e quinci $u = t - q = -\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$, conseguentemente

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}\right)}$$

Questo è il valore, che Tartaglia intese di descrivere nel terzetto terzo

El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.

Distinse la cosa incognita x col nome di *principale* attese le due secondarie ausiliarmente introdotte t, u. È già palese come Tartaglia, prima di pensare alle equazioni di 6.° grado riducibili al 2.°, potè sciogliere l'equazione di 3.° $x^3 + px = q$, con richiamar questa a dirittura ad una di 2.°: ciò fece ponendo $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$, non, come Hudde, $x = y + z$. È facile poi vedere che

$$-\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)} = +\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)};$$

onde l'espressione di x Tartagliana ricade nella odierna nostra.

Il Gua-de-Malves nella parte storica della sua Memoria *Recherches du nombre des racines réelles ou imaginaires*, stampata nel volume dell'Accademia di Parigi dell'anno 1741, riferiti i versi di Tartaglia riguardanti la equazione $x^3 + px = q$, interpreta così: *Ce qui se peut rendre en cette sorte. Étant donnée cette équation* $x^3 + px = q$, *décomposez la quantité constante de l'équation en deux autres, dont le produit soit égal au cube du tiers du coefficient de l'inconnue linéaire (probléme qui dépend de la résolution d'une équation du sixieme degré réductible au second), et la différence des racines cubes de ces deux parties de la quantité constante, ou de l'homogene de comparaison, sera la racine, que vous cherchés*. Giudichi il leggitore, se Gua-de-Malves penetrato abbia la mente di Tartaglia, se, di più, vi sia coerenza in voler la quantità q divisa nelle due t, u, il che suona porre $q = t + u$, e ingiunger poi di prendere $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$.

Sciolta l'equazione $x^3 + px = q$, non è maraviglia, che il giorno seguente sciogliesse Tartaglia l'equazione $x^3 = px + q$; poichè non ebbe che a cangiare la posizione $x = CB = BA - AC = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$ nella posizione $x = AB = AC + CB = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$, e valersi del teorema primo ad avere

$$t + u = q, \quad t \times u = \tfrac{1}{27} p^3, \quad t^2 + \tfrac{1}{27} p^3 = q\,t,$$

$$t = \tfrac{1}{2} q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3\right)} \qquad u = \tfrac{1}{2} q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3\right)}$$

$$x = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2} q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2} q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3\right)}\right)}.$$

Che è quanto egli insegna nei terzetti del suo Capitolo quarto, quinto, e sesto.

In el secondo de cotesti atti;
Quando che 'l cubo restasse lui solo
Tu osseruerai quest'altri contratti,
Del numer farai due, tal part' à uolo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo;
Delle qual poi, per commun precetto,
Torrai li lati cubi insieme gionti,
Et cotal somma sarà il tuo concetto:

Per ciò, che spetta all'equazione $x^3 + q = p\,x$ dice Tartaglia, che sciogliesi con la seconda $x^3 = p\,x + q$.

El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.

Ma qual è questa quasi congiunzion di natura della equazion $x^3 + q = p\,x$ con la $x^3 = p\,x + q$, piuttosto che con la $x^3 + p\,x = q$? Sostituendo $\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$ per x, essa equazione $x^3 + q = p\,x$ si trasforma in $t + u + 3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}\left(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\right) + q = p\left(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\right)$, che divisa al solito dà le due $t + u + q = 0$, $\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u} = \tfrac{1}{3} p$, onde $t \times u = \tfrac{1}{27} p^3$, $t^2 + \tfrac{1}{27} p^3 + q\,t = 0$, $t = -\tfrac{1}{2} q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3\right)}$, $u = -q - t = -\tfrac{1}{2} q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3\right)}$,

$$x = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2} q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2} q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3\right)}\right)}.$$

Questa formola di x dell'equazione $x^3+q=px$ ha, non altrimenti che la formola di x dell'equazione $x^3=px+q$, sotto il radicale quadrato la differenza $\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3$; laddove la formola di x dell'equazione $x^3+px=q$ racchiude sotto il medesimo radicale quadrato la somma $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$. Consiste egli in ciò il quasi congiungimento di natura da Tartaglia concepito, ed enunciato fra le equazioni $x^3+q=px$, $x^3=px+q$, piuttosto che fra le due $x^3+q=px$, $x^3+px=q$? Anzi, è egli a credere, che Tartaglia a sciogliere l'equazione $x^3+q=px$ seguisse, come qui per me si è fatto, il metodo tenuto nello scioglimento delle altre due? Somministrano ragione di dubitarne le due equazioni, nelle quali si cade, $t+u+q=0$, $t^2+\frac{1}{27}p^3+qt=0$: per noi non han queste difficoltà alcuna, ma aveano un orrido aspetto a que' tempi, ne' quali il concetto di equazione era affisso ad uguaglianza di positiva a positiva quantità. Per questa ragione Cardano interpretò più sottilmente il dire di Tartaglia, ed un più segreto speciale vincolo tra le due equazioni $x^3+q=px$, $x^3+px=q$ ci manifesta, per cui la radice di quella involgendo la radice di questa, in più stretto senso si verifica la proposizion di Tartaglia, che quella con questa si scioglie. Il vedremo di poi, passando a considerare la dottrina del Cardano.

La forma, sotto cui Tartaglia al gentiluomo inglese (pag. 125) diede sciolta l'equazione $x^3+6x^2=100$, appalesa, che scoperta avea l'arte di togliere il termine contenente il quadrato dell'incognita, e trasformar l'intera equazione $x^3+mx^2=n$ in una equazione di altra incognita z composta solamente di z^3, pz, q, ed in fine per lo scioglimento di questa conseguir lo scioglimento di quella. Di fatto ponendo $x=z-\frac{1}{3}6=2$, e sostituendo il cubo, ed il quadrato di $z-2$ nell'equazione $x^3+6x^2=100$, trovasi $z^3-12z+16=100$, o sia $z^3=12z+84$, equazione priva del quadrato z^2 dell'incognita, e lo scioglimento della quale per la formola del secondo caso è

$$z=\sqrt[3]{(42+\sqrt{1700})}+\sqrt[3]{42-\sqrt{1700})};\ \text{onde}$$

$$x=z-\tfrac{1}{3}.6=\sqrt[3]{(42+\sqrt{1700})}+\sqrt[3]{(42-\sqrt{1700})}-\tfrac{1}{3}.6:$$

appunto come all'inglese Ventuorthe dettò Tartaglia: cosicchè dubbio esser non vi può aver lui battuta l'istessa via. E che dell'artifizio formata si fosse un'ampia idea, lo accertano le sue parole al gentiluomo stesso: che dalle regole per scioglier le equazioni di cubo, cosa, e numero si cavavan le regole dimostrative per risolver le equazioni di cubo, censo, e numero, essendo queste a quelle concatenate. Laonde, e chi vi sarà più che dica non aver Tartaglia pensato alla dimostrazione delle sue regole? E che mancava anzi al Tartaglia per poter comporre una piena teoría delle equazioni del terzo grado? E si può egli dubitare, che se morte, alle belle opere sempre infesta, reciso non avesse nel maggior uopo lo stame della vita di lui, coronato non ne avrebbe il General suo Trattato? Qual ragione pertanto d'intitolar persino d'altrui nome, cioè Cardanica, l'arte, e la formola di soluzione delle equazioni di terzo grado? Io non posso, dopo tanto diritto in Tartaglia dimostrato, acconsentire a tale ingiustizia, e Tartagliana quindi innanzi l'appellerò. Tanto poi più, che Cardano, osservato avendo, che spezzando l'equazion trasformata alla maniera, che Tartaglia facea, un caso occorreva irreducibile, a tentar si volse altri spezzamenti, pei quali merita lode, onde la distinzione dei titoli giusta i nomi dei rispettivi autori rendesi necessaria a non confondere i diversi spezzamenti fra loro.

Dottrina di Girolamo Cardano.

Risoluzioni generali.

Cardano si formò una sì alta idea dello scioglimento delle equazioni di terzo grado, che non solo lo disse cosa assolutamente bella, ed ammirevole, ma procedette ad esaltarlo qual artifizio all'umana sottigliezza superiore, qual lume trascendente la perspicacia di mortale ingegno, dono sicuramente celeste, e illustre sì, che chi vi giunga, nulla più creda esservi non intelligibil per lui. *Rem sane pulchram et admirabilem; cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem ars haec superet, donum profecto coeleste, experimentum autem virtutis animorum, atque adeo illustre, ut, qui haec attigerit, nihil non intelligere posse se credat.* Non si può non riconoscere in Cardano un animo oltremodo dalla novità riscaldato e bollente di entusiasmo. Ma fu tal calore, che lo spinse ad astruse ricerche, che lo sostenne nelle lunghe meditazioni, e nei penosi calcoli, che le frutta maturogli di varie belle scoperte, alcuna delle quali io qui esporrò, e il maggior numero altrove, sempre con imparzialità, con legge di separar quel ch'è suo da ciò che d'altrui, con libertà in notarne i difetti. Prende Cardano dal capo XI della sua *Arte magna* al capo XXIII a sciogliere in distinti capi ad una ad una le varie equazioni di terzo grado, e di tre, e di quattro termini composte, ommettendo però per la ragione più volte detta le tre

$x^3+px+q=0$, $x^3+nx^2+q=0$, $x^3+nx^2+px+q=0$.

Così è: il sistema era allora di paragonare, ed uguagliare quantità a quantità, ed una somma di quantità uguale a zero avea un'aria mostruosa, e non sapeasi di equazion sì fatta concepire idea. Ristrignerò la dottrina di Cardano ritenendo la distinzione, e l'ordine delle equazioni.

1.° $x^3 + px = q$. Si propone Cardano di dimostrare, che posta (*Fig.* 1) la differenza dei cubi $AB^3 - AC^3 = q$, e posto il prodotto $AB \times AC = \frac{1}{3}p$, sarà $AB - AC = CB = x$, cioè CB soddisfarà all'equazione $x^3 + px = q$. Ma, in dimostrando, Cardano confonde i solidi, sì, che il calcolo è incoerente, ed il raziocinio non regge. Emendato il fallo, la dimostrazione in succinto si è: che moltiplicata l'equazione $AB \times AC = \frac{1}{3}p$ per $3(AB - AC) = 3BC$, risulta $3AB^2 \times AC - 3AB \times AC^2 = p \times CB$; e che $CB^3 = (AB - AC)^3 = AB^3 - AC^3 - 3AB^2 \times AC + 3AB \times AC^2$: onde $CB^3 + 3AB^2 \times AC - 3AB \times AC^2 = AB^3 - AC^3$, o sia $CB^3 + p \times CB = q$. È evidente, che questa dimostrazione non è che un regresso sintetico su i passi dal Tartaglia fatti nel discender analiticamente dalla posizione $x = AB - AC$ alle due equazioni $AB^3 - AC^3 = q$, $AB \times AC = \frac{1}{3}p$. Cardano ricevute avea nei terzetti di Tartaglia le tre equazioni $t - u = q$, $t \times u = \frac{1}{27}p^3$, $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$, la seconda delle quali gli fu facile vedere essere il cubo della equazione $\sqrt[3]{t} \times \sqrt[3]{u} = \frac{1}{3}p$. Confessa egli medesimo nel capo VI, che inteso avea esser Tartaglia giunto allo scoprimento della regola per dimostrazion geometrica, e che perciò stimava questa la via regia per andar in traccia dello scioglimento di ogni equazione. Espressa quinci geometricamente la equazion $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$ per $x = AB - AC$, la $\sqrt[3]{t} \times \sqrt[3]{u} = \frac{1}{3}p$ per $AB \times AC = \frac{1}{3}p$, la $t - u = q$ per $AB^3 - AC^3 = q$, e passando a sostituire nell'equazione $x^3 + px = q$ $AB - AC$ in luogo di x, non ebbe Cardano che ad impiegare considerazione, e confronto per rilevar il teorema $(AB - AC)^3 = AB^3 - AC^3 - 3\,AB \times AC\,(AB - AC)$, e rifare l'analitica discesa di Tartaglia, e tessere, sinteticamente riascendendo, la dimostrazione, che io in compendio ho recata. Poi, a renderla compiuta, doveva Cardano maneggiar le due equazioni $AB^3 - AC^3 = q$, $AB \times AC = \frac{1}{3}p$, o le due immediate dei terzetti di Tartaglia $t - u = q$, $t \times u = \frac{1}{27}p^3$, e far con il calcolo vedere come da esse scaturisca la regola o la formola Tartagliana; ma senza punto di riflessione su queste determinatrici equazioni salta all'esposizione delle parti, che la formola stessa compongono; così che la dimostrazione resta scema ed imperfetta. Laonde io non so in tal dimostrazione trovare il merito, per cui a Cardano dar si debba l'onore di denominar Cardanica la regola o formola da Tartaglia inventata.

2.° $x^3 = px + q$. Anche qui la dimostrazione manca della parte di calcolo su le equazioni $t + u = q$, $t \times u = \frac{1}{27}p^3$, ovvero $AC^3 + CB^3 = q$, $AC \times CB = \frac{1}{3}p$; la parte geometrica fondata sul teorema $AB^3 = (AC + CB)^3 = AC^3 + CB^3 + 3\,AC^2 \times CB + 3\,AC \times CB^2$ è esatta. Cardano dimostra questo, ed anche l'altro teorema $CB^3 = (AB - AC)^3 = AB^3 - AC^3 - 3\,AB^2 \times AC + 3\,AB \times AC^2$ nel capo VII, ed asserisce che dimostrati gli avea eziandío nel 7.° degli Elementi geometrici. Ma Tartaglia, in proporre nel citato luogo della parte II del suo Gen. Tratt. il primo teorema, si gloria, che se Cardano prevenuto l'avea in pubblicarlo, egli però l'avea a lui *mostrato*. E quando pur mostrato non glielo avesse separatamente, ed in modo espresso, agevole sarebbe stato al Cardano il ricavarlo dalle cose da Tartaglia dategli ne' suoi terzetti, come dell'altro ho detto.

3.ª $x^3 + q = px$. Ingegnosamente Cardano discopre lo speciale congiungimento di natura da Tartaglia asserito di questa equazione con la precedente, traendone perciò da quella lo scioglimento. Si concepisca $z^3 = pz + q$, nella quale p, q sieno gli stessi numeri che nella proposta $x^3 + q = px$. Sarà $q = px - x^3 = z^3 - pz$; onde si trae $z^2 - p : p - x^2 :: x : z$; e componendo $z^2 - x^2 : p - x^2 :: x + z : z$, e quinci $z - x : 1 :: p - x^2 : z$; conseguentemente $z^2 - xz = p - x^2$, e trasponendo, $x^2 - zx = p - z^2$, e risolvendo, $x = \frac{1}{2} z \pm \sqrt{\left(p - \frac{3}{4} z^2\right)}$. Dunque la equazione $x^3 + q = px$ si risolve per la radice z della $z^3 = pz + q$, anzi per una di questa se ne hanno due di quella, la somma delle quali riuscendo z, riesce ad essa una uguale. Ed è evidente potersi convertire il calcolo, sciogliendo l'equazione $z^2 - xz = p - x^2$, la cui soluzione darà $z = \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\left(p - \frac{3}{4} x^2\right)}$, e così per una radice x dell'equazione $x^3 + q = px$ ne veranno determinate due dell'equazione $z^3 = pz + q$ uguali nella somma all'unica x di essa $x^3 + q = px$. Vero è però che alla sottigliezza di tali scioglimenti l'uno per l'altro non corrisponde l'utilità. Poichè, introdotta nella soluzione $x = \frac{1}{2} z \pm \sqrt{\left(p - \frac{3}{4} z^2\right)}$ la soluzion

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3\right)}\right)}$$

della equazione $z^3 = pz + q$, ne risulterebbe una espressione di x ben complicata; laddove, sciogliendo l'equazione $x^3 + q = px$ direttamente a somiglianza delle due antecedenti, si ottiene il valor del suo x sotto una formola pur simile, e nulla più composta delle formole delle radici di quelle.

4.ª $x^3 = n\,x^2 + q$. È dal Cardano privata del termine $n\,x^2$, e trasformata nella $z^3 = p\,z + q'$, con fare $x = z + \frac{1}{3}n$, e la trasformazione è in figura geometrica spiegata, e dimostrato risultare $p = \frac{1}{3}n^2$, $q' = q + 2\left(\frac{1}{3}n\right)^3$. Ecco brevemente come. Sia (*Fig.* 1) $AC = z$, $CB = \frac{1}{3}n$, $AC + CB = z + \frac{1}{3}n = x$: sarà $(AC + CB)^3 = 3\,CB(AC + CB)^2 + q$, cioè svolgendo $AC^3 + CB^3 + 3\,AC^2 \times CB + 3\,AC \times CB^2 = 3\,AC^2 \times CB + 6\,AC \times CB^2 + 3\,CB^3 + q$; onde, tolte le quantità uguali, $AC^3 = 3\,AC \times CB^2 + 2\,CB^3 + q$, ovvero $z^3 = 3.\left(\frac{1}{3}n\right)^2 z + 2.\left(\frac{1}{3}n\right)^3 + q = \frac{1}{3}n^2 z + 2\left(\frac{1}{3}n\right)^3 + q$.

5.ª $x^3 + n\,x^2 = q$. In modo simile, posta $x = z - \frac{1}{3}n$; la trasforma Cardano in $z^3 = p\,z + q'$, dove $p = \frac{1}{3}n^2$, $q' = q - 2\left(\frac{1}{3}n\right)^3$. Insegna eziandío a trasformarla in $z^3 = n\,z + \sqrt{q}$ ponendo $x = z^2 - n$, il qual modo di trasformare dice essere invenzione di Lodovico Ferrari. Sostituendo di fatto, si ha $z^6 - 3\,n\,z^4 + 3\,n^2 z^2 - n^3 + n\,z^4 - 2\,n^2 z^2 + n^3 = q$, e, scancellati i termini che si distruggono, $z^6 - 2\,n\,z^4 + n^2 z^2 = q$, ed estraendo le radici quadrate, $z^3 - n\,z = \sqrt{q}$, $z^3 = n\,z + \sqrt{q}$. La prima maniera però è quella da anteporsi, portando ad una espressione di x più semplice.

6.ª $x^3 + q = n\,x^2$. Avrebbe potuto Cardano ponendo $x = z + \frac{1}{3}n$ trasformarla in $z^3 = \frac{1}{3}n^2 z + 2\left(\frac{1}{3}n\right)^3 - q$. Ma amò meglio servirsi di un altro metodo di trasformazione con porre $x = \frac{\sqrt[3]{q^2}}{z}$, onde risulta $z^3 + q = n\,z\,\sqrt[3]{q}$. Il motivo, per cui preferì Cardano questa trasformazione, si fu quello di conseguir della equazione $x^3 + q = n\,x^2$ due radici per mezzo delle due della equazione $z^3 + q = n\,z\,\sqrt[3]{q}$ sciolta al suo modo esposto non ha guari $n.3$. Essa trasformazione non è che il particolar uso di una regola in termini generali, e comprensivi senza limite i gradi superiori, da Cardano insegnata, e dimostrata nel capo VII; ma che riserbo, come a più opportuno luogo, ad un Capo distinto delle viste di lui su la natura delle equazioni.

7.ª $x^3+nx^2+px=q$. 8.ª $x^3+px=nx^2+q$. 9.ª $x^3+nx^2=px+q$. 10.ª $x^3=nx^2+px+q$. 11.ª $x^3+q=nx^2+px$. 12.ª $x^3+px+q=nx^2$. 13.ª $x^3+nx^2+q=px$. L'artificio, onde tutte queste equazioni sciolte vengono da Cardano, si è quello di fare $x=z\mp\frac{1}{3}n$ per trasformarle in equazioni mancanti del termine secondo contenente il quadrato dell'incognita, ed accompagna le trasformazioni con geometriche dimostrazioni, che io ommetto, essendo simili a quella che sotto il num. 4.° ho compendiata, e bastando essa a lume di tutte le altre.

Stupirà ora il leggitore in udir da Montucla: *Ce n'étoit pas sans quelque raison, que Cardan prétendoit avoir fait aux regles de Tartalea des additions, qui lui donnoient une sorte de droit à leur découverte. Il traite en effet dans son Ars magna toute cette matiere avec beaucoup d'étendue. Il en parcourt tous les cas* (eccettuati li tre da me segnati sul principio), *et quoique Tartalea ne lui eût communiqué que la résolution de ceux où manquoit le second terme, il donne des regles pour ceux où tous les termes se trouvent, aussi bien que pour les autres, où manque seulement le troisieme. Il est bien vrai, que de la maniere dont nous résolvons aujourd'hui les équations, tous ces derniers cas se réduisent aux premiers enseignés par Tartalea; mais dans le tems de Cardan cette liaison n'étoit pas apperçue aussi distinctement, et il falloit de l'adresse et de l'habilité pour passer de l'un à l'autre. Chaque cas enfin, ou chaque Capitolo, comme on* *les nommoit alors, avoit sa regle particuliere, et c'est sous cette forme qu'ont été exposées les regles de solution pour le troisieme degré jusqu'à Viete*. Si può egli credere, che Montucla scorsi abbia, di volo anche soltanto, i capi dell'*Arte magna* di Cardano? Che veduto abbia nel libro 9.° dei quesiti di Tartaglia il dialogo tra lui e l'inglese gentiluomo Ventuorthe, che sta al fine di esso libro? E cade affatto dalle tempia di Vieta il ramo senza ragione al bel di lui serto aggiunto, con attribuirgli la scoperta del legame delle equazioni del secondo termine fornite con quelle che ne son prive, e l'invenzion dell'artificio di trasformare le prime nelle seconde. Tal legame, tal artificio scintillarono l'anno 1541 al più tardi alla mente di Tartaglia, con pieno fulgore splendettero all'intelletto di Cardano, ed a pubblica solenne luce furon da lui prodotti l'anno 1545 nell'*Arte magna*. Dovremo noi persuaderci che quest'opera sì classica, sì strepitosa in que' tempi non capitasse nelle mani di Vieta? Ed ecco adempita la promessa, che al fine del capo I del I volume io feci.

Chiuderò con aggiugner la formola generalissima di x per le equazioni tutte di terzo grado, intendendole tutte comprese nell'equazione $x^3 \mp n x^2 + p x \mp q = 0$; con che resterà supplito ad un difetto comune delle analitiche istituzioni. Essa concentrerà in una sola le regole dei casi contemplati da Tartaglia, di quelli discussi da Cardano, e dei tre da loro ommessi; e risparmierà la fatica delle trasformazioni particolari.

Essendo pertanto $x^3 - n x^2 + p x - q = 0$, sarà

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27} n^3 - \frac{1}{6} n p + \frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\left(\frac{1}{27} n^3 - \frac{1}{6} n p + \frac{1}{2} q\right)^2 - \left(\frac{1}{9} n^2 - \frac{1}{3} p\right)^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27} n^3 - \frac{1}{6} n p + \frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\left(\frac{1}{27} n^3 - \frac{1}{6} n p + \frac{1}{2} q\right)^2 - \left(\frac{1}{9} n^2 - \frac{1}{3} p\right)^3\right)}\right)} + \frac{1}{3} n.$$

Soluzioni speciali.

Oltre le generali regole per risolver le equazioni di terzo grado insegna Cardano parecchie regole di scioglimenti speciali cavati dai modi della struttura loro, dalla composizione dei coefficienti dei termini ignoti, e del termine noto, dai rapporti tra gli uni e l'altro. Sono sì fatte speciali regole l'argomento del capo XXV della parte IV del tomo 4.° di Cardano, da lui distinta col titolo *Ars magna, sive de Regulis algebraicis*, dei capi XXXI, XXXV, XXXVII, XXXIX della parte V denominata *Ars magna arithmeticae*, e dei capi II, III, V, XIV, XL, XLV, LVIII della parte VI portante in fronte *De Regula Aliza libellus*. Io le raccorrò distribuite in tre stretti manipoli. E lo fo tanto più volentieri, che in seguito avrò in alcune a mostrare i primi lampi di bei teoremi spettanti la natura delle equazioni in genere.

Manipolo I.

Equazioni $x^3 + q = px \ \ldots \ x^3 = px + q$.

1.° Dall'equazione $x^3 + q = px$ tirasi immediatamente $q = px - x^3 = (p - x^2)x$. Quinci imparasi, che se p dividasi in due parti $a^2 + b$, tali, che sia $ab = q$, sarà $a = x$; poichè sostituendo $a^2 + b$ in luogo di p nell'equazione $q = (p - x^2)x$, si ha $q = (a^2 + b - x^2)x$, e se pongasi $a = x$, cadesi in $q = ab$. Se dunque sia b numero, ed a^2 numero quadrato, sarà a una radice razionale dell' equazione $x^3 + q = px$. Esempio $x^3 + 6 = 7x$, $p = 7 = 4 + 3$, $q = 2 \times 3$, $x = \sqrt{4} = 2$.

2.° L'equazione $x^3 = px + q$ divisa per x esibisce $x^2 = p + \frac{q}{x}$, donde proviene $x = \sqrt{\left(p + \frac{q}{x}\right)}$. Se dunque sia

$q=ab$, e trovisi $a=\sqrt{\left(p+\frac{ab}{a}\right)}=\sqrt{(p+b)}$, sarà $x=a$, ed essendo a numero, sarà radice razionale dell'equazione $x^3=px+q$. Esempio $x^3=32x+24\ldots 24=6\times 4$, $6=\sqrt{(32+4)}=\sqrt{36}$, $6=x$.

3.° Se data l'equazione $x^3=px+q$, si trovi un numero cubico m^3, la cui radice cubica m sia tale, che renda $m^3+q=pm$, cioè che ci trasporti dalla forma $x^3=px+q$ alla forma $x^3+q=px$, si avrà per ciò stesso in m una radice razionale di quest'altra equazione $x^3+q=px$. In secondo luogo sarà $x+m$ comune esatto divisore dei due membri della seguente equazione $x^3+m^3=px+q+m^3$, e per la divisione ne uscirà un'equazione di secondo grado, dalla quale avrassi una radice irrazionale, od anche razionale della equazion proposta $x^3=px+q$, purchè sia $p>\frac{3}{4}m^2$. Di fatto x^3+m^3 diviso per $x+m$ dà per quoziente x^2-mx+m^2; e dividendo $px+q+m^3$ per lo stesso $x+m$ si trova al primo colpo il quoziente p, con il residuo $-pm+q+m^3$, che, attesa l'ipotesi $pm=q+m^3$, è zero: dunque le divisioni sono ambedue esatte, e da esse si ha $x^2-mx+m^2=p$, equazione, dalla quale ricavasi $x=\frac{1}{2}m+\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}$, il cui valore sarà irrazionale se $p-\frac{3}{4}m^2$ non sia quadrato, e diverrà razionale se lo sia. Dall'equazione $x^2-mx+m^2=p$ ricavasi parimenti, e ad un tempo $x=\frac{1}{2}m-\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}$; ma per l'ipotesi $pm=q+m^3$, essendo $m(p-m^2)=q$, debbe $p-m^2$ esser positivo, conseguentemente $p>m^2$, e quinci $p-\frac{3}{4}m^2>\frac{1}{4}m^2$, $\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}>\frac{1}{2}m$, onde ne viene esser $\frac{1}{2}m-\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}$ quantità negativa. E chi poi non accorgesi altro non esser l'ipotesi di Cardano, fuorchè il caso di aver l'equazione $x^3 = px + q$ la radice razionale negativa $-m$? Posto in fatti $-m$ in luogo di x, si ha $-m^3 = -pm + q$, e trasponendo i termini, affin di renderli positivi, $pm = q + m^3$. Noi pertanto nell'equazione $x^3 = px + q$, oltre alla radice positiva $x = \frac{1}{2}m + \sqrt{\left(p - \frac{3}{4}m^2\right)}$, valutiamo le due negative $x = \frac{1}{2}m - \sqrt{\left(p - \frac{3}{4}m^2\right)}$, $x = -m$. Cardano riconobbe le radici negative delle equazioni in quanto alla parte, che hanno nella composizione loro, e nell'altezza del grado, come testifica la division fatta per abbassarle, ma non tenevane conto, qualora ve ne avea alcuna positiva; e distinguendo quali forme diverse di equazioni le varie distribuzioni di termini a positivo stato ridotti, perciò, giacchè una radice negativa qualunque della forma $x^3 = px + q$ la cangia nella forma $x^3 + q = px$, era da lui riguardata, anzi che qual radice negativa di quella, qual radice positiva di questa. E ciò sia detto una volta per sempre.

Che se il numero m dia $m^3 = pm + q$, sarà m radice razionale di essa $x^3 = px + q$, ed $x - m$ sarà comune esatto divisore dei due membri della equazione $x^3 - m^3 = px + q - m^3$; ma dalla equazione di secondo grado che ne sortirà non potrassi cavar alcun profitto. Tal equazione sarà $x^2 + mx + m^2 = p$, che sciolta porge $x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(p - \frac{3}{4}m^2\right)}$. Ma l'ipotesi $m^3 = pm + q$, dando $m(m^2 - p) = q$, importa $m^2 > p$, $\frac{1}{4}m^2 > p - \frac{3}{4}m^2$, $\frac{1}{2}m > \sqrt{\left(p - \frac{3}{4}m^2\right)}$, conseguentemente le due radici $-\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(p - \frac{1}{4}m^2\right)}$ negative.

Reciproco al primo caso si è, se data l'equazione $x^3 + q = px$ si trovi un numero cubico m^3, la cui radice cubica

m dia $m^3 = pm + q$, cioè converta la equazione $x^3 + q = px$ nella $x^3 = px + q$: sarà in tal ipotesi 1.° m radice razionale della equazione $x^3 = px + q$. 2.° $x + m$ comun divisore esatto dei due membri della equazione $x^3 + m^3 = px - q + m^3$, e ne sortirà l'equazione di secondo grado $x^2 - mx + m^2 = p$. 3.° saranno $x = \frac{1}{2} m \pm \sqrt{\left(p - \frac{3}{4} m^2\right)}$ due valori positivi, e due radici dell'equazione $x^3 + q = px$. Basta dimostrare questa terza parte lasciando al leggitore il trasportar qui alle altre due le dimostrazioni per le simili nel caso primo. Essendo pertanto l'ipotesi, che m dia $m^3 = pm + q$, e quinci venendone $m(m^2 - p) = q$, dovrà esser $m^2 > p$, $\frac{1}{4} m^2 > p - \frac{3}{4} m^2$, $\frac{1}{2} m > \sqrt{\left(p - \frac{3}{4} m^2\right)}$; dunque anche $\frac{1}{2} m - \sqrt{\left(p - \frac{3}{4} m^2\right)}$ sarà valor positivo.

Se m dia $m^3 + q = pm$, cioè, se verifichi l'equazione $x^3 + q = px$, sarà 1.° m sua radice razionale. 2.° sarà $x - m$ comune divisore esatto dell'equazione $x^3 - m^3 = px - q - m^3$, ed il quoziente sarà l'equazione di 2.° grado $x^2 + mx + m^2 = p$. 3.° dalla quale risulterà il valor positivo $x = -\frac{1}{2} m + \sqrt{\left(p - \frac{3}{4} m^2\right)}$, radice irrazionale di essa $x^3 + q = px$. Imperciocchè dall'ipotesi $m^3 + q = pm$ si deduce $q = m(p - m^2)$, $p > m^2$, $p - \frac{3}{4} m^2 > \frac{1}{4} m^2$, $\sqrt{\left(p - \frac{3}{4} m^2\right)} > \frac{1}{2} m$, conseguentemente $-\frac{1}{2} m + \sqrt{\left(p - \frac{3}{4} m^2\right)}$ valor positivo.

4.° Le due equazioni $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ ammettono per valore di x la forma irrazionale $f + \sqrt{g}$, sempre che nell'una e nell'altra sia $p = 3f^2 + g$, e nella prima sia in oltre $q = 2f(g - f^2) = 2f(p - 4f^2)$, nella seconda all'incontro $q = 2f(f^2 - g) = 2f(4f^2 - p)$. Possiamo unire le due equazioni in una così: $x^3 = px \pm q$. Sostituendo in luogo di x la forma irrazionale $f+\sqrt{g}$ si ha $f^3+3f^2\sqrt{g}+3fg+g\sqrt{g}=pf+p\sqrt{g}\pm q$, donde, separando le quantità irrazionali dalle razionali, ne nascono le due equazioni $3f^2+g=p$, $f^3+3fg=pf\pm q$, e trasportando dalla prima in questa seconda il valor di p, si trova $2f(\pm g\mp f^2)=q$. Per le quali cose rimane dimostrato essere

Condizion comune . . . . $p=3f^2+g$.

Condizioni singolari contrarie.

Per la $x^3=px+q$ . . . . $q=2f(g-f^2)=2f(p-4f^2)$. . .

Per la $x^3+q=px$ . . . . $q=2f(f^2-g)=2f(4f^2-p)$.

La condizione comune resta la stessa, se $f+\sqrt{g}$ cangisi in $f-\sqrt{g}$, perchè g è quadrato tanto di $-\sqrt{g}$, quanto di $+\sqrt{g}$.

Per la ragione stessa invariate rimangono le condizioni singolari. Ma la condizione singolare $q=2f(g-f^2)$ della equazione $x^3=px+q$ suppone, siccome q, e siccome il fattor $2f$ del prodotto ad esso ugual $2f(g-f^2)$, così pure il fattor $g-f^2$ positivo, per conseguenza $g>f^2$, e $\sqrt{g}>f$: il che rende $f-\sqrt{g}$ negativo. All'opposto la condizion singolare contraria $q=2f(f^2-g)$ della equazione $x^3+q=px$ suppone $f^2>g$, $f>\sqrt{g}$; onde $f-\sqrt{g}$ riesce positivo. Risulta dunque la differenza, che nelle esposte condizioni

La equazione $x^3=px+q$ ha la sola radice irrazionale $x=f+\sqrt{g}$: intendi in antico senso.

La equazione $x^3+q=px$ ha le radici irrazionali $x=f\pm\sqrt{g}$, ambedue positive.

Se mutisi f in $-f$, cioè se cerchinsi le condizioni, onde le due equazioni $x^3=px+q$, $x^3+q=px$ ricevano per x la forma $-f+\sqrt{g}$, la condizion comune si troverà mantenersi la medesima, siccome quella, nella quale f, $\sqrt{g}$ non entrano che elevati a quadrato. Ma l'equazione, che stabilisce le condizioni singolari si presenterà cangiata in $-f^3-3fg=-pf\pm q=-3f^3-fg\pm q$, dalla quale si tira $2f(\pm f^2\mp g)=q$: così che si permutano le condizioni singolari; laonde si ha

Condizione comune costante . . . . $p=3f^2+g$.

Condizioni singolari permutate.

Per la equazione $x^3=px+q\ldots q=2f(f^2-g)=2f(4f^2-p)$.

Per la equazione $x^3+q=px\ldots q=2f(g-f^2)=2f(p-4f^2)$.

La condizion singolare $q=2f(f^2-g)$ supponendo $f^2>g$, $f>\sqrt{g}$ rende $-f+\sqrt{g}$ negativo; per lo contrario la condizione singolare $q=2f(g-f^2)$ rendelo positivo supponendo $g>f^2$, $\sqrt{g}>f$. Dunque nelle esposte condizioni

La equazione $x^3=px+q$ non ha radici irrazionali: intendi positive.

La equazione $x^3+q=px$ ha la radice irrazionale $-f+\sqrt{g}$.

Facciamo $2f=a$, $p-4f^2=b$, sarà $p=4f^2+b=a^2+b$. Quinci nel caso, che per l'equazione $x^3+q=px$ vale la condizione $q=2f(p-4f^2)=ab$, che è quando ha la radice irrazionale $-f+\sqrt{g}$, ha eziandío per il num. 1.° la radice razionale $2f=a$; e nel caso che questa stessa condizione vale per l'equazione $x^3=px+q$, che è quando ammette la radice irrazionale $f+\sqrt{g}$, essa equazione $x^3=px+q$ è pur capace di essere per un numero razionale $2f$ negativamente preso tramutata in $x^3+q=px$, o sia ha una radice $-2f$ per lei negativa, positiva per la equazione $x^3+q=px$. Facciamo ora $b=4f^2-p$, e ne verrà $p+b=4f^2$, $\sqrt{(p+b)}=2f=a$. Allorchè dunque per l'equazione $x^3=px+q$ vale la condizione $q=2f(4f^2-p)$

$=ab$, che è quando non ha radici irrazionali positive, essendo per lei $-f+\sqrt{g}$ negativa, allora per il num. 2.° ha la radice razionale $2f=a$; e valendo la condizione medesima per la equazion $x^3+q=px$, che è quando ha questa le due irrazionali radici $f\pm\sqrt{g}$, ella è ancor convertita per un numero razionale $2f$ negativamente preso nella equazione $x^3=px+q$, cioè ha eziandío una radice per lei negativa $-2f$, positiva e $+2f$ per l'equazione $x^3=px+q$. Esempio sia $x^3+12=34x \ldots p=34=27+7=3\times 3^2+7$, $q=12=6\times 2=6(4\times 3^2-34)$, $f=3$, $g=7$, $f\pm\sqrt{g}=3\pm\sqrt{7}$, $2f=6$, $(2f)^3=6^3=216$, $34\times 2f=34\times 6=204$, $216+12=204$ non si verifica, ma bensì $-216+12=-204$, che convertesi in $204+12=216$; e perciò dicesi, che $-2f=-6$ converte l'equazione $x^3+12=34x$ nella equazione $x^3=34x+12$. Concordano le leggi di questo num. 4.° con quelle dell'antecedente num. 3.°

5.° Se nell'equazione $x^3=px+q$ sieno $p=z^2+y^2$, $q=2z^2y+2zy^2=2zy(z+y)$: sarà $x=z+y$. Poichè $(z+y)^3=z^3+3z^2y+3zy^2+y^3=z^3+z^2y+zy^2+y^3+2z^2y+2zy^2=(z^2+y^2)(z+y)+q=p(z+y)+q$.

6.° Sarà pure in essa equazione $x=z+y$, se sia $p=z^2+zy+y^2$ somma di tre numeri continuamente proporzionali, e sia $q=zy(z+y)$. Atteso che $(z+y)^3=z^3+2z^2y+2zy^2+y^3+z^2y+zy^2=(z^2+zy+y^2)(z+y)+zy(z+y)=p(z+y)+q$.

7.° Parimente sarà $x=z+y$, se sia $p=z^2+y^2-zy$, $\frac{1}{3}q=zy(z+y)$. Imperciocchè $(z+y)^3=z^3+y^3+3zy(z+y)=(z^2+y^2-zy)(z+y)+q=p(z+y)+q$.

8.° Se nella equazione $x^3+q=px$ sia $\frac{1}{3}p=z^2+y^2$, ed $\frac{1}{2}q=z^3+y^3$: sarà $x=z+y$. Poichè $(z+y)^3+q=(z+y)^3+2z^3+2y^3=3(z^3+z^2y+zy^2+y^3)=3(z^2+y^2)(z+y)=p(z+y)$.

9.° Se nell'equazione stessa sia $p = z^2 + zy + y^2$, ed $\frac{1}{3}q = zy(z+y)$: sarà $x = z - y$. Essendo che $(z-y)^3 = z^3 - y^3 - 3z^2y + 3zy^2 = (z^2 + zy + y^2)(z-y) - 3zy(z-y) = p(z-y) - q$.

10.° Dalla equazione $x^3 + q = px$ venendo $q = px - x^3$, se sia p un numero quadrato $= (c+d)^2$, si avrà $q = c^2x + 2cdx + d^2x - x^3$: posto $x = c$, divien $q = 2c^2d + cd^2$. Adunque viceversa, se nell'equazione $x^3 + q = px$ sia $p = (c+d)^2$, $q = 2c^2d + cd^2$, sarà $x = c$.

11.° Se nell'equazione $x^3 + q = px$ sia $\frac{p}{\sqrt[3]{q}} = h + l$, ed $lh^2 = q$, trovando fra $\sqrt[3]{q}$ ed l una media proporzionale geometrica t, sarà $x = t = \sqrt{.\,l\sqrt[3]{q}}$. Nel dimostrare la proposizione di Cardano l'amplificherò. Avendosi dalla equazione $p = x^2 + \frac{q}{x}$, si supponga $x^2 = lq^n$, e sarà $p = lq^n + l^{-\frac{1}{2}}q^{1-\frac{1}{2}n} = \left(l + l^{-\frac{1}{2}}q^{1-\frac{3}{2}n}\right)q^n$. Si faccia $l^{-\frac{1}{2}}q^{1-\frac{3}{2}n} = h$, sarà $q^{2-3n} = lh^2$. Si determini n ad $\frac{1}{3}$, e si avranno le particolari condizioni dell'autore. Esempio: $x^3 + 8 = 18x \ldots \frac{18}{\sqrt[3]{8}} = \frac{18}{2} = 8 + 1$, ed $8 \times 1^2 = 8$, $x = \sqrt{.\,8\sqrt[3]{8}} = \sqrt{16} = 4$.

12.° Trasponendo nella equazione $x^3 + q = px$ il termine $+q$, ne nasce $x^3 = px - q$, ed estraendo la radice cubica risulta $x = \sqrt[3]{(px - q)}$. Pongasi $x = \frac{h}{p}$, e si avrà $h = p\sqrt[3]{(h - q)}$. Dunque viceversa, se vaglia tra p, q questo rapporto, sarà $x = \sqrt[3]{(h - q)}$. Dividendo poi giusta la regola sotto il num. 3.° per $x - \sqrt[3]{(h-q)}$ li due membri dell'equazione $x^3 - \left(\sqrt[3]{(h-q)}\right)^3 = px - q - \left(\sqrt[3]{(h-q)}\right)^3$, che si riduce ad $x^3 - h + q = px - h$, si troverà per quoziente l'equazione di secondo grado $x^2 + x\sqrt[3]{(h-q)} + \sqrt[3]{(h-q)^2} = p$, donde si trarrà per altra radice $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(h-q)} + \sqrt{\left(p - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(h-q)^2}\right)}$.

13.° Se nella stessa equazione $x^3 + q = px$ sia $q = b\sqrt{(p+b)}$, vale dire se dato sia $x^3 + b\sqrt{(p+b)} = px$, sarà $x = \frac{1}{2}\sqrt{(p+b)} \pm \sqrt{\left(p - \frac{3}{4}(p+b)\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(p+b)} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p - \frac{3}{4}b\right)}$. È facile trasferire all'equazione $x^3 + q = px$ ciò, che nel num. 2.° si è dimostrato riguardo all' equazione $x^3 = px + q$. Si ha dall'equazione $x^3 + q = px$, trasportando q, e dividendo per x, $x^2 = p - \frac{q}{x}$, e quinci $x = \pm\sqrt{(p - \frac{q}{x})}$; onde se sia $q = ab$, e sia $-a = -\sqrt{\left(p - \frac{q}{-a}\right)} = -\sqrt{(p+b)}$, sarà $x = -a$. Ma posta l'equazione $x^3 + b\sqrt{(p+b)} = px$, essendo $q = b\sqrt{(p+b)}$, e perciò $a = \sqrt{(p+b)}$, trovasi effettivamente $-\sqrt{(p+b)} = -\sqrt{\left(p - \frac{b\sqrt{(p+b)}}{-\sqrt{(p+b)}}\right)}$; dunque $x = -\sqrt{(p+b)}$, ed è questa la radice negativa dell'equazione data. E dividendo giusta il caso terzo del num. 3.° $x^3 + (p+b)\sqrt{(p+b)} = px - b\sqrt{(p+b)} + (p+b)\sqrt{(p+b)}$ per $x + \sqrt{(p+b)}$, si ottiene la equazione di 2.° grado $x^2 - x\sqrt{(p+b)} + p + b = p$ somministrante le due radici positive
$x = \frac{1}{2}\sqrt{(p+b)} \pm \sqrt{\left(p - \frac{3}{4}(p+b)\right)}$.

14.° Le due equazioni $x^3 + q = px$, $x^3 = px + q$ per il num. 3.° delle soluzioni generali si sciolgono scambievolmente l'una per l'altra; laonde le regole speciali esposte per l'una tornan utili per l'altra mutuamente; nè fa mestieri che io mi dilunghi particolarmente nel trasporto, essendo ad ognuno agevole il farlo.

Cardano non presenta regole di soluzioni speciali rispetto all'equazione $x^3+px=q$. Ella di fatto non ammette radice reale di forma $\pm f\pm\sqrt{g}$; poichè sostituendo si ha $3f^2+g+p=0$, onde $g=-3f^2-p$, e per conseguenza $\sqrt{g}=\sqrt{(-3f^2-p)}$ immaginario.

Manipolo II.

Equazioni $x^3+q=nx^2 \; . \; . \; . \; . \; x^3+nx^2=q$.

Siccome delle tre equazioni $x^3+px=q$, $x^3+q=px$, $x^3=px+q$ le due $x^3+q=px$, $x^3=px+q$; così delle tre $x^3=nx^2+q$, $x^3+q=nx^2$, $x^3+nx^2=q$ le due $x^3+q=nx^2$, $x^3+nx^2=q$ sono quelle che si corrispondono in tramutarsi per negativa quantità posta in luogo di x l'una in l'altra. Tra le speciali soluzioni dell'equazione $x^3+q=nx^2$ sparge Cardano tre insegnamenti, che in verità sono tre generali teoremi, e con general vista sono da lui presentati. A questi concederò io i primi tre luoghi, e dopo averli esposti sotto generale aspetto li renderò speciali applicandoli a razional radice.

1.° Lo scioglimento dell'equazione $x^3+q=nx^2$ si riduce a dividere n coefficiente di x^2 in due parti tali, che il prodotto di una nel quadrato dell'altra sia $=q$. Poichè da $x^3+q=nx^2$ ne viene $q=(n-x)x^2$, dove è evidente che essendo x una parte di n, $n-x$ è l'altra. Se dunque scorrendo da 0 sino al numero n se ne trovi uno h tale che risulti $(n-h)h^2=q$, sarà $h=x$, o si avrà in h una radice razionale di $x^3+q=nx^2$; e se tra i numeri da 0 sino ad n non se ne trova alcuno di tal condizione, si dèe conchiudere che essa equazione $x^3+x=nx^2$ non ha radice razionale: ricordati d'intender sempre in antico senso di radice positiva. Tornerà comoda questa investigazione qualora sia n un piccol numero.

2.° Se dell'equazione $x^3 + q = n x^2$ sappiasi una radice qualunque $x = h$, prendasi per altra $x = \frac{1}{2}(n - h) + \sqrt{\left(\left(\frac{n-h}{2}\right)^2 + h(n-h)\right)}$. Tal risulta dividendo per $x - h$ ambedue i membri dell'equazione $x^3 - h^3 = n x^2 - q - h^3$, e sciogliendo l'equazion de' quozienti $x^2 + h x + h^2 = n x + n h$. E quantunque Cardano sopprima questa dimostrazione, non si può dubitare, atteso il metodo da lui tenuto nelle risoluzioni da me poste sotto il num. 3.° del Manipolo I., che la qui esposta sia stata la via, per cui giunse alla regola. Esempio: $x^3 + 12 = 5 x^2$. Radice razionale è $x = 2$; da questa si ha la irrazionale $x = \frac{1}{2}(5 - 2) + \sqrt{\left(\left(\frac{5-2}{2}\right)^2 + 2(5-2)\right)} = \frac{3}{2} + \sqrt{8\frac{1}{4}}$. Cardano estende la regola od il teorema a trovar reciprocamente per la irrazionale radice $\frac{3}{2} + \sqrt{8\frac{1}{4}}$ la razionale 2. Di fatto posto $h = \frac{3}{2} + \sqrt{8\frac{1}{4}}$ ne viene $n - h = 5 - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{8\frac{1}{4}}\right) = \frac{7}{2} - \sqrt{8\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{2}(n-h) = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{8\frac{1}{4}}$, $\left(\frac{n-h}{2}\right)^2 = \frac{82}{16} - \frac{7}{4}\sqrt{8\frac{1}{4}}$, $h(n-h) = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{8\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{7}{2} - \sqrt{8\frac{1}{4}}\right) = -3 + 2\sqrt{8\frac{1}{4}}$, onde $\sqrt{\left(\left(\frac{n-h}{2}\right)^2 + h(n-h)\right)} = \sqrt{\left(2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{8\frac{1}{4}}\right)}$, e per la formola del capo VII, §. III, pag. 241 del volume I., $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{8\frac{1}{4}}$, conseguentemente $\frac{1}{2}(n-h) + \sqrt{\left(\left(\frac{n-h}{2}\right)^2 + h(n-h)\right)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{8\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{8\frac{1}{4}} = 2$.

3.° L'equazione $x^3 + q = n x^2$ ha sempre due radici, e sempre il numero n in due maniere può dividersi in due parti, l'una delle quali moltiplicata nel quadrato dell'altra risulti un prodotto $= q$. Poichè dovendo essere $h < n$, così esigendo il valore positivo di $q = x^2(n-x) = h^2(n-h)$, non può accadere, che $\frac{1}{2}(n-h) + \sqrt{\left(\left(\frac{n-h}{2}\right)^2 + h(n-h)\right)}$ diventi negativa.

4.° Dall'equazione $x^2 + hx + h^2 = nx + hn$ cavasi, sciogliendo, eziandío $x = \frac{1}{2}(n-h) - \sqrt{\left(\left(\frac{n-h}{2}\right)^2 + h(n-h)\right)}$; ma questo valore non può esser positivo, se non nel caso, che h sia negativo. Dunque l'equazione $x^3 + q = nx^2$ non può avere a sue radici positive le due irrazionali forme $x = c + \sqrt{d}$, $x = c - \sqrt{d}$, ed insieme il numero positivo h, ma sarà h un numero, che negativamente preso la tramuterà in $q = nx^2 + x^3$. Per le quali cose essa equazione non ammette, rispetto alla radice di forma $c + \sqrt{d}$, che due combinazioni, e ciascheduna ristretta al congiungimento di essa con un'altra sola radice positiva.

Combinazione 1.ª $x = h$ numero razionale . . . . $x = \frac{1}{2}(n-h) + \sqrt{\left(\left(\frac{n-h}{2}\right)^2 + h(n-h)\right)} = \frac{1}{2}(n-h) + \frac{1}{2}\sqrt{(n-h)(n+3h)}$.

Combinazione 2.ª $x = \frac{1}{2}(n+h) + \sqrt{\left(\left(\frac{n+h}{2}\right)^2 - h(n+h)\right)}$ $= \frac{1}{2}(n+h) + \sqrt{(n+h)(n-3h)}$...... $x = \frac{1}{2}(n+h) - \sqrt{\left(\left(\frac{n+h}{2}\right)^2 - h(n+h)\right)} = \frac{1}{2}(n+h) - \frac{1}{2}\sqrt{(n+h)(n-3h)}$.
La combinazion prima richiede, che sia positivo $n-h$, cioè che sia $h < n$, onde non diventi immaginario il radicale; ma tal combinazione non può mai mancare, posto che h sia razionale radice dell'equazione, di cui si tratta, dovendo qualunque radice di essa esser parte di n, e conseguentemente di n minore, come al fine del num. antecedente si è osservato. La seconda combinazione esige $3h < n$, ovvero

$h < \frac{1}{3} n$: cioè, qualora h sia numero, che tramuti l'equazione $x^3 + q = n x^2$ nella $x^3 + n x^2 = q$, la equazione stessa $x^3 + q = n x^2$ non avrà radici positive se non sia $h < \frac{1}{3} n$.

Sostituendo nella espressione di $q = (n - x) x^2$ in luogo di x le forme $c \pm \sqrt{d}$, agevol è determinare il rapporto tra q ed n, onde l'equazione $x^3 + q = n x^2$ riceva a sue radici $x = c \pm \sqrt{d}$. Fatta la sostituzione si ha $q = (n - c \mp \sqrt{d})(c^2 + d \pm 2 c \sqrt{d}) = (n - c)(c^2 + d) - 2 c d \pm (2 c (n - c) - c^2 - d) \sqrt{d}$. Supponendosi q razionale, deve distruggersi il coefficiente dell'irrazionale $\sqrt{d}$, esser cioè $2 c (n - c) - c^2 - d = 0$, donde ricavasi $n = \frac{3 c^2 + d}{2 c}$; e rimanendo $q = (n - c)(c^2 + d) - 2 c d$, con trasferirvi il trovato valor di n risulta $q = \frac{(c^2 - d)^2}{2 c}$; e se vogliasi eliminar d, ottiensi $q = 2 c (n - 2 c)^2$, con che componesi l'equazione $x^3 + 2 c (n - 2c)^2 = n x^2$, della quale è radice $x = c \pm \sqrt{2 c \left(n - \frac{3}{2} c \right)}$. Esempio: $x^3 + 48 = 10 x^2 \ldots\ 48 = 2 \times 6 \times (10 - 12)^2 \ldots\ x = 6 \pm \sqrt{2 \times 6 \left(10 - \frac{3}{2} 6 \right)} = 6 \pm \sqrt{12}$.

5.° L'equazione $x^3 + n x^2 = q$ ricusa le radici $x = c \pm \sqrt{d}$; ma in iscambio ammette la radice $x = - c + \sqrt{d}$ ricusata dall'equazione $x^3 + q = n x^2$, e ciò sotto il medesimo rapporto fra q ed n espresso per $q = 2 c (n - 2 c)^2$, siccome apparirà facendo la sostituzione, ed un calcolo simile al superiore, per il quale in fine raccoglierassi aver l'equazione $x^3 + n x^2 = 2 c (n - 2 c)^2$ la radice irrazionale $x = - c + \sqrt{2 c \left(n - \frac{3}{2} c \right)}$, avendo insieme la razionale $n - 2c$.

6.° Se nell'equazione $x^3 + n x^2 = q$ sia $n = k + l$, $q = k l$, sarà $x = - \frac{1}{2} k + \sqrt{k \left(l + \frac{1}{4} k \right)}$. Questo è un caso contenuto nella formola generale or ora stabilita. Facciasi $2 c = k$, ed $n-2c=l$; ne segue $q=kl^2$, $n=k+l$, $x=-\frac{1}{2}k+\sqrt{k\left(l+\frac{1}{4}k\right)}$.

7.° Essendo nell'equazione $x^3+nx^2=q$ il numero $q=a-b$, ed il coefficiente n di $x^2=\frac{3\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; sarà $x=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$. Di fatto, sostituendo, si trova $a-3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)-b+n\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=q$; e verificasi questa equazione, tostochè pongasi $a-b=q$, e $3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)=n\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$, donde $\frac{3\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=n$. Esempio: $x^3+22\frac{1}{2}x^2=98\ldots 98=125-27$, $22\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt[3]{125\times 27}}{\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{27}}=\frac{3\times 15}{2}$.

Manipolo III.

Equazioni di terzo grado complete.

1.° È sempre in nostra podestà ridurre le equazioni di terzo grado complete, o sia di quattro termini fornite, in x^3, x^2, x, e mero numero, ad equazioni di tre termini, prive del termine in x^2. Rappresentiamo in genere una qualunque equazione cubica di quattro termini per $x^3+ax^2+bx+c=0$. A togliere il secondo termine ax^2 prendiamo un'altra incognita x' tale che sia $x=x'-\frac{1}{3}a$: sostituendo nasce l'equazione $x'^3+\left(b-\frac{1}{3}a\right)x'+\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=0$, che citerò col nome di equazione *mutila*. Pertanto una equazione cubica di quattro termini ammetterà a radici sue positive le due forme $f\pm\sqrt{g}$, o la forma $-f+\sqrt{g}$, se 1.° la sua mutila sarà un'equazione della forma $x^3+q=px$, ovvero della forma $x^3=px+q$, essendo queste delle tre equazioni cubiche spoglie del secondo termine le due sole, che ammettano le segnate forme di radici, ricusandole del tutto l'equazione $x^3 + px = q$; se 2.° l'equazion mutila, essendo di una delle due prescritte forme, abbia una radice positiva, o negativa razionale con le altre condizioni nel Manipolo primo dimostrate in esse forme di equazioni necessarie, onde le esposte forme di radici non divengano immaginarie, nè tampoco negative; se 3.° supponendo $x' = h \pm \sqrt{k}$, ovvero $x' = -h + \sqrt{k}$ i valori delle radici, o della radice irrazionale positiva dell'equazione mutila, restino $h - \frac{1}{3}a \pm \sqrt{k}$, $-h - \frac{1}{3}a + \sqrt{k}$ quantità positive. Una di queste tre condizioni che manchi, la equazione di quattro termini non avrà radici delle segnate forme. Osserverò in esteso, che l'equazione mutila non può cadere nella forma $x^3 + px = q$ ricusante a radici le segnate forme, ricevere cioè non può ne' suoi termini la disposizione $x'^3 + \left(b - \frac{1}{3}a\right)x' = \frac{1}{3}a\left(b - \frac{2}{9}a^2\right) - c$, ed in tale disposizione verificarsi, se non primieramente essendo b, cioè il coefficiente di x nella equazione di quattro termini positivo; e secondamente $b > \frac{1}{3}a$, cioè di un terzo del coefficiente di x^2 maggiore. Questo requisito rende $b - \frac{2}{9}a^2$ positivo, e dovendo essere tutto il complesso $\frac{1}{3}a\left(b - \frac{2}{9}a^2\right) - c$ positivo, si richiederà per terzo, o che a sia positivo, c negativo; o, che essendo c positivo, sia pur a positivo, e di tal valore, che riesca $\frac{1}{3}a\left(b - \frac{2}{3}a^2\right) > c$; o che, essendo a negativo, sia pur c negativo, e positivamente prendendo, sia $c > \frac{1}{3}a\left(b - \frac{2}{9}a^2\right)$. Continui il Lettore sì fatta analisi discendendo più al particolare, se gli piace.

2.° Distinguansi nelle complete cubiche equazioni sette diverse forme, o distribuzioni di termini, immaginando dapprima ciascuno dei quattro termini da sè solo da una parte del segno di uguaglianza, onde ne nascono quattro forme; combinando di poi i quattro termini a due a due, il che porge sei aggregati, di ogni due de' quali, uno di qua, l'altro di là del segno $=$, componendo un'equazione, ne risultano sei equazioni, che sostanzialmente però a tre si riducono, non differendo, a due a due, l'una dall'altra, che nella inversa posizione de' membri a destra, e sinistra. Or tra le sette diverse forme una ve ne ha, che ammette a radice la semplice irrazionale quantità $\sqrt{t}$, cioè l'equazione $x^3 + n x^2 = p x + q$: così $x^3 + 3 x^2 = 5 x + 15$ ha per radice $x = \sqrt{5}$. È agevole vedere quali debbano in genere essere n, p, q, onde la radice irrazionale semplice $\sqrt{t}$ abbia luogo: l'equazione esser dovrà della struttura $x^3 + n x^2 = t x + n t$. E rendesi eziandio manifesto non potervi essere altra forma di equazione cubica di quattro termini, che abbia per radice una irrazionale semplice, qual $\sqrt{t}$.

3.° L'equazione $x^3 + p x = n x^2 + q$ può avere radice della forma $a + \sqrt[3]{b}$, o della forma $a - \sqrt[3]{b}$: così $x^3 + 12 x = 6 x^2 + 11$ ha per radice $x = 2 + \sqrt[3]{3}$; e l'equazione $x^3 + 12 x = 6 x^2 + 5$ ha $x = 2 - \sqrt[3]{3}$. La struttura in genere dell' equazione esposta per avere a radice $a + \sqrt[3]{b}$ debbe essere $x^3 + 3 a^2 x = 3 a x^2 + a^3 + b$; e per avere a radice $a - \sqrt[3]{b}$ dev'essere $x^3 + 3 a^2 x = 3 a x^2 + a^3 - b$. Quella, e questa struttura si determinano, sostituendo $a + \sqrt[3]{b}$, $a - \sqrt[3]{b}$ in luogo di x nella equazione $x^3 + p x = n x^2 + q$, e formando tre distinte equazioni, dei termini razionali l'una, dei coefficienti di $\sqrt[3]{b}$ la seconda, e di quelli di $\sqrt[3]{b^2}$ la terza, mercè le quali equazioni verranno assegnati i rapporti di n, p, q.

4.° L'equazione $x^3 + n x^2 + p x = q$ ammette radice della forma $-a + \sqrt[3]{b}$, e l'avrà se sia della struttura $x^3 + 3 a x^2 + 3 a^2 x = b - a^3$.

5.° Le equazioni $x^3+x^2+49=35x$, $x^3+2x^2+56=41x$, $x^3+3x^2+63=47x\ldots$, nelle quali il coefficiente di x^2 cresce successivamente dell'unità, il coefficiente di x cresce di 6, il numero di 7, hanno tutte per radice $x=3+\sqrt{2}$, ancorchè proseguiscasi all'infinito.

Forminsi le equazioni $x^3+x+7=5x^2$, $x^3+2x+5\frac{5}{6}=5\frac{1}{6}x^2$, $x^3+3x+4\frac{4}{6}=5\frac{2}{6}x^2\ldots\ldots$ all'infinito, con legge di accrescere di 1 il coefficiente di x, di diminuire di $1\frac{1}{6}$ il numero, e di accrescere di $\frac{1}{6}$ il coefficiente di x^2: trovasi, che tutte ricevon per radici $x=3\pm\sqrt{2}$.

A tutte le equazioni $x^3+x+\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}x^2$, $x^3+2x+\frac{3}{4}=4\frac{3}{4}x^2$, $x^3+3x+1=5x\ldots$, nelle quali il coefficiente di x va via via crescendo di 1, il numero di $\frac{1}{4}$, e parimenti il coefficiente di x^2, è comune la radice $x=2+\sqrt{5}$.

La prima serie di equazioni si raccoglie, ed abbraccia nella formola $x^3+(1+m)x^2+49+7m=(35+6m)x$. L'equazione si verifica per $x=3+\sqrt{2}$ posto $m=0$, come esperimentando si vedrà; laonde per verificarsi in generale, qualunque numero sia m, basta che $mx^2+7m=6mx$ si verifichi pure per $x=3+\sqrt{2}$, e così è di fatto. La seconda infinita schiera di equazioni si racchiude nella formola $x^3+(1+m)x+7-1\frac{1}{6}m=\left(5+\frac{1}{6}m\right)x^2$, la quale divisa nelle due $x^3+x+7=5x$, $mx-1\frac{1}{6}m=\frac{1}{6}mx^2$, in ciascuna delle parti riceve avveramento per $x=3\pm\sqrt{2}$; per conseguenza in intero. La formola generale, sotto cui comprendesi la terza infinita progressione di equazioni, è $x^3+(1+m)x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}m=\left(4\frac{1}{2}+\frac{1}{4}m\right)x^2$, nella quale essendo $x=2+\sqrt{5}$ radice della parte determinata x^3+

$x + \frac{1}{2} = 4 \frac{1}{2} x^2$, non resta fuorchè sia altresì radice della parte indeterminata $m x + \frac{1}{4} m = \frac{1}{4} m x^2$, come facilmente esser si trova.

Cardano al capo XXV dell'*Arte magna* intitolato *De capitulis imperfectis, et specialibus*, incomincia con avvertire, che le regole di soluzione, che egli è per esporre, diconsi generali, *dicuntur generales*, per due cagioni: la prima perchè hanno costantemente effetto nelle assegnate condizioni; la seconda *quia regula exhaurit aestimationis* (*radicis*) *genus universum*, cioè, per quanto io intendo, la regola senza limite si estende al genere della forma della radice, ed in tutte le singolari determinazioni, in intero, in universalità lo abbraccia. Alle quali però ragioni di chiamar esse regole generali soggiugne, che sono elleno particolari in quanto non valevoli a sciogliere ogni proposta quistione, che cubica equazione importi. Per l'opposto nello Scolio al capo LIII del libro *De Regula Aliza* nota Cardano medesimo, che le regole tutte del capo XXV dell'*Arte magna*, *quas vocant speciales*, sono generali per le ragioni sopra addotte, non essendo speciali, che nel senso testè esposto. Pare che l'idea delle accennate regole non fosse comunemente abbastanza chiara, e ben fissa, e che, per non distinguerne i diversi aspetti, chi errasse in voler loro negato ogni senso di generalità, e chi in attribuirlo alle medesime oltre dovere; e che Cardano mirato abbia a correggere e gli uni, e gli altri.

Ma intanto quel *dicuntur*, e quel *vocant* inducono a pensare, che quelle regole medesime del capo XXV dell' *Arte magna* fossero di già note, e da altri, che da Cardano, inventate; e sono le più belle, ed in riguardo alla teoría delle equazioni le più rilevanti, da me distribuite nel primo, e nel secondo Manipolo. Io nulla proferirò su l'inventore, o su gli inventori veri di esse: non ho voluto, che per colpa di mio silenzio il Lettor mio corresse ad attribuire a Cardano invenzioni, che non gli spettino: egli avrà avuto il merito di alcune; certamente gli si debbe quello di averle raccolte, ed a' posteri tramandate. Sarebbervi nel numero loro quelle da Frate Luca nello squarcio, che al principio di questo Capo io trascrissi, accennate? E perchè no; almen tra le più semplici?

Di tutte le speciali soluzioni ne' tre Manipoli per me raccolte, ed ordinate avesse Montucla toccato almen quelle, che i primi germi racchiudono di bei teoremi intorno alla natura delle equazioni! Ma neppur ciò. Non solo poi sciolse Cardano delle equazioni di terzo grado le varie forme propie, ma le *derivative* ancora, due per ciascuna di quelle: come rispetto alla $x^3+px=q$ le due $x^6+px^2=q$, $x^9+px^3=q$; rispetto ad $x^3=nx^2+q$ le due $x^6+nx^4=q$, $x^9+nx^6=q$; rispetto ad $x^3+nx^2+px=q$ le due $x^6+nx^4+px^2=q$, $x^9+nx^6+px^3=q$ .... e così dicasi relativamente ad ogni altra forma propria di tre, o quattro termini.

CAPO III.

Industrie degli antichi analisti per isfuggire ne' problemi le equazioni di alto grado.

I primi analisti quanto men forniti di lumi su le equazioni, e meno avanzati nello scioglimento loro, tanto più di frequente si trovaron dai problemi posti in affanno, e smania per i limiti, entro i quali sentivansi ristretti. Ma non di rado con aguzzar d'ingegno seppero togliersi di travaglio, sottili industrie inventando, con le quali alla sfera dell' analisi loro riuscirono ad abbassare problemi a primo aspetto appartenenti a sfera più alta. Debito si è della storia intesa a mostrare la gradazione nell'arte analitica il conservare siffatte industrie; ed io me lo fo tanto maggiore, quanto che lo storico delle matematiche francese Montucla non se ne è fatto alcuno, non onorandole neppur di un cenno. Ben però meritan elleno, la maggior parte almeno, di essere apprezzate per lo ingegno, onde risplendono; e molte ve ne ha, che di nostro interesse pur è di non lasciar in obblivione, potendo a noi eziandio, ed ai posteri nostri tornar di uso e giovamento. E non sarebbe di fatto una perdita di fatica biasimevole, ed una ineleganza al fino analitico gusto spiacentissima lo sciogliere con una analisi superiore un problema, che, usata certa industria, sciogliere si potesse con una analisi inferiore? Sebbene adunque per l'ampliamento dell'analitica scienza ed arte non ci troviamo noi alle angustie, e necessità di ripieghi, alle quali i primi analisti trovavansi; volendo però la saggia economía della fatica, e l'eleganza, che un problema qualunque si sciolga con l'equazione di minor grado possibile, non sarà inutile l'esporre le industrie, che quelli inventarono, e posero in opera per assoggettare all'analisi delle equazioni di secondo grado o di terzo, problemi che sembrano richiedere, e per via comune trattati presentano a sciogliere equazioni rispettivamente più alte. Per non farne un ammasso confuso, le distribuirò in due classi.

Classe di antiche industrie I.

Industrie di posizione.

Posizione uguale. Questa industria, tanto più elegante, quanto più semplice, se non fu la prima ad essere inventata, è certo delle più antiche, trovandosi da Leonardo Pisano usata, come dimostra l'esempio, che io ne ho recato nel capo I, §. III, prob. II del I vol. Ad ispiegar qui in che propriamente consista, senza che il Lettore abbia bisogno di riportar colà l'occhio, eccone un altro tolto dalla quistione V sotto il capo XXXVIII dell'*Arte magna* di Cardano. Si facciano di 8, o generalmente del numero a due parti, delle quali congiungendo in un aggregato i quadrati, in altro i cubi, indi moltiplicando l'un aggregato per l'altro, il prodotto sia uguale al dato numero h, particolarmente ad 8128. Ponendo, come dapprima ci si suggerisce alla mente, una parte $= x$, l'altra $= a - x$, s'incorrerebbe nell'equazione completa di quarto grado $6ax^4 - 12a^2x^3 + 11a^3x^2 - 5a^4x + a^5 = h$. Si ponga ora la prima parte $= \frac{1}{2}a + x$, la seconda $\frac{1}{2}a - x$, e si conseguirà l'equazione $6ax^4 + 2a^3x^2 + \frac{1}{8}a^5 = h$, di quarto grado, è vero, anch'essa, ma all'analisi di quelle di secondo soggetta. Chiamasi da Cardano tale industria di ugual posizione, per dividersi ugualmente, e porsi così diviso il numero a nelle espressioni delle due cercate parti di lui.

Non si creda però che sempre giovi siffatta industria; chè siccome alle volte reca vantaggio la posizione uguale, e riesce svantaggiosa la ordinaria da Cardano distinta col nome di semplice; così reciprocamente altre volte torna giovevole questa, e produce incomodo quella. Si debba dividere il numero a in due parti tali, che il quadrato della maggiore sia medio proporzionale tra il prodotto di ambe, ed un multiplo na dell'intero a. Proviamo a porre la parte maggiore $= \frac{1}{2}a + x$, la minore $= \frac{1}{2}a - x$, e dovrà essere in continua proporzione $\left(\frac{1}{2}a + x\right)\left(\frac{1}{2}a - x\right) : \left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 : na$, onde ne segue $x^4 + 2ax^3 + \left(\frac{3}{2}a^2 + na\right)x^2 + \frac{1}{2}a^3x + \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{4}na^3 = 0$, equazione completa di grado quarto. Che se per metodo comune pongasi la maggior parte $= x$, la minore $= a - x$, ed istituita la continua proporzione $(a - x)x : x^2 : na$, se ne tiri l'equazion corrispondente, sarà questa $x^3 + nax - na^2 = 0$, equazione di solo terzo grado, e del secondo termine priva. Dunque in questo problema la posizione uguale apporta svantaggio, e la buona si è la posizione semplice, od ordinaria. Osserva pertanto Cardano, che la ugual posizione riesce più utile della semplice nelle quistioni, nelle quali le parti ricevono una uguale moltiplicazione; ed accade il contrario in quelle, nelle quali la ricevono diversa. *Positio aequalis utilior est positione simplici in omnibus quaestionibus, ubi partes aequaliter multiplicantur; secus, ubi inaequaliter.* Così egregiamente egli nel capo XXXII di sua *Arte magna*, che è quello, nel quale di proposito tratta della industria, da lui appellata *Regola di ugual posizione*. Nè il Lettore richiederà da me, che moltiplichi parole a dichiarargliene la ragione, essendo da sè manifesta.

Posizione recante a frazioni reciproche. Date le somme delle 1.ª e 4.ª, e delle 2.ª e 3.ª di quattro continue proporzionali, determinar le grandezze loro? Se si esprimano le quattro continue proporzionali così: t, tq, tq^2, tq^3, e si ponga giusta le condizioni del problema $t + tq^3 = m$, $tq + tq^2 = n$; cavando, e paragonando i due valori di $t = \frac{m}{1+q^3} = \frac{n}{q+q^2}$, ne risulterebbe un equazione di terzo grado $nq^3 - mq^2 - mq + n = 0$. Otterrebbesi un'equazione di secondo grado in t, cioè $t^2 - mt + \frac{n^3}{m+3n} = 0$, eliminando q; ma qualunque si scelga dei metodi di eliminazione, importa una fatica non lieve. E non si deve schivare se si può? Certamente. E si può di fatto. Si chiami x la seconda delle richieste quantità proporzionali, e sarà tosto $n - x$ la terza, sarà poi quinci $\frac{x^2}{n-x}$ la prima, ed $\frac{(n-x)^2}{x}$ la quarta; onde $\frac{x^2}{n-x} + \frac{(n-x)^2}{x} = m$. Ecco nelle frazioni costituenti il primo membro due frazioni reciproche. Il vantaggio di esse si è, che riducendole alla medesima denominazione, li cubi di x per contrarietà di segni si elidono, e ne proviene subito l'equazione di secondo grado $x^2 - nx + \frac{n^3}{m+3n} = 0$, dalla quale ottiensi il valore di x, e quindi si tirano i valori della prima, della terza, della quarta, che unitamente alla x rappresenterò nella schiera u, x, y, z, ed i rispettivi valori saranno

$$u = \tfrac{1}{2}m - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{n^3}{m+3n}\right)}; \quad x = \tfrac{1}{2}n - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n^2 - \frac{n^3}{m+3n}\right)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}n + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n^2 - \frac{n^3}{m+3n}\right)}; \quad z = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}m^2 - \frac{m+3n}{n^3}\right)}.$$

Questa soluzione trovasi nella Distinzion sesta del volume di Frate Luca; nè può darsene una più facile, ed elegante. Mi è sembrato bene il distinguer col titolo di *Posizione a frazioni reciproche recante*, l'industria, che le serve di base.

Posizione di aggregato, o raccolta. Son due nomi, ambedue da Cardano usati, ai quali aggiugne pur egli quello di *Regola del doppio*, per racchiudersi due incognite in una. Si desiderino due numeri x, y di tal condizione, che $x^2 + y^2 = a$; $xy + x + y = h$. Trattando per via comune queste due equazioni, e prendendo a determinare immediatamente uno de' cercati numeri, per esempio y, si monterà ad una equazione completa di quarto grado. Poichè avendosi dalla seconda equazione $x = \frac{h-y}{y+1}$ portato questo valore nella prima, e tolte le frazioni ne sorge l'equazione $y^4 + 2y^3 + (2-a)y^2 - 2(a+h)y + h^2 - a = 0$, ed una stessa stessissima equazione risulterebbe in x, lui volendo immediatamente determinare. Ma dicasi z l'aggregato dei due cercati numeri, e ritengasi per uno di essi la denominazione x; sarà l'altro $z - x$, e per la seconda condizione si avrà $x(z-x) + z = h$, onde $x^2 - zx = z - h$, e quinci

$$x = \frac{1}{2}z + \sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2 + z - h\right)};\ z - x = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2 + z - h\right)}.$$

Di queste espressioni de' due cercati numeri si facciano i quadrati, ed insieme si congiungano; ed adempiendo la prima condizione, ne nascerà l'equazione $z^2 + 2z - 2h - a = 0$, che ci porge $z = -1 + \sqrt{(1 + 2h + a)}$, mercè del qual valore dell'aggregato z, a determinato valor tosto pur vanno le espressioni per esso dei due bramati numeri x, $z - x$. Laonde, non importando questo calcolo che lo scioglimento di due equazioni di secondo grado, manifesto si rende il vantaggio della via, per cui la posizione su l'aggregato conduce a confronto della più comune, che tosto si presenta, fatte separatamente le due particolari posizioni su i cercati numeri.

Nella stessa maniera, e con facilità pari sciogliesi il problema, se in luogo di aggiugnere la somma dei numeri desiderati al prodotto loro, chiedasi, che aggiunta ella sia alla somma dei quadrati di essi medesimi; cioè, se le condizioni, in vece di essere $x^2+y^2=a$, $xy+x+y=h$, sieno $x^2+y^2+x+y=a$, $xy=h$. Posto l'aggregato $x+y=z$, e quinci $y=z-x$: sarà $xy=zx-x^2=h$, donde cavasi $x=\frac{1}{2}z+\sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2-h\right)}$, $z-x=y=\frac{1}{2}z-\sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2-h\right)}$. Perciò $x^2+y^2=z^2-2h$; così che, aggiungendo $z=x+y$, proviene $z^2+z-2h=a$, e risolvendo, ottiensi $z=-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}+2h+a\right)}$, valor da introdursi nelle espressioni di x, y per z.

Cardano nel capo XXXV dell'*Arte magna* distingue due regole di aggregato, e prendendo a spiegar la seconda, la magnifica siccome della prima di gran lunga più sottile, per fare insieme due posizioni, e due conversioni, *facit duas positiones simul et duas conversiones*. E racconta di averla cavata da un frammento di Frate Luca, che, perito alla memoria degli algebristi, per sorte venuto gli era alle mani; sì malconcio però, che appena potevasi leggere, e raccappezzar della regola l'idea: ad onta di che, ostinandosi ne' tentativi, gli era dopo molte fatiche riuscito di raccogliere il concetto, e piena formarsene teoría. Il primo dei problemi da me qui trasportati sta alla testa di quelli da Cardano schierati sotto la regola prima, ed il secondo alla testa di quelli da lui posti sotto la seconda. Gli ho io ambedue sciolti nella stessa maniera, seguendo precisamente la regola seconda cioè di Frate Luca; tanto più, che sebben piaciuto sia a Cardano di collocare il primo sotto la regola prima, avverte però egli medesimo, che esso, e parimenti altri tre, che lo seguono nella stessa schiera sotto la prima regola, tratti per lui furono dallo scritto di Frate Luca. La soluzione presso il Cardano conformata al tenore della da lui detta prima regola non differisce dalla sopra da me esposta, che in questo: che in luogo di cavare le espressioni prime di x, $z-x$ per z, ancor ignoto, con sciogliere l'equazione di secondo grado in x, si vale egli del teorema 5.° del II di Euclide, il quale insegna, che il rettangolo delle parti ineguali di una quantità in un con il quadrato della intermedia si uguagliano al quadrato della metà; donde facilmente deducesi, che il quadrato della intermedia solo è uguale al quadrato della metà, meno il prodotto delle disuguali parti, e la semplice intermedia uguale alla radice del residuo del quadrato della metà diminuito del prodotto delle parti disuguali. Applicando ciò al caso del primo problema, dove la quantità a dividersi è z, il prodotto delle parti disuguali $=h-z$, se ne deduce tostamente la intermedia $=\sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2+z-h\right)}$, e quinci la parte maggiore $\frac{1}{2}z+\sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2+z-h\right)}$, la minore $\frac{1}{2}z-\sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2+z-h\right)}$: e così fa Cardano. In genere, esaminate con diligenza tutte le soluzioni sotto l'una e l'altra delle due regole da lui stabilite, non so scorgervi altra differenza, fuorchè: in quelle sotto la prima, a piantare le primitive espressioni di x, $z-x$ per z ignoto, chiama in ajuto, e adopera teoremi altrove dimostrati; laddove in quelle sotto la seconda scioglie una equazione di secondo grado, e tutta la soluzione del problema da capo a fondo è analitica. Nel rimanente il tornio delle soluzioni è affatto lo stesso; e la esposta differenza non toccando all'intrinseco della industria della posizione di aggregato, ma essendole estrinseca, non veggo perciò una soda ragione di distinguer due regole, nè nella seconda il merito di tanto sopra l'altra essere celebrata, ed esaltata. Utile però ci torna in riguardo alla storia il racconto di Cardano, facendoci sapere, che la industria di posizione di aggregato è delle più antiche, poichè Frate Luca la usò, e la trattò sottilmente.

Posizione per + e — proporzionata. Nel libro della *Pratica generale dell'Aritmetica* capo LXVI, quistione 117, gloriasi Cardano d'esserne lui l'inventore. A metterne in piena luce lo spirito cerchinsi due numeri, la differenza de' quali sia d, e prendendo il quadrato di una parte $\frac{m}{n}$ del maggiore, ed il quadrato di una parte $\frac{t}{u}$ del minore, ed alla somma di tali quadrati aggiugnendo la radice di essa somma medesima, provenir ne debba H. Attenendoci al più ovvio, ed usitato metodo, con denominare z, $z-d$ i due cercati numeri incorreremmo nella equazione

$$\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{t^2}{u^2}\right)z^4-\frac{4dt^2}{u^2}\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{t^2}{u^2}\right)z^3+\left(\frac{4t^4d^2}{u^4}+\left(\frac{2t^2d^2}{u^2}-2H-1\right)\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{t^2}{u^2}\right)\right)z^2$$
$$+\frac{2t^2d}{u^2}\left(1+2H-\frac{2t^2d^2}{u^2}\right)z+\left(\frac{t^2d^2}{u^2}-H\right)^2-\frac{t^2d^2}{u^2}=0.$$

Vedesi qual complicata equazione sia questa e per il quarto grado, a cui sollevasi, e per i composti coefficienti di tutti i termini. A schivarla mercè della Cardanica industria, si volga la mente alla ragione tra le frazioni $\frac{m}{n}$, $\frac{t}{u}$ esprimenti quali parti a prender s'abbiano dei cercati numeri. La ragione di tali frazioni è quella di $mu:nt$, e la ragione dei quadrati loro, ai quali debbono alzarsi, sarà quella di $m^2 u^2 : n^2 t^2$. Or in questa ultima ragione dividasi l'assegnata differenza d dei numeri desiderati, e le parti verranno ad essere $\frac{m^2 u^2 d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}$, $\frac{n^2 t^2 d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}$. Si ponga pertanto il maggiore dei cercati numeri $= x + \frac{n^2 t^2 d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}$, il minore $= x - \frac{m^2 u^2 d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}$: ecco le posizioni, che Cardano denomina per $+$, e $-$ proporzionate. La proprietà loro si è, che pigliando della prima la parte $\frac{m}{n}$, della seconda la parte $\frac{t}{u}$, e formando i quadrati, e questi unendo in un aggregato, si vanno per i contrarj segni a distrugger fra loro i due rettangoli contenenti x; onde poscia elevando a quadrato la equazione del problema, per togliere il radicale, che involge, nasce, sì, una equazione di quarto grado, ma senza i termini in x^3, ed in x, e della natura in fondo di quelle di secondo grado. Di fatto l'equazion del problema si è $\left(\frac{m}{n} x + \frac{t^2 m n d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{u} x - \frac{m^2 t u d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}\right)^2 +$

$$\sqrt{\left(\left(\frac{m}{t} x + \frac{t^2 m n d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{u} x - \frac{m^2 t u d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}\right)^2\right)} = H;$$

che effettuati i quadrati si semplifica in

$$\left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{t^2}{u^2}\right) x^2 + \frac{t^2 m^2 d^2}{m^2 u^2 + n^2 t^2} + \sqrt{\left(\left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{t^2}{u^2}\right) x^2 + \frac{t^2 m^2 d^2}{m^2 u^2 + n^2 t^2}\right)} = H,$$

e lasciato solo nel primo membro il radicale; e poi quadrati i membri, si alza ad

$$x^4 + \left(\frac{2 m^2 u^2 t^2 n^2 d^2}{(m^2 u^2 + n^2 t^2)^2} - \frac{n^2 u^2 (2H + 1)}{m^2 u^2 + n^2 t^2}\right) x^2 + \left(\frac{m^2 u^2 n^2 t^2 d^2}{(m^2 u^2 + n^2 t^2)^2} - \frac{n^2 u^2 H}{m^2 u^2 + n^2 t^2}\right)^2$$
$$- \frac{n^4 u^4 t^2 m^2 d^2}{(m^2 u^2 + n^2 t^2)^3} = 0:$$

equazione, altra analisi non richiedente, che quella delle equazioni di secondo grado.

Ritornando all'equazione di quarto completa trovata di sopra per via ordinaria, osserverò, che volendo privarla del secondo termine, si dovrebbe, chiamando x la incognita colà nuova, far appunto $z = x + \frac{n^2 t^2 d}{m^2 u^2 + n^2 t^2}$; ed unitamente al secondo svanirebbe pure il quarto termine, e quella equazione ridurrebbesi alla testè conseguita. Ma ciò fa vie più risplender d'ingegno la industria di pervenirvi immediatamente.

Posizione di regresso. Avverte Cardano nel capo XXXIII dell'*Arte magna*, trattando della sua regola di posizione per + e — proporzionata, che le quistioni, le quali coll'ajuto di essa si sciolgono, sciogliere pure si possono per mezzo della regola di retrospignere la posizione *per regulam retro agendi positionem*. Nella quistione 117ª sotto il capo LXVI del libro della *Pratica generale dell'Aritmetica* chiama *regresso* il cammino di tal regola; ond'io denomino *Posizion di regresso* la posizione, da cui esso cammino incomincia. In luogo pertanto di prestare immediatamente attenzione alle quantità cercate, la si trasporti di salto a ciò, che la condizione del problema prescrive di comporre di esse; su di questo composto a dirittura si ponga, esprimendolo per semplice lettera dell'alfabeto, e per l'equazione dalla condizion del problema ingiunta se ne determini il valore; dopo di che con moto retrogrado si discenda a porre su le quantità cercate, ed a determinare i valori particolari loro. È questa l'idea generale della posizione di regresso, e di esso medesimo: l'esempio spargeravvi sopra maggior lume. Chiedeasi nel problema precedente, che la somma della parte $\frac{m}{n}$ del numero maggiore a quadrato elevata, e della parte $\frac{t}{u}$ del minore alzata pure a quadrato, più la radice di tal somma facessero H. Pongasi di botto la prescritta somma $= y^2$, e per condizione del problema sarà

$y^2+y=H$, donde prontamente si ha $y=-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}+H\right)}$. Si chiami ora z il numero maggiore, conseguentemente $z-d$ il minore; dunque dovrà essere

$y=\sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2}z^2+\frac{t^2}{u^2}(z-d)^2\right)}=\frac{-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}+H\right)}$. Alzati ambedue i membri a quadrato ne sorgerà l'equazione

$$z^2-\frac{2t^2n^2d}{m^2u^2+n^2t^2}z+\frac{n^2t^2d^2}{m^2u^2+n^2t^2}=\frac{n^2u^2}{m^2u^2+n^2t^2}\left(\frac{1}{2}+H-\sqrt{\left(\frac{1}{4}+H\right)}\right)$$

della quale si trae

$$z=\frac{t^2n^2d}{m^2u^2+n^2t^2}+\sqrt{\left(-\frac{m^2u^2n^2t^2d^2}{(m^2u^2+n^2t^2)^2}+\frac{n^2u^4}{m^2u^2+n^2t^2}\left(\frac{1}{2}+H-\sqrt{\left(\frac{1}{4}+H\right)}\right)\right)}.$$

Meritano e le due industrie, ed il problema generalmente trattato un rischiaramento per caso particolare. Mi servirò della già citata quistione 117ª di Cardano. Sia in un triangolo il perpendicolo di 8 minore della base, su cui cade, e dividendosi questa da esso in due parti, sia la parte minore $\frac{1}{3}$ della maggiore, unendo poi al quadrato del lato stante a canto della parte minore il semplice lato stesso, formisi la somma di 182: si cercano il perpendicolo, e la base? La data differenza loro d è $=8$. Essendo la parte minor della base $\frac{1}{3}$ della maggiore, viene in conseguenza ad essere $\frac{1}{4}$ dell'intera base. Il quadrato del lato alla banda della minor parte della base è uguale alla somma del quadrato di essa parte, e del quadrato del perpendicolo; sarà dunque la frazione $\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$, e $\frac{t}{u}=\frac{1}{1}$. Sostituiti questi valori nelle espressioni dei due cercati numeri per la industria di posizione proporzionata costituite, si avrà la base, che è qui il maggior numero cercato, $=x+\frac{16\times 8}{17}$, ed il perpendicolo, numero minore, $=x-\frac{8}{17}$, e l'equazione diverrà

$$x^4+\left(\frac{2\times 16\times 64}{17^2}-\frac{16\times 365}{17}\right)x^2+\left(\frac{16\times 64}{17^2}-\frac{16\times 182}{17}\right)^2-\frac{16^2\times 64}{17^3}=0;$$

cui giova disporre così:

$$x^4+\frac{16}{17^2}(2\times 64-17\times 365)x^2+\frac{16^2}{17^4}\left((17\times 182-64)^2-17\times 64\right)=0;$$

e riducesi ad

$$x^4-\frac{16}{17^2}\times 6077\ x^2+\frac{16^2}{17^4}\times 9179812=0;$$

dalla quale cavasi

$$x^2=\frac{16}{17^2}\times\frac{6077}{2}\pm\frac{16}{17^2}\sqrt{\left(\frac{6077^2}{4}-9179812\right)}=\frac{16}{17^2}\left(\frac{6077}{2}\pm\frac{459}{2}\right),$$

e quinci $x=\frac{4}{17}\sqrt{\left(\frac{6077}{2}\pm\frac{459}{2}\right)}$.

Prendendo il segno $+$ si ha x irrazionale; ma se prendasi il segno $-$ si ottiene razionale, e trovasi $x=\frac{4}{17}\times 53=12\frac{8}{17}$. Laonde la base $x+\frac{16\times 8}{17}$ risulta $=20$, ed il perpendicolo $x-\frac{8}{17}=12$. Tali valori si trovano eziandío presso il Cardano; onde appalesati, che nello scioglimento dell'equazione, del quale sopprime le operazioni, si appigliò anch'egli al segno $-$.

Applicando la formola di soluzion generale per la posizione di regresso conseguita, ci esibisce ella

$$z=\frac{16\times 8}{17}+\sqrt{\left(-\frac{16\times 8^2}{17^2}+\frac{16}{17}\left(\frac{1}{2}+182-\sqrt{\left(\frac{1}{4}+182\right)}\right)\right)}$$

$$=\frac{16\times 8}{17}+\frac{4}{17}\sqrt{\left(-64+17\left(\frac{1}{2}+182-\frac{27}{2}\right)\right)}=\frac{16\times 8}{17}+\frac{4}{17}\sqrt{2809}$$

$$=\frac{16\times 8}{17}+\frac{4}{17}\times 53=7\frac{9}{17}+12\frac{8}{17}=20,$$ ed è la base; e $z-8$, il perpendicolo, $=20-8=12$, come sopra. Il valore irrazionale della base risulterebbe qui, pigliando con segno $+$ il radicale $\sqrt{\left(\frac{1}{4}+182\right)}$.

Oltre le sin qui esposte industrie di posizione felicemente dirette ad evitare ne' problemi, al possibile, l'altezza delle equazioni, altre presso Cardano, qua e là se ne trovano, mercè le quali accontentasi egli di diminuire nelle equazioni il numero de' termini: eccole per aggiunta, non priva però di qualche cosa degna di attenzione, ed apprezzamento.

Posizione indeterminatamente accresciuta, ed indeterminatamente scemata. Così chiamo io la regola, che Cardano nel capo XXXVIII dell'*Arte magna* insegna di adoperare in cercando due numeri x, y tali, che $x^3+y^2=H$, ed $x-y=N$. Prescrive egli di porre $x=z+t$, $y=z-u$, e determina t, ed u per le due equazioni $t+u=N$. $3t^2=2u$. La ragione della prima di queste due equazioni è patente, essendo $N=x-y=z+t-(z-u)=t+u$. A scoprire la ragione della seconda si sostituiscano $z+t$, $z-u$ in luogo di x, y nell'equazione di condizione $x^3+y^2=H$, e ne verrà $z^3+(3t+1)z^2+(3t^2-2u)z+t^3+u^2=H$, ad annientar nella quale il termine $(3t^2-2u)z$ sarà d'uopo supporre $3t^2=2u$. Le quantità $+t$, $-u$ sono l'indeterminato accrescimento, e l'indeterminato diminuimento di z, ed a determinazion si conducono per le due equazioni $t+u=N$, $3t^2=2u$: poichè trasferito nella prima il valor $u=\frac{3}{2}t^2$ dalla seconda preso, ne proviene $t^2+\frac{2}{3}t=\frac{2}{3}N$; onde $t=-\frac{1}{3}+\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}N\right)}$, ed $u=N+\frac{1}{3}-\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}N\right)}$. Rifletta l'analista ingenuo: e non vi ha qui il germe del gran metodo delle indeterminate? Uno degli usi di questo si è appunto anche oggidì a determinar l'accrescimento, o diminuimento conveniente della radice di una equazione, per trasformarla in altra priva di questo, o quel termine; ed a tal uso fu impiegato da Cardano.

Posizione incrociata. Debbano, come sopra, due numeri x, y esser tali che sia l'aggregato $x^3+y^2=H$, ma la somma $x+y=N$. Si ponga $x=z-t$, ed $y=N+t-z$

prendendo $t = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3} N\right)}$; ed in luogo di avere per le due equazioni di comun posizione $x^3 + y^2 = H$, $x + y = N$ la equazione $x^3 + x^2 - 2Nx = H - N^2$ di termini quattro o completa, si avrà l'equazione di tre termini, o scema $z^3 - (3t - 1) z = H + t^3 - (N + t)^2$. Per esempio se sia $N = 4$, $H = 30$, si avrà $t = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{8}{3}\right)} = 2$, onde porrassi $x = z - 2$, $y = 6 - z$, e ne risulterà $z^3 - 5z = 2$. Se dispongansi una sotto l'altra le due posizioni $z - 2$, $6 - z$, o generalmente $z - t$, $N + t - z$ li numeri, e gli z riescono in croce; e questa è la ragione del titolo di posizion incrociata, che trovasi in Cardano nella quistione 30 delle 40 sotto il capo XL dell'*Arte magna di Aritmetica*. La regola, che egli comanda di tenere riguardo a t, di pigliar cioè $t = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3} N\right)}$, si ricava, e fu certamente dall'inventor ricavata con l'ajuto dell'industria precedente.

Posizione quadrata. Data sia a dividere la linea A in modo, che moltiplicata l'intera A nel quadrato di una delle parti, il prodotto sia uguale al cubo dell'altra parte. Prendendo giusta il metodo più ovvio per una delle parti x, per l'altra $A - x$, e per adempir la condizion del problema $A(A - x)^2 = x^3$, ne nasce, effettuato il quadrato $(A - x)^2$, l'equazione completa $x^3 - Ax^2 + 2A^2x = A^3$. Ma se assumasi una delle parti $= x^2$, l'altra $= A - x^2$, si avrà $A(A - x^2)^2 = (x^2)^3$, donde estraendo la radice, ne esce l'equazione incompleta $x^3 + A\sqrt{A} = x^2\sqrt{A}$.

Posizione dipendente. Partir si debba h in modo, che $x + y = h$, ed $x^3 = y^2$. Per queste due equazioni di posizione ordinaria si giugne ad $x^3 + 2hx = x^2 + h^2$. Ma la teoría delle potenze insegna che $(z^2)^3 = (z^3)^2$; dunque prendendo z^2 per una, z^3 per l'altra delle parti di h, si avrà a dirittura, e più semplicemente $z^2 + z^2 = h$. La comun posizione è libera; questa dipendente da un teorema applicato alla condizion del problema: quinci l'aggiunto, con che l'ho distinta.

Classe di antiche industrie II.
Industrie di soluzione divisa, o a due colpi.

Giova di frequente il dividere il problema in due, di maniera che la soluzione dell'uno faccia strada alla soluzione dell'altro. Questo è ciò che io intendo per soluzione divisa, o con più chiaro ed energico nome per soluzione a due colpi. Varj, siccome i casi, così i modi sono di esercitarla. E per leggiero riflesso, che l'analista ritorni alle soluzioni adempiute coll'ajuto della posizione di aggregato, o della posizione di regresso, si accorgerà essere pur quelle in sostanza soluzioni a due colpi; il che non ostante ho stimato bene di lasciare ad esse gli antichi nomi loro. Gli altri casi e modi di dividere in due colpi la soluzione, i quali dagli antichi nostri analisti mi è venuto fatto di raccogliere, sono i seguenti:

Modo 1.° *Abbassando di grado le condizioni del problema.* Si proponga ad esempio di trovar due numeri x, y tali, che $x^2 + y^2 = a$; $xy = 2(x + y)$. Chi dalla seconda condizione traesse l'espressione di $y = \frac{2x}{x-2}$, e la sostituisse nella equazion prima, salirebbe ad una equazione di quarto grado completa $x^4 - 4x^3 + (8 - a)x^2 + 4ax - 4a = 0$. Non così Cardano nel capo x dell'*Arte magna*. Trasportando nel membro primo della seconda equazione il prodotto $2(x + y)$, che sta nel secondo, ed aggiungendo all'uno ed all'altro 4, viene a formare l'equazione $xy - 2x - 2y + 4 = 4$, la quale scioglie nelle tre continue proporzionali

$x-2:2:y-2$. E perchè generalmente se vi sieno tre continue proporzionali $t:tq:tq^2$ si ha $(t+tq)^2+(tq+tq^2)^2+(tq)^2=(t+tq+tq^2)^2$; perciò nel caso presente $(x-2+2)^2+(2+y-2)^2+2^2=(x-2+2+y-2)^2$. Ma $(x-2+2)^2+(2+y-2)^2+2^2=x^2+y^2+4$, conseguentemente per la prima condizion del problema $=a+4$; dunque anche $(x-2+2+y-2^2)^2=a+4$, ed estraendo la radice, $x-2+2+y-2=\sqrt{(a+4)}$, o trasponendo il $+2$, $x-2+y-2=-2+\sqrt{(a+4)}$. Onde ponendo $x-2=u$, $y-2=z$, dovranno u, z esser sì fatti, che $u+z=-2+\sqrt{(a+4)}$, e per la continua proporzione $x-2:2:y-2$, $uz=4$. Ecco le condizioni, alle quali abbassate si sono le condizioni del problema proposto: $x^2+y^2=a$; $xy=z(x+y)$: in luogo cioè della condizione della somma dei quadrati si ha la condizione della somma dei semplici cercati numeri ad una nota quantità uguale; ed in vece del prodotto di essi uguale alla doppia lor somma si ha per condizion seconda il prodotto loro uguale ad una quantità conosciuta. Io perciò dico depresse di grado le condizioni del problema, e questo stesso abbassato ad un grado minore. Tirando di fatto da $uz=4$ il valor $z=\frac{4}{u}$, e trasportandolo in $u+z=-2+\sqrt{(a+4)}$, si ricava la equazione di semplice secondo grado $u^2+u(2-\sqrt{(a+4)})+4=0$, sciogliendo la quale, escono i valori

$$u=-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+4)}+\sqrt{((-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+4)})^2-4)}$$

$$z=-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+4)}-\sqrt{((-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+4)})^2-4)}$$

$$x=u+2=1+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+4)}+\sqrt{((-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+4)})^2-4)}$$

$$y=z+2=1+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+4)}-\sqrt{((-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+4)})^2-4)}.$$

Vero è però, che con minor arte, e maggiore speditezza effettuar si può la risoluzione di Cardano. Poichè sommando a dirittura con la prima delle equazioni del problema la seconda moltiplicata per 2, si ottiene $x^2 + y^2 + 2xy = a + 4(x+y)$, od $x^2 + 2xy + y^2 - 4(x+y) = a$, ed aggiungendo da ambe le parti 4, $x^2 + 2xy + y^2 - 4(x+y) + 4 = a + 4$; onde estraendo la radice ne segue $x + y - 2 = \sqrt{(a+4)}$, e quinci $x + y = 2 + \sqrt{(a+4)}$; $xy = 2(x+y) = 4 + 2\sqrt{(a+4)}$, equazioni simili a quelle, con tanto più di studio e di giro conseguite da Cardano, che offrono ugualmente le condizioni proposte trasformate in altre di minor grado, e più semplici, e che danno immediatamente gli stessi valori di x, y.

Ammettono questo stesso tenore di scioglimento i problemi già sciolti con la posizione di aggregato; anzi le soluzioni ne riescono più semplici, più dirette e più svelte. Nel problema primo espresso per le due equazioni $x^2 = y^2 = a$; $xy + x + y = h$, aggiunta alla prima equazione la seconda moltiplicata per 2, e da una parte e l'altra della nascente equazione aggiunto 1, si conseguisce $x^2 + 2xy + y^2 + 2(x+y) + 1 = a + h + 1$, ed estratta la radice, e trasportato 1, $x + y = -1 + \sqrt{(a+h+1)}$, e quinci, per la condizion seconda, $xy = h - (x+y) = h + 1 - \sqrt{(a+h+1)}$: ottenute le quali equazioni, il compimento della soluzione è facile, ed ha in suo intero il pregio di non importare che una equazione sola di secondo grado; laddove per la posizione di aggregato accade di averne a sciogliere due. Non altrimenti nel problema secondo compreso nelle due equazioni $x^2 + y^2 + x + y = a$; $xy = h$, aggiugnendo alla prima la seconda moltiplicata per 2, compiendo indi nel sinistro membro della proveniente equazione il quadrato con l'aggiunta di $\frac{1}{4}$ in esso, e nell'altro insieme, si ha $x^2 + 2xy + y^2 + x + y + \frac{1}{4} = a + h + \frac{1}{4}$, e quinci $x + y = -\frac{1}{2} + \sqrt{(a + h + \frac{1}{4})}$: nè resta, che a combinare con questa la equazione $xy = h$, e sciogliere l'equazione di secondo grado risultante. La varietà de' ripieghi, che l'arte analitica suggerir sa ad isfuggire in uno stesso problema le equazioni di alto grado, alle quali il metodo più comune solleverebbe, dimostra la fecondità sua.

Modo 2.° *Sostituendo ad un ignoto moltinomio una rappresentazion semplice*. Cardano nel capo LI della *Pratica generale dell'Aritmetica* propone questo problema: Uno giuocando le tre feste di Natale, guadagnò la prima l'altrettanto de' suoi zecchini, la seconda 2 più della radice del numero che già si trovava averne, la terza il quadrato della somma nelle due formata, con che la accrebbe sì, che giunse ad avere zecchini h: quanti zecchini portò al primo giuoco? Supponi questi $\frac{1}{2}x^2$: dunque ebbe dopo il giuoco, la prima festa x^2, la seconda $x^2 + x + 2$, la terza $x^2 + x + 2 + (x^2 + x + 2)^2 = h$. Si rappresenti $x^2 + x + 2$ per il simbolo semplice z, e sarà $z^2 + z = h$, $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + h)}$; e restituendo l'ignoto trinomio per z rappresentato, $x^2 + x + 2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + h)}$, od $x^2 + x = -2\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + h)}$, donde $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-2\frac{1}{4} + \sqrt{(\frac{1}{4} + h)})}$; e la metà del quadrato di questo valore, cioè $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4} + h)} \pm \frac{1}{4}\sqrt{(-9 + 4\sqrt{(\frac{1}{4} + h)})}$, è il numero de' zecchini al primo giuoco portati. Il Lettore attento avrà fatto riflesso alla posizione $\frac{1}{2}x^2$ in luogo della ordinaria x, se ne sarà chiesto il perchè, e lo avrà forse intravveduto. Posto x il numero di zecchini al primo giuoco portati, la somma dopo il giuoco della prima festa viene espressa per $2x$, quella dopo il giuoco della festa seconda per $2x+2+\sqrt{2x}$, e quella dopo il giuoco della festa terza per $2x+2+\sqrt{2x}+(2x+2+\sqrt{2x})^2=h$, dalla quale equazione cavato $2x+2+\sqrt{2x}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}+h\right)}$, restano a fare le operazioni per togliere il radicale, onde avere l'ultima equazione atta a somministrare il valore di x.

Modo 3.° *Spezzando in due nuove incognite la quantità data del problema*. Un bell'esempio di questo modo ci porgerà il seguente problema, che è il 26° degli sciolti da Frate Luca su le quantità proporzionali nel trattato 6° della Distinzione 6ª. Propone di dividere un dato numero qual io in genere segnerò per H in quattro parti continuamente proporzionali, i quadrati delle quali insieme congiunti formino un altro dato numero L. L'ingegnoso artificio da Frate Luca usato si è di richiamar questo problema a quello, che io ho addotto in esempio della industria della *posizione producente reciproche frazioni*: il che fa spezzando appunto in due nuove incognite il dato numero H, cioè la data somma di tutte e quattro le continue proporzionali; e le nuove incognite, nelle quali la spezza, sono le somme separate della 2ª e 3ª, e della 1ª e 4ª, che in quel problema si supposer note. Rappresenti pertanto qui n la ignota somma delle due 2ª e 3ª, e sarà $H-n$ la sconosciuta somma delle altre due 1ª e 4ª. Trattando le incognite quantità n, $H-n$ come note, si avrà per quella soluzione chiamando u, x, y, z le quattro continue proporzionali richieste

$$u = \frac{1}{2}(H - n) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}(H-n)^2 - \frac{n^3}{H+2n}\right)}$$
$$x = \frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{n^3}{H+2n}\right)}$$
$$y = \frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{n^3}{H+2n}\right)}$$
$$z = \frac{1}{2}(H - n) + \sqrt{\left(\frac{1}{4}(H-n)^2 - \frac{n^3}{H+2n}\right)}.$$

Per la condizion del problema qui proposto debbonsi congiungere di queste espressioni i quadrati, e la somma por si dèe $= L$. È facile vedere, che $u^2 + z^2 = (H-n)^2 - \frac{2n^3}{H+2n}$, ed $x^2 + y^2 = n^2 - \frac{2n^3}{H+2n}$; e perciò $u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = n^2 + (H-n)^2 - \frac{4n^3}{H+2n} = L$. Laonde fatte le debite operazioni, ne risulta $n^2 + \frac{L}{H}n = \frac{1}{2}(H^2 - L)$, equazione di secondo grado, per lo scioglimento della quale ottenuto il valore di n, restano determinate u, x, y, z.

Noterò per chi, curioso di veder co' proprj occhi, tentato fosse, e preso da vaghezza di andar ad avvolgersi nel ceneraccio di Frate Luca, che per equazione finale in vece della equazione di secondo grado testè trovata leggesi ivi nello stile suo: $2n^2 + H^2 - 2Hn - n^2 = HL + 2Ln$; ma per la risoluzione di questa citando la regola della risoluzione delle equazioni di secondo grado, è chiaro non esservi che errore di stampa. Doveva ciò rilevare il Cardano, e non sfidare Tartaglia a sciogliere la quistione, dicendo, che *Frate Luca la propone e non la solve*, come si ha nella sua lettera al Tartaglia, da questo riferita sotto il quesito XXXIII del libro IX dell'opera *Quesiti ed invenzioni*.

A valutar poi giustamente l'industria della esposta risoluzione si osservi, che espresse le quattro continue proporzionali così $t:tq:tq^2:tq^3$, e per le condizioni del problema posta la somma $t+tq+tq^2+tq^3=H$; e la somma dei quadrati $t^2+t^2q^2+t^2q^4+t^2q^6=L$, se da queste equazioni immediatamente si cavino, e tra lor si confrontino i due valori di $t^2=\frac{H^2}{(1+q+q^2+q^3)^2}=\frac{L}{1+q^2+q^4+q^6}$ incorresi in una equazione di sesto grado in q. Che se poi con un più lungo, e laborioso calcolo s'imprenda ad eliminar q per avere un'equazione in solo t, si monta tuttavía (adoprisi pure il migliore dei metodi di eliminazione nell'articolo V, §. III, del capo I esibito) ad una equazione di quarto grado completa, e di coefficienti, ed ultimo termine di non leggiera complicazione, qual è

$8H^2t^4-8H(2H^2+L)t^3+4((H^2+L)^2+2H^4)t^2-4H(H^4+L^2)t$
$+(H^2-L)^2=0$. Segnerò questa equazione....(Ψ)

La struttura delle due equazioni date

$tq^3+tq^2+tq+t-H=0$, che chiamo....(a)
$t^2q^6+t^2q^4+t^2q^2+t^2-L=0$, che noto....($b$)

agevola il ridurle alle due (T), (U) della pagina 74, e l'applicar loro la formola ivi distesa. Si moltiplichi l'equazione (a) per tq^3, e si avrà $(a)tq^3-(b)=t^2q^5+t(t-H)q^3-t^2q^2-t^2+L=0$, che chiamo ($c$). Si moltiplichi ($a$) per tq^2, e si troverà $(a)tq^2-(c)=t^2q^4+tHq^3+t(2t-H)q^2+t^2-L=0$, che segno ($d$). Moltiplichisi ($a$) per tq, e si otterrà $(a)tq-(d)=t(t-H)q^3-t(t-H)q^2+t(t-H)q-t^2+L=0$, che noto ($e$). Ci potremmo qui fermare, ma giova avanzar di un passo. Si moltiplichi (a) per $t-H$, e conseguirassi, annullandosi non solo il termine in q^3, ma anche quello in q, $(a)(t-H)-(e)=2t(t-H)q^2+(t-H)^2+t^2-L=0$, che denomino ($f$). Paragonando le due equazioni

$$t q^3 + t q^2 + t q + t - H = 0 \ldots\ldots (a)$$
$$2t(t-H)q^2 + (t-H)^2 + t^2 - L = 0 \ldots (f)$$

con le due generali (T), (U) della pag. 74, ed osservando i precetti dati nella pag. 77, la lunga formola, per ragione di E, O, P non solamente, ma anche $R = 0$, si restrigne a quattro termini della colonna I, e si ha $S^3 A^2 + S^2 Q(B^2 - 2AC) + S Q^2 (C^2 - 2BD) + Q^3 D^2 = 0$, dove $A = B = C = t$, $D = t - H$, $Q = 2t(t-H) = 2tD$, $S = (t-H)^2 + t^2 - L = D^2 + t^2 - L$. Quinci $S^3 A^2 + S^2 Q(B^2 - 2AC) = t^2 S^2 (S - Q)$; ed $S Q^2 (C^2 - 2BD) + Q^3 D^2 = t^2 Q^2 S - Q^3 S + Q^3 D^2 = t^2 Q^2 S - t^2 Q^3 + Q^3 L = t^2 Q^2 (S - Q) + Q^3 L$; onde, congiungendo, ne viene $t^2 (S^2 + Q^2)(S - Q) + Q^3 L = 0$, e sostituendo i valori di S, Q ottiensi
$\Big(\big((t-H)^2 + t^2 - L\big)^2 + 4t^2(t-H)^2\Big)(H^2 - L) + 8t(t-H)^3 L = 0$, che segno . . . . (A).

Se dopo avere cavata l'equazione (f) ti piacesse per quella via compiere l'eliminamento di q, moltiplica (f) per q, ed (a) per $2(t-H)$: avrai così $2(t-H)(a) - q(f) = 2t(t-H)q^2 + \big((t+H)(t-H) - t^2 + L\big)q + 2(t-H)^2 = 0$, dalla quale sottraendo la (f), ne uscirà
$\big((t+H)(t-H) - t^2 + L\big)q + (t-H)^2 - t^2 + L = 0$, donde

$$q = \frac{t^2 - L - (t-H)^2}{L - H^2}; \quad q^2 = \frac{\big(t^2 - L - (t-H)^2\big)^2}{(L - H^2)^2},$$

il qual valore sostituito nell'equazione (f) risulta
$2t(t-H)\big(t^2 - L - (t-H)^2\big)^2 + \big((t-H)^2 + t^2 - L\big)(L - H^2)^2 = 0$, che noto . . . . (B).

Quantunque abbiano sembianza diversissima le due finali (A), (B); pure, svolgendo, ambedue coincidono con la (Ψ). Questa pertanto è l'equazione, in cui ci conducono ad abbatterci i metodi di eliminazione; ed essa sciolta, non è finita l'opera, restando a determinar q per una equazione di terzo grado. Si appalesa dunque al confronto, e brilla la semplicità, la eleganza della industriosa riduzione da Frate Luca esibita del presente all'altro accennato problema. Tanto egli è vero, che la facilità, o difficoltà dello scioglimento di un problema dipende spesso dall'aspetto, sotto cui si considera, e che giusta il torno, che gli si dà, sale a meno, o più alto grado; e tanto è ancora vero, che talvolta la indiretta via riesce più piana, e più comoda che la diretta, e che non di rado avviene, che la mancanza di diretti mezzi, sforzando lo ingegno, ne spreme de' ripieghi migliori. Così accadde negli analisti primi, essendosi accinti a sciogliere il problema, di cui si parla. E meritava ben tale problema con l'antica soluzion sua di essere trasmesso di corso in corso di analisi, e particolar dovere era, che lo fosse ne' corsi italiani. Eppure invano l'ho io cercato in molti; e se pur non si era interamente perduto di memoria, rimanendo profondamente sepolto nella tenebrosa compilazione di Frate Luca, e nelle fastidiose contese di Cardano e Tartaglia; oscura al certo, particolare, privata divenuta n'era la notizia. Moivre francese di nascita, ed in Inghilterra morto l'anno 54 del cadente secolo, lo si ripropose come nuovo, e lo arricchì insieme di altro a cinque continue proporzionali esteso. Il famoso cieco analista, il Saunderson ne' suoi *Elementi di Algebra* stampati in Amsterdam e Lipsia l'anno 1756 alla pag. 260 del tomo I, prendendo a riferirne le soluzioni, dice: *M.r De-Moivre, qui est incontestablement un des principaux Mathématiciens de notre siecle m'à comuniqué les solutions élégantes des deux problêmes suivans au sujet des quantités proportionelles, en me permettant d'en faire part au public.* Al nostro proposito basta la soluzione del problema su le quattro proporzionali: eccola. Sceglie Moivre per espressioni loro X^3, $X^2 Y$, $X Y^2$, Y^3; onde per la prima condizione del problema deve essere $X^3 + X^2 Y + X Y^2 + Y^3 = (X+Y)(X^2+Y^2) = H$; e per la seconda $X^6 + X^4 Y^2 + X^2 Y^4 + Y^6 = (X^2+Y^2)(X^4+Y^4) = L$. Si ponga $X+Y=Z$, $X^2+Y^2=U$, si avrà $ZU=H$, $U(X^4+Y^4)=L$. Elevando al quadrato la prima posizione $X+Y=Z$, ne viene $X^2+2XY+Y^2=Z^2$, e quinci $2XY=Z^2-(X^2+Y^2)=Z^2-U$; e facendo il quadrato di nuovo, ne sorge $4X^2Y^2=Z^4-2UZ^2+U^2$. Quadrando la posizione seconda $X^2+Y^2=U$, si ha $X^4+2X^2Y^2+Y^4=U^2$, e perciò $4X^2Y^2=2U^2-2(X^4+Y^4)=2U^2-\frac{2L}{U}$. Per lo che, uguagliando le due espressioni di $4X^2Y^2$, risulta $Z^4-2UZ^2+U^2=2U^2-\frac{2L}{U}$; ed introducendo qui il valore $\frac{H}{Z}$ di U si perviene a $Z^6+\left(\frac{2L}{H}-2H\right)Z^3=H^2$, equazione di sesto grado, ma sottoposta all'analisi di quelle di secondo. Se fa onore a Moivre, uno senza dubbio de' più insigni analisti di questo secolo, dovizioso cotanto di analitica luce e maestría, la soluzion sua, niuno, che di equità si pichi, negherà, che a gloria dei primi analisti torni la prima loro.

Per confronto sensibile dell'antica soluzione, della moivreana e di quella eziandío contenuta nella completa equazione di quarto grado (Ψ) dalla general formola di eliminamento ricavata, si supponga $H=15$, $L=85$. L'equazione dell' antico metodo $n^2+\frac{85}{15}n=\frac{1}{2}(15^2-85)$ dà $n=-\frac{17}{6}+\sqrt{\left(\left(-\frac{17}{6}\right)^2+70\right)}=\frac{-17+53}{6}=6$, e quinci $\frac{1}{2}n=3$, $\frac{1}{2}(H-n)=\frac{9}{2}$, $\frac{n^3}{15+2n}=8$, $\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2-\frac{n^3}{15+2n}\right)}=1$, $\sqrt{\left(\frac{1}{4}(15-n)^2-\frac{n^3}{15+2n}\right)}=\frac{7}{2}$; conseguentemente

$u = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = 1$; $x = 3 - 1 = 2$; $y = 3 + 1 = 4$; $z = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = 8$.

L'equazione di Moivre $Z^6 + \left(\frac{170}{15} - 30\right) Z^3 = 15^2$ produce $Z^3 = 9\frac{1}{3} + \sqrt{\left(\left(9\frac{1}{3}\right)^2 + 15^2\right)} = 9\frac{1}{3} + \frac{53}{3} = 27$, e quindi $Z = 3$, ed $U = \frac{15}{Z} = 5$, cioè $X + Y = 3$, $X^2 + Y^2 = 5$, e trasportando dalla prima di queste due nella seconda il valore di Y, $2X^2 + 9 - 6X = 5$, donde $X = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 2\right)} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$. Prendendo il segno $+$ si ha $X = 2$ ed $Y = 3 - X = 1$, per conseguenza

$$X^3 = 8,\quad X^2 Y = 4,\quad X Y^2 = 2,\quad Y^3 = 1.$$

Prendendo il segno $-$ diviene $X = 1$, $Y = 3 - X = 2$; e perciò

$$X^3 = 1,\quad X^2 Y = 2,\quad X Y^2 = 4,\quad X^3 = 8.$$

Riuscirebbero con l'ordine superiore, inverso di questo, le quattro proporzionali per le espressioni del metodo antico, se in vece di prender negativo il radicale $\sqrt{\left(\frac{1}{4}(H-n)^2 - \frac{n^3}{H+2n}\right)}$ nella espressione di u si prendesse positivo, e del pari di negativo in positivo, e di positivo in negativo si cangiasse il segno del radicale nelle espressioni delle altre tre continue proporzionali x, y, z.

Sostituendo ad H, L i valori numeri 15, 85 nella completa equazione di quarto grado (Ψ), ella prende la riduzione

$1800 t^4 - 64200 t^3 + 789400 t^2 - 3471000 t + 2744000 = 0$, o dividendo per 200

$9 t^4 - 321 t^3 + 3947 t^2 - 17355 t + 13720 = 0$, che segno ($\Psi'$). Una radice è $= 1$; poichè $13720 + 3947 + 9 = 17355 +$

$321 = 17676$. Divisa l'equazione (Ψ) per $t - 1$ si abbassa ella alla seguente di terzo grado

$$9t^3 - 312t^2 + 3635t - 13720 = 0, \text{ che noto} \ldots (\chi).$$

Ella ha per radice 8; e posto 8 nell'equazione $tq^3 + tq^2 + tq + t - 15 = 0$, trovasi aver questa luogo, se facciasi $q = \frac{1}{2}$: è dunque questo il caso dell'ordine delle proporzionali discendente. L'algebra debbe dare e la minima, e la massima, perchè e l'una e l'altra può esser presa per prima, ed è libero l'ascendere, o discendere; le equazioni $t + tq + tq^2 + tq^3 = H$, $t^2 + t^2q^2 + t^2q^4 + t^2q^6 = L$, esprimenti le condizioni del problema, non dicono, non prescrivono, che q sia intero, o frazione: e non essendovi ragione, per cui l'analisi dia un caso piuttosto che l'altro, deve porgergli ambidue. Dividendo l'equazione (χ) per $t - 8$, deprimesi all'equazione di secondo grado

$$9t^2 - 240t + 1715 = 0,$$

le cui radici sono $t = \frac{1}{3}(40 \mp \sqrt{-115})$, immaginarie. Si avrebbero queste dal metodo antico a valori di u, z, prendendo con segno negativo il radicale nel valore di n, con che da 6 si cangerebbe in $\frac{-70}{6}$; e si avrebbero dal calcolo moivreano a valori di X^2, Y^2, pigliando con il segno negativo il radicale nel valore di Z^2, cangiandosi questo con ciò da 27 in $-8\frac{1}{3}$. La equazione (Ψ) di quarto grado completa, che ci risulta dalla formola generale di eliminamento, comprende ambedue i casi relativi ai due segni $+$, e $-$, che dar si possono al radicale quadrato occorrente nei calcoli dei nostri antichi, e di Moivre; e di qui è, che sale al quarto grado.

Non ho sino ad ora fatto parola di quel modo di dividere in due la soluzione di un problema, che pur forma la materia tutta del capo XXXIX dell'*Arte magna*, distinto dal Cardano col titolo *De Regula, qua pluribus positionibus invenimus ignotam quantitatem*; ed in cambio sono io andato pescando nell'oscuro fondo di Frate Luca ed in altri luoghi della stessa, e di diverse opere di Cardano i modi recati. E sembrerà ciò strano: ma non è senza ragione; stimato avendo io di dover preferire quelli, che al mio giudizio si presentavan di maggior utilità forniti. Cionulladimeno, siccome io non scrivo un libro di elementare analitica istruzione, in cui legge esser debbe la scelta degli insegnamenti, ma una critica storia; così mi farò ad esporre, e criticamente insieme discutere il sin qui ommesso modo, onde l'analista presso Cardano trovandolo, nè di colpevol silenzio m'accusi, nè, per non penetrarne la vera origine, si lasci ingannare dal pregio, che Cardano gli dona, e dai precetti, che all'uso ne prescrive. Consiste pertanto questo modo in *assumere dapprima uguale all'unità una delle quantità incognite del problema*. Si addomandino, per esempio, quattro quantità continuamente proporzionali, sì fatte, che il quadrato della 4ª uguagli la somma dei quadrati della 1ª e della 3ª, e l'aggregato di tutte sia h. Suppongasi la prima 1, la seconda y, conseguentemente la terza y^2, la quarta y^3. Dunque per la condizion prima del problema $y^6 = y^4 + 1$, equazion derivativa del terzo grado, che sciolta dà

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{\left(\tfrac{29}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{837}\right)} + \sqrt[3]{\left(\tfrac{29}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{837}\right)}\right)}.$$

Poniamo al presente la prima delle quattro proporzionali $= x$, e per la condizion prima dovrà essere $x + xy + y^2 + xy^3 = h$, e quinci $x = \frac{h}{1+y+y^2+y^3}$. Se però a dirittura da noi si supponga x la prima delle quattro proporzionali, ed y la ragione tra loro, la serie viene ad essere espressa per $x : xy : xy^2 : xy^3$, e la seconda condizione importa $x^2 y^6 = x^2 y^4 + x^2$, equazion patentemente divisibile per x^2, e, la division fatta, porgente $y^6 = y^4 + 1$, siccome dalla posizione della prima delle quattro proporzionali $= 1$ si ebbe. Essendo simili gli altri due esempj, che Cardano reca, apparisce, che l'utilità dell'artificio si riduce a nulla. Egli dice, che è simile a quello, che denomina *De medio*, e che è l'argomento del capo XXXIV; ed in verità non ne differisce, se non che in questo, in luogo di porre una delle incognite $= 1$, si pone $= \frac{1}{2}$, per evitar la confusione, che nascer può, nascondendosi l'unità, e le potenze parimenti di lei, *ad unitatis confusionem vitandam*. L' $\frac{1}{2}$ posto è una delle ragioni del nome dell'artificio; l'altra, che il Cardano vi accoppia, si è *quia medium inquiritur scilicet proportio*. Ed è quinci, che prescrive riguardo all'uso di esso: *Ejus usus est solum ad quaerendas quantitates, quae aequaliter multiplicantur, et proportionem servant*. Il problema testè recato, e gli altri del capo XXXIX si possono, ugualmente che coll'assunto 1, scioglier coll'assunto $\frac{1}{2}$. Il Cardano si vale di questo nel trattare il primo dei problemi da me esposti alle pag. 3 e 4, e dipartendosi dal suo riflesso su la confusione, che può cagionare l'uso di 1, di tal assunto si vale negli altri seguenti simili problemi. La ragione intrinseca di poter valersi, sia dell'uno, sia dell'altro assunto, e indistintamente a tutto arbitrio di questo, o di quello, in cotali problemi rilevasi dalla forma, alla quale le citate mie pagine li presentan ridotti. Si consideri il primo compreso nelle equazioni $(x+y)(x^2+y^2)=a$; $(x-y)(x^2-y^2)=b$: con fare $\frac{y}{x}=z$, esso riducesi alla frazione $\frac{x^2(1+z)(1+z^2)}{x^2(1-z)(1-z^2)}=\frac{a}{b}$. Ora qualunque sia il valor di x, sia il vero e cercato, sia altro ad arbitrio finto, e non solo 1, od $\frac{1}{2}$, ma qualsivoglia a piacere, la divisione $\frac{x^2}{x^2}$ darà in ogni caso 1, essa svanirà, ed avrà sempre luogo il semplificamento $\frac{(1+z)(1+z^2)}{(1-z)(1-z^2)}=\frac{a}{b}$. Di più, essendosi fatto $\frac{y}{x}=z$, donde ne segue $y=xz$, se fingasi $x=1$, ne verrà $y=z$, di modo che con diritto di coerenza si potrà a z sostituir y, e contare il problema ridotto all'equazione $\frac{(1+y)(1+y^2)}{(1-y)(1+y^2)}=\frac{a}{b}$. Ciò si fa ad un tratto, se nelle due equazioni del problema si faccia $x=1$, e l'equazion prima per la seconda si divida. Se fingasi $x=\frac{1}{2}$, per la general equazione $y=xz$, ne proverrà $y=\frac{1}{2}z$, e $2y=z$, ed in corrispondenza $\frac{(1+2y)(1+4y^2)}{(1-2y)(1-4y^2)}=\frac{a}{b}$. E generalmente fingendo $x=n$ si avrebbe $y=nz$, $\frac{1}{n}y=z$,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}y\right)\left(1+\frac{1}{n^2}y^2\right)}{\left(1-\frac{1}{n}y\right)\left(1+\frac{1}{n^2}y^2\right)}=\frac{(n-y)(n^2+y^2)}{(n-y)(n^2-y^2)}=\frac{a}{b}.$$ Ma che cosa

nell'equazione $\frac{(1+y)(1+y^2)}{(1-y)(1-y^2)}=\frac{a}{b}$ è y? La cercata quantità del problema già denominata y? Non già: ma solamente la ragione z tra essa, e l'altra cercata quantità x. Per la qual cosa, se sciogliendo l'equazione trovisi il valor di y esser P, questo propiamente non sarà che il valore della ragione z, e la vera quantità cercata $y=xz$ avrà quinci l'espressione $y=xP$, mediante la quale resterà da adempiere il secondo colpo della soluzione del problema, con sostituirla in una delle due naturali di lui equazioni. Mi lusingo di avere abbastanza rischiarato questo operare antico, dimostrandone la ragion metafisica desiderata in Cardano, e ponendo in vivo lume l'artificioso giuoco di trasportare y del concetto di una delle due cercate quantità al concetto della ragione fra loro, e di ritornarlo da questo a quello. Pure il metter sott'occhio il tipo del calcolo intero spargerà su la spiegazione uno splendore ancor più limpido. Nelle due equazioni $(x+y)(x^2+y^2)=a$; $(x-y)(x^2-y^2)=b$, si faccia, come si vuole, $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, indeterminatamente $=n$, e la equazion prima per la seconda si divida, e si otterrà $\frac{a}{b}=\frac{(n+y)(n^2+y^2)}{(n-y)(n^2-y^2)}=\frac{n^2+y^2}{(n-y)^2}$; indi $y^2-\frac{2an}{a-b}y=-n^2$, e sciogliendo, $y=\frac{an}{a-b}+\sqrt{\left(\frac{a^2n^2}{(a-b)^2}-n^2\right)}$. Questo valor di y, che chiamo P, per la equazione $y=xz$, in cui si è fatto $x=n$, è $=nz$, è cioè un multiplo o summultiplo, giusta l'essere intero o fratto di n, della ragione z tra le due vere cercate quantità x, y. Quinci la semplice ragione z è $=\frac{1}{n}y=\frac{1}{n}P$, e la vera cercata quantità $y=xz=\frac{1}{n}Px$. Sostituiscasi questa espressione della vera cercata quantità y in una delle due equazioni proprie del problema: sia nella prima $(x+y)(x^2+y^2)=a$, e si avrà $\left(x+\frac{1}{n}Px\right)\left(x^2+\frac{1}{n^2}P^2x^2\right)=x^3\left(1+\frac{1}{n}P\right)\left(1+\frac{1}{n^2}P^2\right)=a$, per conseguenza $x=\sqrt[3]{\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}P\right)\left(1+\frac{1}{n^2}P^2\right)}}$, e di qui $y=\frac{1}{n}P\sqrt[3]{\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}P\right)\left(1+\frac{1}{n^2}P^2\right)}}$, e saranno questa x, e questa y le due vere cercate quantità del problema. E che soddisfacciano alla prima equazione è evidente; ma ugualmente soddisfanno alla seconda $(x-y)(x^2-y^2)=b$, trovandosi, sostituzion fatta,

$$\left(1-\frac{1}{n}P\right)\left(1-\frac{1}{n^2}P^2\right)\sqrt[3]{\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}P\right)\left(1+\frac{1}{n^2}P^2\right)}}\times\sqrt[3]{\left(\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}P\right)\left(1+\frac{1}{n^2}P^2\right)}\right)^2}$$

$= \frac{\left(1 - \frac{1}{n} P\right)\left(1 - \frac{1}{n^2} P^2\right) a}{\left(1 + \frac{1}{n} P\right)\left(1 + \frac{1}{n^2} P^2\right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n} P\right)^2 a}{1 + \frac{1}{n^2} P^2} = b$, equazione, che a verificarsi non richiede fuor che $P = \frac{a n}{a - b} + n \sqrt{\left(\frac{a^2}{(a-b)^2} - 1\right)}$, qual è già per superior denominazione. Si osservi, che facendo $\frac{a}{a-b} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(a-b)^2} - 1\right)} = F$, si ha $P = nF$, e surrogando nei valori di x, y, si conseguisce $x = \sqrt[3]{\frac{a}{(1+F)(1+F^2)}}$; $y = F \sqrt[3]{\frac{a}{(1+F)(1+F^2)}}$; cioè n svanisce dalle espresioni dei valori di x, y: il che conferma la libertà di assumer n qualunque si voglia, con sicurezza cionullaostante di trovare gli stessi sempre, e veri valori delle cercate quantità x, y. Ma se è libero l'assunto n, non è libero il cammino del calcolo; e qualunque esso assunto sia, la metafisica ragione stessa del potere liberamente assumere segna il sentiero, per cui indeclinabilmente marciar dobbiamo. No, l'avverta ben l'analista, non è lecito, dopo aver nelle due equazioni $(x + y)(x^2 + y^2) = a$; $(x - y)(x^2 - y^2) = b$ assunto $x = n$, e dopo avere eseguiti i prodotti, e data alle equazioni la forma $n^3 + n^2 y + n y^2 + y^3 = a$; $n^3 - n^2 y - n y^2 + y^3 = b$, sottrarre questa da quella per conseguire speditamente, distrutto y^3, l'equazione di secondo grado $2 n^2 y + 2 n y^2 = a - b$. Da questa, sciogliendo, ne viene $y = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sqrt{\left(1 + 2 n (a - b)\right)}$, valore, che in niun modo concordasi con il valor P trovato di sopra, e che proseguendo il calcolo non può mettere a buon fine, e non vi mette di fatto. Poichè denominato Q tal valore di y, sostituendo nella equazione $(x + y)(x^2 + y^2) = a$ in luogo di y, in quanto rappresentante una delle cercate quantità del problema, l'espressione $\frac{1}{n} Q x$, e continuando come sopra, si giugnerà, come là, all'equazione $\frac{\left(1-\frac{1}{n}Q\right)^2 \cdot a}{1+\frac{1}{n^2}Q^2}=b$, che importa $Q=P$, quand'è diverso; sì che il calcolo termina a contraddizione.

Considerando poi attentamente le due equazioni $x^3+x^2 y+x y^2+y^3=a$; $x^3-x^2 y-x y^2+y^3=b$, vi si osservano certe proprietà, che non si riscontrano nelle due $x+x y+x y^2+x y^3=h$; $x^2 y^6=x^2 y^4+x^2$, ed in queste reciprocamente vi ha qualche condizione, che non è in quelle; e la mancanza di analogía, o differenza nella struttura trovasi generale, confrontando in massa tutti i problemi del capo XXXIV a tutti quelli del capo XXXIX di Cardano, quantunque e gli uni e gli altri ugualmente ammettano l'assunto libero 1, $\frac{1}{2}$, n. Che se rispetto a tutti intender debbesi il requisito, che *quantitates quaerendae aequaliter multiplicentur, et proportionem servent*; almeno l'una e l'altra parte intender si debbono rispetto agli uni in senso diverso, che rispetto agli altri. Io pertanto distinguo due casi, in ciascun de' quali partitamente ponderata la utilità dell'artificio dell'assunto libero, e discussi i requisiti da Cardano voluti, avrà fine l'esame, che ho per le mani.

Caso 1.° Quando una delle due equazioni è tutta moltiplicata per qualsivoglia potenza di una delle incognite, qual l'equazione $x^2 y^6=x^2 y^4+x^2$; anzi più generalmente per qualunque si sia funzione di una incognita, come l'equazione $(x^2+1)y^6=(x^2+1)(y^4+1)$: di modo che divisa per tal potenza, o funzione, la equazione, essa incognita svanisca, e non resti nell'equazione medesima che l'altra incognita. Egli è evidente, che alla divisione per x^2 equivale il convertimento di x^2 in 1, ed alla division per x^2+1 il convertimento di x^2 in 1 con la divisione di poi per 2. Ma quanto è manifesta la ragione di potere, sin che non si tratta che l'equazione di tal sorta, cangiare x in 1, od ugualmente in qualunque numero n, altrettanto è palese la niuna utilità di così adoprare. Spettano a questo caso i problemi del Cardano nel capo XXXIX, e versan ben essi su quantità continuamente proporzionali; ma ciò non è un requisito necessario alla podestà di assumer una delle incognite $=1$, $=n$, qualora vi sia la equazione dell'indole descritta; poichè l'assunto sarebbe del pari lecito, se, per esempio, la equazione $x^2 y^6 = x^2 y^4 + x^2$, in luogo di essere, per un problema richiedente quattro continue proporzionali, combinata con l'equazione $x + xy + xy^2 + xy^3 = h$, fosse per problema diverso combinata con qualunque altra equazione: poni $x^2 + y^2 = h$. E generalmente nei problemi del presente caso il libero assunto nel principio del calcolo risolvesi in cosa di niun vantaggio.

Caso 2.° Allora, che i termini incogniti tutti dell'una e dell'altra equazione del problema montano al medesimo grado, o sono tutti omogenei; per lo che una delle incognite sparisce, sostituito ad essa il prodotto della medesima con una nuova incognita, e divisa una equazione per l'altra. Io rappresento generalmente le due equazioni così:

$$a x^{m} + b y x^{m-1} + c y^2 x^{m-2} + d y^3 x^{m-3} \ldots + l y = A$$

$$g x^{m} + h y x^{m-1} + i y^2 x^{m-2} + k y^3 x^{m-3} \ldots + p y^{m} = B.$$

Si può anche in questo caso incominciar la soluzione con l'assumere liberamente una delle incognite, pensa y, $=1$, $=n$; ma l'intendimento della intrinseca metafisica ragione del poter così fare dipende dal calcolo istituito alla pag. 3 di questo volume, e da esso pur dipende il cammino del calcolo partente dal libero assunto; anzi debbe in tutto il processo essere uno e lo stesso. Insomma intanto anche qui è lecito il libero assunto, in quanto supplisce ad una divisione che rende 1. Dunque altra utilità non si può al più concedere al libero assunto, che di un po' di compendio nell'apertura del calcolo. Sotto le formole generali testè esposte si comprendono le due equazioni del problema, od esempio 1.° alla pag. 3: $x^3+x^2y+xy^2+y^3=a$; $x^3-x^2y-xy^2+y^3=b$, parimenti le due dell'esempio 2.° $x^4+x^3y+xy^3+y^4=a$; $x^4-x^3y-xy^3+y^4=b$; ed altresì le due $x^5+y^5=a$; $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5=b$ dell'esempio 3.°. Hanno queste equazioni tutte ciò di comune, che ciascheduna presenta le due incognite ne' suoi termini ugualmente moltiplicate o in loro stesse, o reciprocamente una per l'altra. Nelle due dell'esempio 1.° i termini (prescindendo nella seconda dai segni) procedono in continua proporzione geometrica; ma non così nelle altre: di fatto Cardano richiede, non già che i termini delle equazioni, ma che *quantitates quaerendae proportionem servent*. Se non che, non intendo poi come questo requisito cader possa in due sole incognite x, y, alle quali in tutti e tre i problemi ristrignesi la ricerca. Il fatto poi sta, che non è tampoco necessario *ut quantitates quaerendae aequaliter multiplicentur*, se il senso sia, che nella stessa equazione ambedue le incognite montino solitarie alla potenza m, ed i prodotti loro sieno tutti reciproci; poichè anche senza di ciò il calcolo della pag. 3 interamente sussiste, ed ha felicissimo esito; e lo spirito di esso ci fa comprendere, che la sola condizione essenziale si è la omogeneità in tutti universalmente gl'incogniti termini delle due equazioni. Di fatto, per aggiugnere la conferma sensibile di un facile esempio, se cerchinsi due numeri x, y tali che $x^2+xy=6$, $x^2-xy+y^2=3$, assunto $x=1$, e divisa la prima equazion per la seconda, si ha $\frac{1+y}{1-y+y^2}=\frac{6}{3}=2$; onde $1+y=2-2y+2y^2$, o sia $y^2-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=0$, e quinci $y=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}$, cioè y, in quanto ragione tra le cercate x, y, è $=1$, ovvero $=\frac{1}{2}$, e quindi la cercata $y=x$ nel primo caso, ed $=\frac{1}{2}x$ nel secondo. Nel primo ne viene $x^2+x^2=6$, $x=\sqrt{3}$, conseguentemente anche $y=x=\sqrt{3}$, e soddisfa alla seconda equazione $x^2-xy+y^2=3$ divenuta $y^2=3$. Nel caso secondo $x^2+\frac{1}{2}x^2=6$, $x^2=4$, $x=2$, $y=1$, $x^2-xy+y^2=4-2+1=3$. Spero di avere enucleato il fondamento della podestà del libero assunto, di avere con i due casi abbracciata, e ben ripartita tutta la estensione di tal podestà, di averne fissati i veri essenziali requisiti, dimostrando insieme l'insussistenza, o l'accidentalità, o spiegando l'equivoco moltiplice senso di quelli da Cardano prescritti.

CAPO IV.

Teoría delle irrazionali quantità presso gli antichi analisti da numeri a generali algebraiche specie trasferita.

Se il tuono franco, ed assoluto dell'asserzione, la celebrità di chi asserisce, il plauso goduto dall'opera, dove vien asserito, argomenti sempre fossero di verità, su i quali tranquillissimamente riposar si dovesse, e delitto o follia ad estimare avessesi il concepir dubbio, qual certissima cosa, ed irrefragabile obbligati saremmo a tenere, che sino all'uscire dell'Algebra del Bombelli visto non si fosse calcolo di radicali, e che pregio affatto nuovo fosse di lei il presentarlo. Così afferma Gua-de-Malves nella *Parte Storica* della sua Memoria *Recherches du nombre des racines réelles, ou imaginaires*, tra quelle dell'Accademia di Parigi all'anno 1741: *En premier lieu c'est dans cet ouvrage qu'on trouve pour la premiere fois le calcul des radicaux*. Ma ottenga pure il Gua-de-Malves per tal suo storico abbozzo lode e fede, qual sa il connazionale affetto suggerirla migliore, da Montucla, e dagli altri suoi compatrioti, io non posso non maravigliarmi di una tanta falsità, che mi pare non potere denominar meglio, che prodigio di falsità. Gli si condoni pure l'ignorare, che per sino Leonardo Pisano, secoli presso a quattro avanti Bombelli, nel suo *Abacco* manuscritto fece soggetto del capo 14 la dottrina del calcolo dei radicali e semplici, e composti. Ma chi gli può perdonare, che negli stampati volumi di Frate Luca, di Tartaglia, e di Cardano veduti non abbia i lunghi trattati loro su tal argomento, non occupandovi il primo meno che fogli ventotto nella Distinzione ottava, nulla meno che quattro libri, cioè il terzo, il quinto, il decimo, l'undecimo della seconda parte del *Generale suo trattato* il secondo, nè nulla meno che una distinta parte con il titolo *Ars magna Arithmeticae* il terzo? E la ragione di tanto diffondersi su tal materia la dichiara ad alto iterato suono Frate Luca, predicando, che la dottrina delle radici è all'*Arte algebratica introductoria*, e soggiugnendo esser quella, cui mercè *ad ogni quistione potrai dar risposta*. Senza di tal materia come trattar problemi di radici involuti? Come dalle radici liberare le equazioni? E distinti ve ne hanno negli antichi analisti gli insegnamenti, infiniti gli esempj. E come poi avrebber eglino quegli analisti potuto senza il calcolo dei radicali a scioglimento condurre le equazioni di alto grado simili a quelle di secondo, e risolvere quelle di terzo, e le derivative loro, ed oltre la risoluzion generale scoprire le speciali, che ho sopra nell'ultimo membro del capo II, con la divisione in tre Manipoli, partitamente esposte? Se il Gua-de-Malves ignorò, siccome Montucla, la massima parte di queste cose, molto peggio per lui quanto alla colpa di non essersi fornito delle cognizioni di fatto necessarie per scrivere quello storico sbozzo. Ma almen quel poco, che di Tartaglia, e di Cardano sapeva rispetto alla risoluzione delle equazioni di terzo grado, dovea, prestandovi riflesso, avvisarlo, che un qualche maneggio, un qualche calcolo de' radicali era presso di loro in pratica. Per le quali cose, oltre al condannare nel Gua-de-Malves una grossolana, e per sin mirabile ignoranza di fatto, io non saprei come assolverlo da irriflessione. La lunghezza poi medesima degli antichi trattati su i radicali annuncia già al lettore la copia degli insegnamenti. E di verità non solo vi si trovano le regole tutte, che oggidì si danno, per operare su di essi, ma qualche regola altresì, che con discapito della pratica si è lasciata cadere in obblivione, e molte specolazioni, se non tutte utili, sottili tutte, ed atte ad acuir l'intelletto, e pascerne la curiosità. La teoría tutta, che presso i medesimi antichi analisti nostri trovasi in semplice abito numerico, sarà per me vestita di abito letterale: il che la renderà più dilettevole alla mente, che sempre brama comprendere con la facilità, e sveltezza maggiore nella massima estensione loro le cose. Ed acciocchè chiaramente si vegga quanto sin dal primo tempo fosse ricca, e quali furono i progressi, che di poi fece, distinguerò tre tempi. E meco verrà la imparzial critica a notare e correggere gli errori, ne' quali gli antichi nostri pur caddero.

TEMPO I.

SINO ALLA STAMPA DEL VOLUME DI FRATE LUCA.

§. I.

Calcolo delle irrazionali quantità semplici.

Moltiplica.

Regola 1.ª $(\sqrt{a})^2 = a$; generalmente $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Regola 2.ª $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$; generalmente $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$.

Regola 3.ª $a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2\,b}$; generalmente
$$a \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\,b}.$$

Regola 4.ª $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3\,b^2}$; generalmente $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m\,b^n}$.

Divisione.

Regola 1.ª $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$; generalmente $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Regola 2.ª $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a^2}{b}}$; generalmente $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a^n}{b}}$

Viceversa $\frac{\sqrt[n]{a}}{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}$.

Regola 3.ª $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{b^2}}=\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2}}$; generalmente $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$.

Criterj di radici comunicanti.

1.° Saranno comunicanti le radici $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ se fatto il prodotto $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, sia ab un quadrato, supponiamo c^2; poichè dall'equazione $ab=c^2$, ne segue $a:c::c:b$, e quinci $a:b::a^2:c^2$; $\sqrt{a}:\sqrt{b}::a:c$, ed in fine $\sqrt{b}=\frac{c}{a}\sqrt{a}$.

2.° Comunicanti similmente saranno le radici $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ se divisa l'una per l'altra, nel quoziente $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ sia $\frac{a}{b}$ un quadrato, pensa d^2, poichè da $\frac{a}{b}=d^2$, ne viene $a=bd^2$, $\sqrt{a}=\sqrt{bd^2}=d\sqrt{b}$.

3.° Comunicheranno tra loro $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ se a, b sieno relativamente delle forme g^2n, h^2n, vale dire, se divider si possano in un fattore comune n, e due fattori differenti quadrati g^2, h^2. Poichè, oltre al verificarsi in tal supposto evidentemente ambidue i criterj superiori, con operazione retrograda a quella della Regola 3.ª della moltiplica si ha $\sqrt{g^2n}=\sqrt{g^2}\times\sqrt{n}=g\sqrt{n}$, e $\sqrt{h^2n}=\sqrt{h^2}\times\sqrt{n}=h\sqrt{n}$; laonde $\sqrt{g^2n}:\sqrt{h^2n}::g\sqrt{n}:h\sqrt{n}::g:h$.

Le radici di radici $\sqrt{\sqrt{g^2n}}$, $\sqrt{\sqrt{h^2n}}$ sono comunicanti in potenza, cioè in quadrato; poichè i quadrati loro sono $\sqrt{g^2n}$, $\sqrt{h^2n}$.

$\sqrt{\sqrt{g^2 n}} \times \sqrt{\sqrt{h^2 n}}$ produce $\sqrt{g h n}$. Questa radice diverrà numero se $g h n$ sia quadrato. Perciò delle radici di radici comunicanti in potenza ve ne ha due sorti: altre che moltiplicate fra loro producon radice; altre che producon numero. A produrre numero è d'uopo, che $g h n$ sia un quadrato; il che può in due modi avvenire: 1.° essendo $g h = n$, cioè il prodotto dei lati dei due diversi fattori quadrati uguale al fattore comune: 2.° essendo il prodotto di uno di quei lati con il comun fattore uguale all'altro di essi lati, come $g n = h$. Nel 1.° caso $\sqrt{\sqrt{g^2 n}}$, $\sqrt{\sqrt{h^2 n}}$ ricevono le forme $\sqrt{\sqrt{g^3 h}}$, $\sqrt{\sqrt{h^3 g}}$, o le due $\sqrt{\sqrt{g^2 n}}$, $\sqrt{\sqrt{\frac{n^3}{g^2}}}$. Nel caso 2.° le forme $\sqrt{\sqrt{g^2 n}}$, $\sqrt{\sqrt{g^2 n^3}}$, o le due $\sqrt{\sqrt{g h}}$, $\sqrt{\sqrt{\frac{h^3}{g}}}$, od anche le due $\sqrt{\sqrt{\frac{h^2}{n}}}$, $\sqrt{\sqrt{h^2 n}}$. Se nelle due seconde di questo caso $\sqrt{\sqrt{g h}}$, $\sqrt{\sqrt{\frac{h^3}{g}}}$ si supponga $g h = p$, nascono le due $\sqrt{\sqrt{p}}$, $\sqrt{\sqrt{\frac{h^4}{p}}}$, e sono a vero dire queste due le uniche da Frate Luca assegnate.

Addizione, e sottrazione.

Regola 1.ª $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{(a + b \pm 2\sqrt{a b})}$. Questa regola è ottima, ed utile, ogni qual volta $a b$ è un quadrato, cioè $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ sono comunicanti; ma in caso diverso torna più conto attenerci alla mera indicazione del congiungimento o disgiungimento loro per i segni $\pm$. Con ragione pertanto Tartaglia rimprovera a Frate Luca, ed al Cardano, che lo seguì, di farne uso anche fuori del caso delle radici comunicanti.

Regola 2.ª $\sqrt{\sqrt{a}} \pm \sqrt{\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{b}} \times \left(\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}}} \pm 1\right)$. Si può piuttosto dire una trasformazione o della somma, o della sottrazione.

Regola 3.ª $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \pm 1\right)$.

Regola 4.ª $\sqrt{a} \pm \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3} \pm \sqrt[6]{b^2} = \sqrt[6]{b^2} \times \left(\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2}} \pm 1\right)$.

§. II.

Calcolo delle quantità irrazionali composte.

Le regole di questo calcolo sono formate combinando le regole di quello su le quantità irrazionali semplici con le regole del più, e del meno: è inutile il qui riportarle; fuori però di quella, che io chiamo

Razionalizzamento del denominatore nelle frazioni irrazionali.

Caso 1.° $\frac{m}{a+\sqrt{b}} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$. Viceversa $\frac{m}{a-\sqrt{b}} = \frac{m(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})} = \frac{m(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$. Il simile, se in luogo di a vi fosse $\sqrt{a}$.

Caso 2.° $\frac{m}{a\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} = \frac{m(a\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(a\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c})(a\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c})} = \frac{m(a\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(a\pm\sqrt{b})^2-c}$ $= \frac{m(a\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{a^2+b-c\pm 2a\sqrt{b}}$; con che si è al caso antecedente.

Caso 3.° $\frac{m}{a\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}} = \frac{m(a\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\mp\sqrt{d})}{(a\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d})(a\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\mp\sqrt{d})} =$ $\frac{m(a\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\mp\sqrt{d})}{(a\pm\sqrt{b})^2-(\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d})^2} = \frac{m(a\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\mp\sqrt{d})}{a^2+b-c-d\pm 2a\sqrt{b}\mp 2\sqrt{cd}}$, ciò che ci mette al caso, che precede.

Caso 4.° $\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}} = \frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\mp\sqrt{d})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d})(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\mp\sqrt{d})} =$ $\frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\mp\sqrt{d})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c})^2-d} = \frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\mp\sqrt{d})}{a+b+c-d\pm 2\sqrt{ab}\pm 2\sqrt{ac}\pm 2\sqrt{bc}}$, che è una riduzione al prossimo superior caso 3.°.

Questo quarto caso si può a dirittura, non meno che il 3.°, ridurre al caso 2.° cangiando, nel formare il moltiplicatore del numeratore e del denominatore, il segno a due insieme dei quattro termini del denominatore stesso, come nel caso 3.° si è fatto, in vece di cangiarlo ad un solo, cioè all'ultimo. Per l'opposto il trattare il caso 3.° nel modo che si è trattato il 4.°, non cangiando nella formazione del moltiplicatore, che il segno dell'ultimo termine, sarebbe un perder tempo, e rimanere deluso nell'intento. Poichè nel prodotto $(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \pm \sqrt{d})(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \mp \sqrt{d}) = (a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c})^2 - d$ avrebbersi di nuovo, non altrimenti che prima, tre radicali in effettuare il quadrato $(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c})^2$ a cagione delle tre combinazioni a due a due, o dei tre rettangoli dei tre termini a, $\pm \sqrt{b}$, $\pm \sqrt{c}$. Vi ha dunque nel caso del denominator quadrinomiale differenza dall'essere un termine a, cioè razionale, all'essere irrazionale $\sqrt{a}$. Questa avvertenza sfuggì a Frate Luca, il quale indistintamente asserisce nella pagina 142: *che se di quatro nomi uno si cavi da li altri tre, el rimanente quadrinomiale moltiplicato via tutto el quadrinomio produce trinomio.* Passa lo stesso Frate Luca oltre il quadrinomio, e stendendo indefinitamente la proposizione, con tutta generalità pronuncia, che *levato in una quantità moltinomia uno dei nomi de li altri remanenti, e quel resto over reciso moltiplicato via la quantità moltinomia produra sempre uno nome manco.* Frate Luca però si è lasciato ingannare argomentando per analogía da ciò, che succede sino al quadrinomio, ma che non si verifica più avanti; ed accorto sarebbesi dell'errore se disceso fosse al fatto, esperimentando sul quinomio anche solo. Io lasciate le prove pratiche dimostrerò teoricamente. Sia il moltinomio $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} \ldots + \sqrt{l}$ di numero n termini o nomi, e si moltiplichi giusta il voler di Frate Luca per il moltinomio

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\ \ldots\ldots - \sqrt{l}$, lo stesso che il proposto, tranne il cangiamento del segno $+$ in $-$ all' ultimo termine: il prodotto sarà $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\ \ldots)^2 - l$. Effettuando il quadrato, il numero che risulterà de' radicali sarà uguale al numero dei rettangoli o sia al numero delle combinazioni a due a due dei termini $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, $\sqrt{e}\ \ldots\ldots$ i quali sono in numero $n-1$; dunque per la regola delle combinazioni il numero de' nascenti radicali sarà $\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}$: si vuole che questo numero sia di 1 meno, che il numero de' nomi nel moltinomio proposto, cioè che sia $n-1$: dunque dovrà essere $\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}=n-1$; per conseguenza $\frac{n-2}{1\,.\,2}=1$, $n-2=1\,.\,2$, $n=4$. Egli è dunque proprio soltanto del quadrinomio, che moltiplicato nel reciso formato rendendo negativo uno de' suoi termini, nel prodotto si diminuisca di uno il numero de' radicali. E di vero immaginando nel 2.° caso $\sqrt{a}$ in luogo di a, si vede, che ciononostante il numero di tre radicali si riduce ad un solo. Laonde la proposizione di Frate Luca è falsa sopra, e sotto il quadrinomio: sotto, perchè nel binomio, e nel trinomio il numero de' radicali si diminuisce di 2; sopra, perchè in vece di diminuirsi cresce. Ed il decrescente diminuimento stesso nel passaggio dal trinomio al quadrinomio dovea rattenerlo da estendere ai moltinomj superiori, ciò, che si trova vero nel quadrinomio. Investighiam ora sin dove si estende l'utilità del metodo, da me adoperato nel caso 3.°, di cangiare cioè non ad uno solamente, ma a due insieme dei termini il segno. Si ottenne là per tal metodo, che il numero dei radicali si diminuisse di 2, ma basta che si diminuisca di 1: cerchiamo dunque quando ciò accada. Avremo pertanto

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\ \ldots\ +\sqrt{k}+\sqrt{l})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\ \ldots\ -\sqrt{k}-\sqrt{l})=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\ \ldots)^2-(\sqrt{k}+\sqrt{l})^2$.

Il numero dei termini del moltinomio proposto essendo n, il numero dei lasciati col proprio segno e componenti il lato del primo di questi due quadrati sarà $n-2$, per conseguenza il numero delle loro combinazioni a due a due, cioè il numero dei radicali nel quadrato risultanti $\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}$; il quadrato secondo dà un altro radicale: dunque l'intero numero de' radicali sarà $\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}+1$; e questo si desidera, che non sia che $n-1$: sarà dunque $\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}+1=n-1$, perciò $\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}=n-2$, o sia $\frac{n-3}{1\,.\,2}=1$, e quinci $n=5$. Sarà cioè il quinomio il termine dell'utilità del cangiare nella formazione del moltiplicatore il segno a due insieme dei termini. Indaghiamo per simil modo il limite della utilità di cangiare a tre termini insiememente il segno. E sarà
$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\ \ldots\ +\sqrt{i}+\sqrt{k}+\sqrt{l})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\ \ldots\ -\sqrt{i}-\sqrt{k}-\sqrt{l})=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\ \ldots)^2-(\sqrt{i}+\sqrt{k}+\sqrt{l})^2$, dal primo dei quali due quadrati proverranno radicali numero $\frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}$, dal secondo 3, così che il numero intero sarà $\frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}+3$, e volendo che sia $n-1$, si avrà l'equazione $\frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}+3=n-1$, $\frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}=n-4$, $\frac{n-3}{1\,.\,2}=n.2$, $n=5$. Dunque anche pel cangiamento del segno a tre dei termini il limite dell'utilità è il quinomio. Procediamo a cercare il limite pel cangiamento del segno a quattro termini; e avremo

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ldots\ldots+\sqrt{h}+\sqrt{i}+\sqrt{k}+\sqrt{l})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ldots\ldots-\sqrt{h}-\sqrt{i}-\sqrt{k}-\sqrt{l})=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ldots\ldots)^2-(\sqrt{h}+\sqrt{i}+\sqrt{k}+\sqrt{l})^2$. Il numero dei radicali uscenti dal primo quadrato sarà $\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot2}$, ed il numero di quelli dal secondo uscenti $\frac{4\times3}{1\cdot2}=6$, onde fra gli uni e gli altri saranno $\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot2}+6$; e quindi, volendo, che sieno $n-1$, l'equazione $\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot2}+6=n-1$, conseguentemente $\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot2}=n-7$, $(n-4)(n-5)=2n-14$, $n^2-9n+20=2n-14$, $n^2-11n+34=0$, e risolvendo $n=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{121}{4}-34\right)}=\frac{11}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-15}$.

Queste radici immaginarie dimostrano non esservi moltinomio alcuno, in cui il cangiamento del segno a quattro termini insieme possa riuscir utile all'intento di scemare di 1 il numero dei radicali. Riflettendo al rapido crescere delle combinazioni a due a due, accresciuto il numero de' termini da combinarsi, si fa chiaro dover molto più tornare inutile il cangiamento del segno a cinque, a sei, o più termini, ed essere ad un tal artificio naturalmente imposto un confine. E vedesi quinci quanto erri Frate Luca, il quale siccome il cangiamento del segno ad un sol termine, così per modo ugualmente utile suggerisce l'altro estremo di cangiarlo a tutti, eccetto il primo, sia il moltinomio di qualsivoglia numero di termini. In luogo dunque della regola generale data da Frate Luca non abbiamo da poter aggiugnere ai già esposti casi che il caso del quinomio, e questo per due vie trattabile, ma ambedue diverse da quella segnata per essa general regola di Frate Luca.

Caso 5.° Modo 1.°

$$\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e}}=\frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\mp\sqrt{d}\mp\sqrt{e})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e})(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\mp\sqrt{d}\mp\sqrt{e})}=$$

$$\frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\mp\sqrt{d}\mp\sqrt{e})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c})^2-(\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e})^2}=\frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\mp\sqrt{d}\mp\sqrt{e})}{a+b+c-d-e\pm2\sqrt{ab}\pm2\sqrt{ac}\pm2\sqrt{bc}\mp2\sqrt{de}}.$$

Modo 2.°

$$\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e}}=\frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\mp\sqrt{d}\mp\sqrt{e})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e})(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\mp\sqrt{d}\mp\sqrt{e})}$$

$$=\frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\mp\sqrt{d}\mp\sqrt{e}}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2-(\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e})^2}=\frac{m(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\mp\sqrt{d}\mp\sqrt{e})}{a+b-c-d-e\pm2\sqrt{ab}-(\pm2\sqrt{cd}\pm2\sqrt{ce}\pm2\sqrt{de})}.$$

L'uno e l'altro dei due modi perdono la loro utilità, se in vece di $\sqrt{a}$ siavi a razionale; poichè dopo l'operazione resterà un denominatore composto di parte razionale, e di quattro radicali, come prima, con lo svantaggio anzi di quantità razionale complessa in luogo della incomplessa, e di radicali composti in luogo dei semplici. E perchè il denominator quinomiale di cinque radici per essi due modi riducesi ad un denominator quinomiale di quantità razionale e di quattro radicali, ne segue da ciò, che si vien da riflettere, che fatta questa riduzione resta interdetto il proseguire più oltre. Laonde sebbene gli esposti modi abbiano riguardo al quinomio la virtù del primo passo di riduzione, l'uso però loro torna infruttuoso all'oggetto di una riduzione compiuta del denominator irrazionale a razionale.

Non si ferma il Pacioli ai denominatori composti di radicali quadrati, ma procede a quelli, che comprendono dei radicali di radicali, da noi detti di quarto grado.

Caso 6.° $\frac{m}{a\pm\sqrt{\sqrt{b}}}=\frac{m(a\mp\sqrt{\sqrt{b}})}{(a\pm\sqrt{\sqrt{b}})(a\mp\sqrt{\sqrt{b}})}=\frac{m(a\mp\sqrt{\sqrt{b}})}{a^2-\sqrt{b}}$; e così è ridotto al caso 1.°.

Caso 7.° $\frac{m}{a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{\sqrt{c}}} = \frac{m(a \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{\sqrt{c}})}{(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c})(a \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{\sqrt{c}})} =$

$\frac{m(a \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{\sqrt{c}})}{(a \pm \sqrt{b})^2 - \sqrt{c}} = \frac{m(a \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{\sqrt{c}})}{a^2 + b \pm 2a\sqrt{b} - \sqrt{c}}$, con che è ridotto al caso 2.°.

Caso 8.° $\frac{m}{a \pm \sqrt{\sqrt{b}} \pm \sqrt{\sqrt{c}}} = \frac{m(a \pm \sqrt{\sqrt{b}} \mp \sqrt{\sqrt{c}})}{(a \pm \sqrt{\sqrt{b}} \pm \sqrt{\sqrt{c}})(a \pm \sqrt{\sqrt{b}} \mp \sqrt{\sqrt{c}})}$

$= \frac{m(a \pm \sqrt{\sqrt{b}} \mp \sqrt{\sqrt{c}})}{(a \pm \sqrt{\sqrt{b}})^2 - \sqrt{c}} = \frac{m(a \pm \sqrt{\sqrt{b}} \mp \sqrt{\sqrt{c}})}{a^2 + \sqrt{b} - \sqrt{c} \pm 2a\sqrt{\sqrt{b}}}$.

Caso 9.° $\frac{m}{a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \pm \sqrt{\sqrt{d}}} = \frac{m(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \mp \sqrt{\sqrt{d}})}{(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \pm \sqrt{\sqrt{d}})(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \mp \sqrt{\sqrt{d}})}$

$= \frac{m(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \mp \sqrt{\sqrt{d}})}{(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c})^2 - \sqrt{d}} = \frac{m(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \mp \sqrt{\sqrt{d}})}{a^2 + b + c \pm 2a\sqrt{b} \pm 2a\sqrt{c} \pm 2\sqrt{bc} - \sqrt{d}}$.

Questo caso 9.° serve di secondo passó del Caso 8.°, ma, per il riflettuto poco sopra, dato tal passo non è lecito andar più oltre, sebbene il contrario asserisca Frate Luca, e proposte tre frazioni con i denominatori $\sqrt{\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{2}} + \sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{6}} + \sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}}$, prometta, che, seguendo i modi da lui insegnati, si giugnerà a ridurre essi denominatori a quantità razionale, e chiuda ripetendo, che il calcolatore può per sè stesso procedere in infinito, se gli piace: Frate Luca asserì, e promise senza fondamento, diede alla dottrina una estensione indefinita contro verità, o natural limitamento, lasciandosi sedurre da una fallace conghiettura, piuttosto che assicurarsi con l'opera.

§. III.

Progressione geometrica di quantità binomiali senza frazioni.

Frate Luca nella Distinzione 6.ª del suo volume, trattando delle proporzioni, dopo avere dimostrati ne' numeri quelli, che egli con magnifico nome chiama maravigliosi effetti di esse, siccome nella mia storia dell'*Aritmetica* io già riferii, procede tosto con prepostera fretta a dimostrarli eziandío nelle quantità binomiali, intitolando tre articoli del trattato 6.° *De mirabilibus proportionum inter tres—quatuor—quinque quantitates binomiales.*

Luogo di tali meraviglie acconcio è qui in seguito alla dottrina del razionalizzamento del denominatore nelle frazioni irrazionali.

E primieramente sieno tre quantità binomiali in continua proporzione, quali le qui sotto:

Proporzione continua delle tre quantità binomiali

$\sqrt{54}-\sqrt{50} : \sqrt{6}-\sqrt{2} : \sqrt{6}+\sqrt{2} :: 1 : 2+\sqrt{3}$.

Poichè $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{54}-\sqrt{50}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{54}+\sqrt{50})}{(\sqrt{54}-\sqrt{50})(\sqrt{54}+\sqrt{50})} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$; e similmente $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$.

Aggregato di esse tre quantità binomiali $= \sqrt{54} - \sqrt{50} + 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}$.

Dividendo l'aggregato per ciascheduna, ne provengono li

Quozienti $\frac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{\sqrt{54}-\sqrt{50}} = 10+5\sqrt{3}$; $\frac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 5$; $\frac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 10-5\sqrt{3}$.

Proporzione di tali quozienti $10+5\sqrt{3} : 5 : 10 - 5\sqrt{3} :: 2+\sqrt{3} : 1$, o sia $:: 1 : 2-\sqrt{3}$, essendo $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1}$; dunque inversa della proporzione delle tre quantità binomiali.

Aggregato di essi quozienti $= 10 + 5\sqrt{3} + 5 + 10 - 5\sqrt{3} = 25$, razionale.

Dividendo questo aggregato per ciascheduno de' medesimi quozienti risultano

Quozienti 2.[i] $\frac{25}{10+5\sqrt{3}} = 10 - 5\sqrt{3}$; $\frac{25}{5} = 5$; $\frac{25}{10-5\sqrt{3}} = 10 + 5\sqrt{3}$.

Proporzione loro $10 - 5\sqrt{3} : 5 : 10 + 5\sqrt{3} :: 2 - \sqrt{3} : 1 :: 1 : 2 + \sqrt{3}$, la stessa, che quella delle tre assunte quantità binomiali.

Aggregato de' medesimi $= 25$, cioè al dividendo, e ciò necessariamente, essendo tali secondi quozienti gli stessi, tranne che con ordine inverso, che i primi, dei quali il dividendo 25 è la somma.

Ne segue quinci, che si è partito il numero 25 in tre parti continuamente proporzionali $10+5\sqrt{3}$, 5, $10-5\sqrt{3}$, sì fatte, che i quozienti dell'intero 25 per ciascuna diviso rendono in somma lo stesso intero 25.

Aggiunta alle tre quantità binomiali la quarta continuamente proporzionale, sarà

Proporzione continua delle quattro quantità binomiali $\sqrt{54} - \sqrt{50} : \sqrt{6} - \sqrt{2} : \sqrt{6} + \sqrt{2} : \sqrt{54} + \sqrt{50} :: 1 : 2 + \sqrt{3}$.

Aggregato loro $= 2\sqrt{54} + 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$.

Quozienti $\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{54}-\sqrt{50}} = 36 + 20\sqrt{3}$; $\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 12 + 4\sqrt{3}$; $\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 12 - 4\sqrt{3}$; $\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{54}+\sqrt{50}} = 36 - 20\sqrt{3}$.

Proporzione loro $36 + 20\sqrt{3} : 12 + 4\sqrt{3} : 12 - 4\sqrt{3} : 36 - 20\sqrt{3} :: 2 + \sqrt{3} : 1$.

Aggregato di essi $= 2 \times 36 + 2 \times 12 = 96$.

Quozienti 2.[i] $\frac{96}{36+20\sqrt{3}} = 36 - 20\sqrt{3}$; $\frac{96}{12+4\sqrt{3}} = 12 - 4\sqrt{3}$; $\frac{96}{12+4\sqrt{3}} = 12 + 4\sqrt{3}$; $\frac{96}{36-20\sqrt{3}} = 36 + 20\sqrt{3}$.

Proporzione loro $36-20\sqrt{3}:12-4\sqrt{3}:12+4\sqrt{3}:36+20\sqrt{3}::1:2+\sqrt{3}$.

Aggregato de' medesimi $=96$.

Si è dunque partito 96 in quattro parti continuamente proporzionali $36+20\sqrt{3}$, $12+4\sqrt{3}$, $12-4\sqrt{3}$, $36-20\sqrt{3}$ di tal fatta, che dividendo lo stesso 96 per ciascuna, la somma degli avvenimenti, o quozienti torna 96.

Si aggiunga alle quattro binomiali la quinta in continua proporzione, e sarà

Proporzione continua delle cinque binomiali $\sqrt{54}-\sqrt{50}:\sqrt{6}-\sqrt{2}:\sqrt{6}+\sqrt{2}:\sqrt{54}+\sqrt{50}:\sqrt{726}+\sqrt{722}::1:2+\sqrt{3}$.

Aggregato loro $=19\sqrt{6}+19\sqrt{2}$.

Quozienti $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{\sqrt{54}-\sqrt{50}}=133+76\sqrt{3}$; $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=38+19\sqrt{3}$; $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=19$; $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{\sqrt{54}+\sqrt{50}}=38-19\sqrt{3}$; $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{\sqrt{726}+\sqrt{722}}=133-76\sqrt{3}$.

Proporzione di essi $133+76\sqrt{3}:38+19\sqrt{3}:19:38-19\sqrt{3}:133-76\sqrt{3}::2+\sqrt{3}:1$.

Aggregato de' medesimi $=2\times133+2\times38+19=361$.

Quozienti 2.i $\frac{361}{133+76\sqrt{3}}=133-76\sqrt{3}$; $\frac{361}{38+19\sqrt{3}}=38-19\sqrt{3}$; $\frac{361}{19}=19$; $\frac{361}{38-19\sqrt{3}}=38+19\sqrt{3}$; $\frac{361}{133-76\sqrt{3}}=133+76\sqrt{3}$.

Proporzione loro $133-\sqrt{17328}:38-\sqrt{1083}:19:38+\sqrt{1083}:133+\sqrt{17328}::1:2+\sqrt{3}$.

Aggregato dei medesimi $=361$.

E così di 361 si son fatte cinque parti continuamente proporzionali $133+\sqrt{17328}$, $38+\sqrt{1083}$, 19, $38-\sqrt{1083}$, $133-\sqrt{17328}$, per ciascheduna delle quali dividendolo, la somma degli avvenimenti è ad esso lui uguale. Si può procedere all'infinito. E quinci è aperta la via a sciogliere in generale il seguente

Problema. Dividere un qualunque dato numero N in quante si voglia parti continuamente proporzionali, di tal condizione, che per ciascheduna dividendolo, la somma degli avvenimenti, o quozienti lo uguagli? Se vogliasi N diviso in tre parti si prenda $\frac{N}{25}$ di ciascuna delle parti, nelle quali fu diviso 25; poichè dinotando per p una qualunque delle parti di 25, e per P la corrispondente di N deve stare $25 : N :: p : P$; conseguentemente $P = \frac{N}{25} \times p$. Per simil ragione volendo N in quattro parti diviso, ciò si farà, prendendo $\frac{N}{96}$ di ciascheduna delle parti, nelle quali si divise il 96; e volendo N diviso in cinque parti si conseguirà l'intento con pigliare $\frac{N}{361}$ di ciascuna delle parti della divisione del 361; e così via via per la divisione di N in 6, in 7, in qualunque numero di parti all'infinito.

Problema 2.° Merita di essere considerata la progressione delle usate quantità binomiali per la bella proprietà, che dividendo la somma di un numero qualunque di esse per ciascheduna, i quozienti tutti riescono interi senza frazione veruna; e tali, che nella somma loro, elidendosi i radicali, risulti numero semplice; e dividendo la somma de' quozienti per ciascheduno di loro, i nuovi quozienti ancora riescono tutti interi senza mescolamento di rotto. E come la formò egli Frate Luca, o qual altro antico, che ne fu l'autore? Ve ne possono essere altre simili? E potendovi essere, qual è la regola generale per formarle? Ciò è che Frate Luca si propone d'insegnare brevemente nel succinto articolo 8.° del trattato 6.° della Distinzione 6.ª sotto il titolo: *Modus inveniendi plures quantitates sine fractis in* *quacunque proportione*; ma egli è questo uno dei luoghi più tenebrosi di Frate Luca, per modo, che io sono stato obbligato a sciogliere da me il problema.

Risoluzione. Si prenda la formola generale di una progressione geometrica

$$t : tq : tq^2 : tq^3 : tq^4 \ldots\ldots tq^{n-1}.$$

Dividendo la somma per ciascheduno dei termini, risultano i quozienti

$$\frac{t+tq+tq^2\ldots\ldots+tq^{n-1}}{t} = 1+q+q^2\ldots\ldots+q^{n-1}$$

$$\frac{t+tq+tq^2\ldots\ldots+tq^{n-1}}{tq} = \frac{1+q+q^2\ldots\ldots+q^{n-1}}{q}$$

$$\frac{t+tq+tq^2\ldots\ldots+tq^{n-1}}{tq^2} = \frac{1+q+q^2\ldots\ldots+q^{n-1}}{q^2}$$

$$\frac{t+tq+tq^2\ldots\ldots+tq^{n-1}}{tq^3} = \frac{1+q+q^2\ldots\ldots+q^{n-1}}{q^3}$$

. . . .

$$\frac{t+tq+tq^2\ldots\ldots+tq^{n-1}}{tq^{n-1}} = \frac{1+q+q^2\ldots\ldots+q^{n-1}}{q^{n-1}}$$

È chiaro, che i quozienti formano una progressione, esponente della quale è $\frac{1}{q}$. Ad ottener dunque, che essi quozienti sieno quantità intere, è d'uopo, che q sia tal quantità intera, che insieme $\frac{1}{q}$ equivalga a quantità intera. Ciò non può già essere in numeri, ma lo può essere in quantità binomiali. Sia $q = \sqrt{f} \pm \sqrt{h}$, e sarà $\frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{f}\pm\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{f}\mp\sqrt{h}}{(\sqrt{f}\pm\sqrt{h})(\sqrt{f}\mp\sqrt{h})} = \frac{\sqrt{f}\mp\sqrt{h}}{f-h}$. A fine che questa sia quantità intera basta, che sia $f-h=1$, cioè $f-1=h$. Dunque sarà conseguito l'intento, che i quozienti sieno interi, purchè sia $q = \sqrt{f} \pm \sqrt{(f-1)}$, e coerentemente $\frac{1}{q} = \sqrt{f} \mp \sqrt{(f-1)}$. Per non cagionare difficoltà al limpido intendimento con la contemplazione di due casi insieme, fissiamo la mente a $q = \sqrt{f} + \sqrt{(f-1)}$, $\frac{1}{q} = \sqrt{f} - \sqrt{f-1})$: il primo dei quozienti verrà ad essere

$1+\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)}+(\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)})^2 \ldots\ldots +$ $(\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)})^{n-1}$, che per un momento chiamerò H; e così la somma de' quozienti si rappresenterà per

$H+H(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})+H(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^2+H(\sqrt{f}-$ $\sqrt{(f-1)})^3+H(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^4+H(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^5\ldots+$ $H(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^{n-1}$.

$=H(1+\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)}+(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^2+(\sqrt{f}-$ $\sqrt{(f-1)})^3+(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^4+(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^5\ldots\ldots+$ $(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^{n-1}$.

Onde restituendo il valor di H la espression vera di essa somma de' quozienti sarà

$(1+\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)}+(\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)})^2+(\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)})^3+$
$\ldots\ldots+\sqrt{(f+\sqrt{(f-1)})^{n-1}})$
$\times(1+\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)}+(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^2+(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^3$
$+\ldots\ldots+(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^{n-1})$.

In questa moltiplica io distinguo due sorta di prodotti. La prima è di quelli di una potenza m di $\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)}$ con la potenza parimenti m di $\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)}$: la general formola di tali prodotti, ed il general comune loro effetto si è $(\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)})^m(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^m=((\sqrt{f}+$ $\sqrt{(f-1)})(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)}))^m=(f-(f-1))^m=1^m=1$. La seconda sorta di prodotti si è di una potenza m di $\sqrt{f}+$ $\sqrt{f-1})$ con una potenza diversa $m+l$ di $\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)}$, e reciprocamente, e la formola generale loro è $(\sqrt{f}+$ $\sqrt{(f-1)})^m(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^{m+l}+(\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)})^{m+l}(\sqrt{f}-$ $\sqrt{(f-1)})^m=((\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)})(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)}))^m\times((\sqrt{f}-$ $\sqrt{(f-1)})^l+(\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)})^l)=(\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)})^l+(\sqrt{f}+$ $\sqrt{(f-1)})^l$. In queste due potenze l di $\sqrt{f}-\sqrt{(f-1)}$, e di $\sqrt{f}+\sqrt{(f-1)}$, saranno di contrario segno, e si elideranno tutti i termini di luogo pari, secondo, quarto, sesto ec., ne' quali il radicale $\sqrt{(f-1)}$ essendo elevato a podestà dispari si conserverà irrazionale, e sussisteranno i soli termini di luogo dispari, primo, terzo, quinto ec., ne' quali $\sqrt{(f-1)}$ elevato a podestà pari sarà divenuto razionale, e si troverà moltiplicato con $\sqrt{f}$ innalzato a podestà dispari, e per conseguenza ritenente la irrazionalità. Ad ottenere dunque l'intento, che la somma de' quozienti sia razionale altro di più non si richiede, se non che f sia un quadrato. Si avranno pertanto tutte e due insieme le condizioni, e che i quozienti sieno ciascheduno quantità intera, e che la somma loro formi numero intero razionale se prendasi l'esponente della progressione $q=g+\sqrt{(g^2-1)}$, e conseguentemente $\frac{1}{q}=g-\sqrt{(g^2-1)}$. In tutto questo calcolo non è entrata la considerazione di t, cioè del primo termine della progressione; dunque esso può essere qualunque cosa più piaccia; il verificamento delle due condizioni è dalla natura di lui indipendente, ed elleno non sono per alcun conto proprie della progressione delle quantità binomiali.

Se t sia quantità razionale, o numero, si avrà una progressione da numero cominciante, e per quantità binomiali proseguente, fornita delle due condizioni; 1.ª che divisa la somma di un numero qualunque di termini per ciascheduno di essi, i quozienti sieno quantità intere: 2.ª che la somma di tali quozienti dia numero.

Se t sia quantità irrazionale semplice, o monomia, esempigrazia $\sqrt{A}$, si avrà una progressione da quantità irrazionale incominciante, e per quantità binomiali proseguente adorna delle due condizioni.

Se t sia quantità binomiale $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, si avrà una progressione da quantità binomiale cominciante, e per quantità quadrinomiali proseguente delle due condizioni dotata.

Ma e che? Non si può avere una progressione di quantità tutta binomiali delle due condizioni fornita? Vediamo se, e come possibil sia. Posto a primo termine il binomio $\surd A + \surd B$, e per esponente della progressione preso $g + \surd(g^2 - 1)$, ne viene a secondo termine il prodotto $(\surd A + \surd B)(g + \surd(g^2 - 1))$, il quale in genere riesce un quadrinomio $g\surd A + g\surd B + \surd A(g^2 - 1) + \surd B(g^2 - 1)$. Si tratta di sapere se questo quadrinomio può ridursi ad un binomio. E si può, dando a B rispetto ad A un tal valore, che riescano comunicanti tra loro i radicali, due, e due; nè in una maniera sola, ma in due può ciò conseguirsi: 1.ª facendo $A = c^2 B$ con che resi comunicanti i radicali primo e secondo, ed il terzo e quarto, il quadrinomio si riduce al binomio $(gc + g)\surd B + (c + 1)\surd B(g^2 - 1) = ((c + 1)g + (c + 1)\surd(g^2 - 1))\surd B$: 2.ª pigliando $A = (g^2 - 1)B$, il che rende comunicanti i due radicali primo, e quarto, ed i due secondo e terzo, e restringe il quadrinomio al binomio $(g + 1)\surd B(g^2 - 1) + (g + g^2 - 1)\surd B = ((g + 1)\surd(g^2 - 1) + g + g^2 - 1)\surd B$.

Si hanno dunque i due elementi per formare la desiderata progressione di quantità binomiali, cioè il primo termine, e l'esponente. A primo termine convien prendere quello, che risulta dal secondo assunto $B = (g^2 - 1)A$, il quale cangia $\surd A + \surd B$ in $\surd B(g^2 - 1) + \surd B$; poichè quello, che nasce dal primo assunto $B = A c^2$, che converte $\surd A + \surd B$ in $\surd c^2 B + \surd B = (c + 1)\surd B$, ci riconduce alla progressione cominciante da quantità irrazionale monomia. Ecco pertanto i veri

Elementi della richiesta progressione di quantità binomiali.

Primo termine $\sqrt{B(g^2-1)}+\sqrt{B}$..... Esponente $g+\sqrt{(g^2-1)}$. Quinci il termine generale.... $(\sqrt{B(g^2-1)}+\sqrt{B})(g+\sqrt{(g^2-1)})^{n-1}$.

Che qualunque termine in questo general prodotto rappresentato sia per essere binomiale, è cosa chiara. Poichè la potenza $(g+\sqrt{(g^2-1)})^{n-1}$ non può dare che dei termini razionali composti di g, i quali io comprenderò sotto il simbolo G, e dei termini irrazionali contenenti $\sqrt{(g^2-1)}$, che radunerò in $H\sqrt{(g^2-1)}$, onde sarà $(g+\sqrt{(g^2-1)})^{n-1}=G+H\sqrt{(g^2-1)}$; il fattore $\sqrt{B(g^2+1)}+\sqrt{B}$ si scioglie in $(1+\sqrt{(g^2-1)})\sqrt{B}$: conseguentemente il prodotto riducesi a $(1+\sqrt{(g^2-1)})(G+H\sqrt{(g^2-1)})\sqrt{B}=(G+H(g^2-1)+(G+H)\sqrt{(g^2-1)})\sqrt{B}$, quantità binomiale.

Si ottiene la progressione di Frate Luca $\sqrt{54}-\sqrt{50}:\sqrt{6}-\sqrt{2}:\sqrt{6}+\sqrt{2}:\sqrt{54}+\sqrt{50}:\sqrt{726}+\sqrt{722}$..... (considerando per primo termine $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, ed i due $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{54}-50$ come termini del ramo discendente) con fare $B=2$, $g=2$, poichè quinci si ha $\sqrt{B(g^2-1)}+\sqrt{B}=\sqrt{2\times3}+\sqrt{2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, e $g+\sqrt{(g^2-1)}=2+\sqrt{3}$.

Or che il problema è per me sciolto, ascoltisi il dire di Frate Luca: *Quando tu vorrai trouare alquante qª binomiali proportionali continue fra loro in qualunque proportione te piaci senza fractione e che la summa de quelle partita per ciascuno de ditti binomij e li havenimenti gionti insiemi facino una sola qª semplici. Commo a dir 6 over 25 over 96 over 361 etc. Sempre fa che tu prenda per uno de li binomij uno binomio primo a te piaci a libito. E per l altro prende-*

rai sempre el suo reciso o voli dire residuo. Poi con questi doi tu potrai proportionare a quelli infiniti altri in qual proportione vorrai mediante le vie e forze date di sopra. E fa che tu ponga lo menore de quelli per lo primo over per lo secondo de tutti. L altro lo porrai a tuo placito. E per lo terzo over quarto etc. commo te parera. Commo tu hai doi q^a^ proportionate ne potrai trouare infinite altre a quelle corrispondenti si commo tu hai sopra veduto. Che noi habiamo fatto in li precedenti. Dove sempre havemo tenuti fermi doi binomij cioe ℞ 6 *piu* ℞ 2. *E per l altro* ℞ 6 *meno* ℞ 2. *E secondo quelli habiamo tuttora proportionati li sequenti over antecedenti. E sempre ne riuscita q^a^ discreta e rationata. E cosi tu simile farai in le acadenti.* Si provi il lettore a riscontrare in questo tratto di Frate Luca la risoluzione per me data. L'esponente, che io ho trovato dover la progressione avere $g+\sqrt{(g^2-1)}$, è veracemente un binomio *primo* giusta la denominazione euclidea; ma è esponente della progressione, non primo termine di essa; nè verun de' suoi termini in genere può esser binomio *primo* in senso euclideo stando $\sqrt{B}$ irrazionale; e certamente binomio o reciso di tal fatta non è alcuna delle quantità binomiali $\sqrt{54}-\sqrt{50}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $\sqrt{54}+\sqrt{50}$ . . . . . delle quali Frate Luca costituisce la progressione, che adopera.

§. IV.

LIBRO X. DI EUCLIDE

IN ALGEBRAICO QUADRO.

Specie di linee, e di spazj semplici.

Linea razionale in lunghezza . . . . A

Frate Luca usa eziandío i vocaboli *Ratiocinata-Rationata.*

Linea razionale in potenza . . . . $\sqrt{A}$

Noi la chiamiamo irrazionale quadratica, ed anche semplicemente irrazionale, riguardandola per quella, con cui l'ordine delle irrazionali incomincia. E da Tartaglia ci è detto, che tale si era pure il linguaggio de' pratici a' giorni suoi.

Linea irrazionale. . . . . $\sqrt[2+t]{A}$

cioè qualunque radicale oltra il quadratico.

Linea mediale . . . . $\sqrt{\sqrt{A}}=\sqrt[4]{A}$.

È così chiamata da Euclide, perchè media proporzionale tra 1, e $\sqrt{A}$. Da noi appellasi irrazionale biquadratica.

Superficie razionale . . . A^2 . . . AB . . . $\sqrt{A}\times\sqrt{A}=A=1\times A$.

Superficie irrazionale $\sqrt[2+t]{A}\times\sqrt[2+t]{A}=\sqrt[2+t]{A^2}$ . . . . $\sqrt[r]{A}\times\sqrt[t]{B}=\sqrt[rt]{A^t B^r}$.

Superficie mediale . . . $\left(\sqrt{\sqrt{A}}\right)^2=\sqrt{A}$ . . . $\sqrt{A}\times\sqrt{B}=\sqrt{AB}$ . . . . $B\sqrt{A}=\sqrt{AB^2}$ . . . $\sqrt{\sqrt{B^2A}}\times\sqrt{\sqrt{C^2A}}=\sqrt{ABC}$.

Acconcia in tutti i casi si è la euclidea denominazione. Poichè nel primo caso la superficie è il quadrato della linea mediale; nel secondo equivale al quadrato della linea media proporzionale tra $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, e similmente in ogni altro.

Relazioni di linee.

Relaz. I. Due linee razionali solamente in potenza comunicanti, la più lunga delle quali superi in sua potenza la potenza della minore nel quadrato di una linea a sè medesima commensurabile in lunghezza.

Caso 1.° Che una delle due linee sia razionale in lunghezza.

Modo 1.° Che questa sia la più lunga

$$a \ldots\ldots\ldots \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}$$

più semplicemente $a \ldots\ldots\ldots \sqrt{(a^2-d^2)}$

La espressione $\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}$ della seconda linea è quella, che propiamente nasce dal metodo di Euclide. Ma perchè $\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}=\sqrt{\left(a^2-\frac{a^2c^2}{b^2}\right)}$, rappresentando $\frac{a^2c^2}{b^2}$ per d^2, si riduce alla più semplice forma $\sqrt{(a^2-d^2)}$. Che poi nelle poste algebraiche espressioni si verifichino le condizioni richieste, la cosa è di sè evidente rispetto all'essere le due linee solamente in potenza comunicanti; chè nol sono certo in lor lunghezza, o quali si presentano; ma sì bene elevate a quadrato, divenendo a^2, $\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}$, ovvero a^2, a^2-d^2. Quanto alla condizione seconda, che la più lunga superi in potenza la più corta nel quadrato di una linea ad essa più lunga commensurabile, l'eccesso della potenza della linea a sopra la potenza della linea $\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}$ è uguale alla differenza dei quadrati loro, cioè $=a^2-\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}=\frac{a^2c^2}{b^2}$. Ma $\sqrt{\frac{a^2c^2}{b^2}}=\frac{ac}{b}$, e questa linea è alla linea a manifestamente in lunghezza commensurabile; dunque la linea a supera in potenza la linea $\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}$ nel quadrato di una linea a sè in lunghezza commensurabile, come voleasi. Istessamente conchiudesi dalla più semplice espressione, essendo $a^2 - (a^2 - b^2) = b^2$, $\sqrt{b^2} = b$, linea, non altrimenti che a, razionale in lunghezza, e conseguentemente ad essa in lunghezza commensurabile.

Modo 2.° Che la linea più lunga sia razionale in potenza

$$\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; a$$

$\left(\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}\right)^2 - a^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2-c^2} - a^2 = \frac{a^2 c^2}{b^2-c^2}$. Or $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \; \sqrt{\frac{a^2 c^2}{b^2-c^2}} :: b : c$; dunque si verifica il requisito della relazione.

Caso 2.° Che ambedue le linee sieno razionali in potenza

$$\sqrt{a} \; \ldots\ldots\ldots \; \sqrt{\frac{a(b^2-c^2)}{b^2}}$$

$(\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{\frac{a(b^2-c^2)}{b^2}}\right)^2 = \frac{a c^2}{b^2}$; $\sqrt{a} : \sqrt{\frac{a c^2}{b^2}} :: 1 : \frac{c}{b}$; dunque avverata la condizione prescritta.

Relaz. II. Due linee razionali solamente in potenza commensurabili, la più lunga delle quali superi in potenza la minore nel quadrato di una linea a sè incommensurabile in lunghezza.

Caso 1.° Che una delle linee sia razionale in lunghezza

Modo 1.° Che questa sia la più lunga

$$a \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}$$

più semplicemente $a \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \sqrt{(a^2-d)}$.

Modo 2.° Che sia la più lunga la razionale in potenza

$$\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c}} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; a$$

più semplicemente $\sqrt{(a^2+d)} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; a$

Caso 2.° Che ambedue le linee sieno razionali in potenza

$$\sqrt{a} \;\ldots\ldots\ldots\; \sqrt{\frac{a(b^2-c)}{b^2}}$$

più semplicemente $\sqrt{a} \;\ldots\ldots\ldots\; \sqrt{(a-d)}$.

Lascio al Leggitore il dimostrarsi in tutte, e nelle primitive, e nelle ridotte espressioni adempiuti i requisiti della relazione.

Relaz. III. Due linee mediali solamente in potenza comunicanti, le quali contengano superficie razionale, e delle quali la più lunga ecceda in potenza la minore nel quadrato di una linea a sè commensurabile in lunghezza.

A determinarle giusta il metodo di Euclide si dicano $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ le due linee della Relaz. I., delle quali $\sqrt{A}$ la maggiore, e $\sqrt{B}$ la minore, concependo A, o B quadrato, conseguentemente $\sqrt{A}$, o $\sqrt{B}$ razionale in lunghezza secondo i diversi casi, e modi. Prendasi tra $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ la media proporzionale $\sqrt{\sqrt{AB}}$, indi istituiscasi la proporzione $\sqrt{A} : \sqrt{B} :: \sqrt{\sqrt{AB}} : \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}\sqrt{\sqrt{AB}} = \sqrt{\sqrt{\frac{B^3}{A}}}$: saranno $\sqrt{\sqrt{AB}}$, $\sqrt{\sqrt{\frac{B^3}{A}}}$ le due linee ricercate. Queste rappresentazioni però di esse non sono, che implicite, rimanendo, a renderle esplicite, lo spiegare A, B nelle proprie varie loro espressioni. Quinci io dico

Forma implicita $\sqrt{\sqrt{AB}} \;\ldots\ldots\ldots\; \sqrt{\sqrt{\frac{B^3}{A}}}$

Forma esplicita 1.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}} \;\ldots\ldots\; \sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)^3}{b^6}}}$

2.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}}} \;\ldots\ldots\ldots\; \sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}}$

3.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}} \;\ldots\ldots\; \sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)^3}{b^6}}}$.

Che si avverino in queste forme le condizioni per la relazione volute, io scelgo a dimostrarlo nella seconda, siccome quella, nella quale vi ha bisogno di un po' d'industria particolare. Ciò è di riflettere, che $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}}$ val quanto $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2 (b^2-c^2)^2}{(b^2-c^2) b^4}}}$. Il che premesso, è chiaro in 1.° luogo essere il quadrato di $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}}}$ al quadrato di $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2 (b^2-c^2)^2}{(b^2-c^2) b^4}}} :: \sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}} : \frac{b^2-c^2}{b^2} \sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}} :: 1 : \frac{b^2-c^2}{b^2}$; dunque le due mediali sono in potenza comunicanti. In 2.° luogo $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}}} \times \sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}} = \sqrt{\sqrt{a^8}} = a^2$; dunque la superficie per loro prodotta, o da lor contenuta è razionale: 3.° la differenza dei quadrati è $= \left(1-\frac{b^2-c^2}{b^2}\right) \sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}} = \frac{c^2}{b^2} \sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}}$; laonde, essendo $\sqrt{\frac{c^2}{b^2} \sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}}} = \frac{c}{b} \sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}}}$ una linea evidentemente commensurabile alla linea $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}}}$, resta dimostrato essere la potenza della prima mediale superiore alla potenza della seconda nel quadrato di una linea alla stessa mediale prima in lunghezza commensurabile, come bramavasi. Con la scorta di questo esempio scorra il Leggitor dimostrando su le altre due forme.

Relaz. IV. Due linee mediali solamente in potenza comunicanti, che contengano superficie razionale, e la più lunga delle quali superi in potenza la minore nel quadrato di una linea a sè in lunghezza incommensurabile.

Si traggono dalle linee della Relaz. II. nel modo stesso, che le due mediali della Relaz. antecedente III. da quelle della Relaz. I.. Chiamate pertanto $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$ le due linee della Relaz. II., sarà

Forma implicita $\sqrt{\sqrt{C\,D}}$ . . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{D^3}{C}}}$

Forma esplicita 1.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}}$ . . . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)^3}{b^6}}}$

2.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c}}}$ . . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}}$

3.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}}$ . . . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)^3}{b^6}}}$.

Relaz. V. Due linee mediali solamente in potenza comunicanti, che contengano superficie mediale, e delle quali la più lunga ecceda in potenza la minore nel quadrato di una linea a sè commensurabile in lunghezza.

È ommessa da Euclide questa relazione; ma se ne trovano le linee col metodo stesso da lui usato in quella, che seguirà. Oltre le due linee della Relaz. I. $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ se ne prenda nella relazione stessa altra simile alla $\sqrt{B}$, e della $\sqrt{A}$ minore anch'essa, la quale segnisi $\sqrt{B'}$. Tra $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ piglisi la media proporzionale $\sqrt{\sqrt{A\,B}}$; poi si ordini la proporzione $\sqrt{A} : \sqrt{B'} :: \sqrt{\sqrt{A\,B}} : \frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{A}} \sqrt{\sqrt{A\,B}} = \sqrt{\sqrt{\frac{B\,B'^2}{A}}}$. Saranno $\sqrt{\sqrt{A\,B}}$, $\sqrt{\sqrt{\frac{B\,B'^2}{A}}}$ le due mediali desiderate. Ad avervi tra $\sqrt{A}$, $\sqrt{B'}$ la Relaz. I. nulla meno che tra $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, fa di mestieri che $\sqrt{A}$ stia alla radice della differenza de' quadrati, la qual è $\sqrt{(A-B')}$ come numero a numero, poniamo $:: e\ f$. Quinci $A : A - B' :: e^2\ f^2$, donde ricavasi $B' = \frac{A(e^2-f^2)}{e^2}$. Si ha dunque

Forma implicita $\sqrt{\sqrt{A\,B}}$ . . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{B\,B'^2}{A}}}$

Spiegando B' $\sqrt{\sqrt{A\,B}}$ . . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{A\,B(e^2-f^2)^2}{e^4}}}$

Forma esplicita 1.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}}$ . . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)(e^2-f^2)^2}{b^2\,e^4}}}$

2.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c^2}}}$ . . . . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2(e^2-f^2)^2}{(b^2-c^2)\,e^4}}}$

3.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}}$ . . . $\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)(e^2-f^2)^2}{b^2\,e^4}}}$.

Relaz. VI. **Due linee mediali solamente in potenza comunicanti, che contengano superficie mediale, e delle quali la più lunga superi in potenza la minore nel quadrato di una linea à sè incommensurabile in lunghezza.**

Con un calcolo simile a quello fatto nella precedente da tre linee $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$, $\sqrt{D'} = \sqrt{\frac{C(e^2-f)}{e^2}}$ nella Relaz. II. si ricava

Forma implicita $\quad \sqrt{\sqrt{CD}} \; \ldots\ldots \; \sqrt{\sqrt{\frac{D D'^2}{C}}}$

Spiegando D' $\quad \sqrt{\sqrt{CD}} \; \ldots\ldots \; \sqrt{\sqrt{\frac{CD(e^2-f)^2}{e^4}}}$

Forma esplicita 1.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}} \; \ldots \; \sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)(e^2-f)^2}{b^2 e^4}}}$

2.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2-c}}} \; \ldots\ldots \; \sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b^2 (e^2-f)^2}{(b^2-c) e^4}}}$

3.ª $\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}} \; \ldots \; \sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)(e^2-f)^2}{b^2 e^4}}}$.

Il quadrato di $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}}$ è $\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}$, quello di $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)(e^2-f)^2}{b^2 e^4}}}$ è $\frac{e^2-f}{e^2} \sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}$; dunque le due mediali giusta la prima forma sono in potenza comunicanti. La superficie loro $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}} \times \sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)(e^2-f)^2}{b^2 e^4}}}$ $= \sqrt{\sqrt{\frac{a^8(b^2-c)^2(e^2-f)^2}{b^4 e^4}}} = \sqrt{\frac{a^4(b^2-c)(e^2-f)}{b^2 e^2}}$ è mediale. La differenza dei quadrati è $= \left(1 - \frac{e^2-f}{e^2}\right) \sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}} = \frac{f}{e^2} \sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}$; la radice di questa differenza cioè $\sqrt{\frac{f}{e^2} \sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}}$ è una mediale incommensurabile in lunghezza alla mediale $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}}$. Si avverano tutte adunque nella forma prima le condizioni assegnate, e lo stesso si troverà succedere nelle altre due. Nella Relaz. superiore la differenza dei quadrati uscirà $= \frac{f^2}{e^2} \sqrt{a^4(b^2-c^2)}$, e la radice sua, cioè $\sqrt{\cdot\frac{f^2}{e^2}\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}} = \frac{f}{e}\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}}$ palesemente in lunghezza commensurabile alla mediale $\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}}$.

Relaz. VII. Due linee potenzialmente incommensurabili, che contengano superficie mediale, e delle quali i quadrati insieme giunti facciano superficie razionale.

Ecco il modo di trovarle secondo Euclide. Rappresentate per $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$ le due linee della Relaz. II. dividasi la più lunga $\sqrt{C}$ in due parti x, $\sqrt{C}-x$, tra le quali sia media proporzionale la metà della minore $\sqrt{D}$: sia cioè $x : \frac{1}{2}\sqrt{D} : \sqrt{C}-x$; sarà quinci $x\sqrt{C}-x^2=\frac{1}{4}D$, e sciogliendo questa equazione, $x=\frac{1}{2}\sqrt{C}+\sqrt{\frac{1}{4}(C-D)}$, e quinci $\sqrt{C}-x=\frac{1}{2}\sqrt{C}-\sqrt{\frac{1}{4}(C-D)}$. Si elevino queste due parti di $\sqrt{C}$ a quadrato, e si avrà $\left(\frac{1}{2}\sqrt{C}+\sqrt{\frac{1}{4}(C-D)}\right)^2=\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}D+\sqrt{\frac{1}{4}(C^2-CD)}$; $\left(\frac{1}{2}\sqrt{C}-\sqrt{\frac{1}{4}(C-D)}\right)^2=\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}D-\sqrt{\frac{1}{4}(C^2-CD)}$. Ed aggiugnendo all'uno ed all'altro di questi quadrati il quadrato di $\frac{1}{2}\sqrt{D}$, cioè $\frac{1}{4}D$ ne verranno le somme $\frac{1}{2}C+\sqrt{\frac{1}{4}(C^2-CD)}$, $\frac{1}{2}C-\sqrt{\frac{1}{4}(C^2-CD)}$, le radici delle quali saranno le due linee desiderate. Avremo dunque

Forma implicita $\sqrt{\left(\frac{1}{2}C+\sqrt{\frac{1}{4}(C^2-CD)}\right)}\cdots\sqrt{\left(\frac{1}{2}C-\sqrt{\frac{1}{4}(C^2-CD)}\right)}$

Forma esplicita 1.ª $\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2+\sqrt{\frac{a^4c}{4b^2}}\right)}\cdots\cdots\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2-\sqrt{\frac{a^4c}{4b^2}}\right)}$

2.ª $\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{2(b^2-c)}+\sqrt{\frac{a^4b^2c}{4(b^2-c)^2}}\right)}\cdots\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{2(b^2-c)}-\sqrt{\frac{a^4b^2c}{4(b^2-c)^2}}\right)}$

3.ª $\sqrt{\left(\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{a^2c}{4b^2}}\right)}\cdots\cdots\sqrt{\left(\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{a^2c}{4b^2}}\right)}$.

Che le linee sieno potenzialmente incommensurabili chi è che nol veda di leggieri? La superficie $\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2+\sqrt{\frac{a^4c}{4b^2}}\right)}$

$\times \sqrt{\left(\frac{1}{2} a^2 - \sqrt{\frac{a^4 c}{4 b^2}}\right)} = \sqrt{\frac{a^4}{4}\left(1 - \frac{c}{b^2}\right)}$, dunque mediale.

La somma dei quadrati è $= \frac{1}{2} a^2 + \sqrt{\frac{a^4 c}{4 b^2}} + \frac{1}{2} a^2 - \sqrt{\frac{a^4 c}{4 b^2}} = a^2$; offre dunque superficie razionale. Così nella prima forma, e similmente nelle altre due.

Relaz. VIII. Due linee potenzialmente incommensurabili, che contengano superficie razionale, ed i quadrati delle quali insieme uniti formino superficie mediale.

Si tirano queste dalle linee della Relaz. IV. per simil modo, che le linee dell'antecedente Relaz. VII. da quelle della Relaz. II.. Segnate pertanto $\sqrt{\sqrt{E}}$, $\sqrt{\sqrt{F}}$ le due linee della Relaz. IV. sarà la prima delle due qui desiderate $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{E} + \sqrt{\frac{1}{4}(E - \sqrt{EF})}\right)}$, e la seconda $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{E} - \sqrt{\frac{1}{4}(E - \sqrt{EF})}\right)}$. E sostituendo in luogo di E, F i lor valori CD, $\frac{D^3}{C}$, si retrospingon esse a legarsi con le linee della Relaz. II.. Dico io dunque

Forma implicita $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{E} + \sqrt{\frac{1}{4}(E - \sqrt{EF})}\right)} . \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{E} - \sqrt{\frac{1}{4}(E - \sqrt{EF})}\right)}$

retrospinta $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{CD} + \sqrt{\frac{1}{4}D(C - D)}\right)} . \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{CD} - \sqrt{\frac{1}{4}D(C - D)}\right)}$

Forma esplicita 1.ª $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4(b^2 - c)}{b^2}} + \sqrt{\frac{a^4 c(b^2 - c)}{4 b^4}}\right)} . \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4(b^2 - c)}{b^2}} - \sqrt{\frac{a^4 c(b^2 - c)}{4 b^4}}\right)}$

2.ª $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2 - c}} + \sqrt{\frac{a^4 c}{4(b^2 - c)}}\right)} \ldots\ldots \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4 b^2}{b^2 - c}} - \sqrt{\frac{a^4 c}{4(b^2 - c)}}\right)}$

3.ª $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2 - c)}{b^2}} + \sqrt{\frac{a^2 c(b^2 - c)}{4 b^4}}\right)} . \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2 - c)}{b^2}} - \sqrt{\frac{a^2 c(b^2 - c)}{4 b^4}}\right)}$.

L'adempimento delle prescritte condizioni in queste forme è sì agevole a vedere, che bisogno non vi ha di diminuzione.

Relaz. IX. Due linee potenzialmente incommensurabili, che contengano superficie mediale, ed i quadrati delle quali congiuntamente dieno superficie pur mediale incommensurabile al doppio della superficie dell'una nell'altra.

Dinotate per $\sqrt{\sqrt{G}}$, $\sqrt{\sqrt{H}}$ le due linee della Relaz. VI., seguendo il calcolo a determinare le linee delle due antecedenti Relazioni usato, avremo qui

Forma implicita $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{G}+\sqrt{\frac{1}{4}(G-\sqrt{GH})}\right)}\ldots\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{G}-\sqrt{\frac{1}{4}(G-\sqrt{GH})}\right)}$

retrospinta $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{CD}+\sqrt{\frac{CDf}{4e^2}}\right)}\ldots\ldots\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{CD}-\sqrt{\frac{CDf}{4e^2}}\right)}$

Forma esplicita 1.ª $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}+\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)f}{4b^2e^2}}\right)}\ldots\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}-\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)f}{4b^2e^2}}\right)}$

2.ª $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c}}+\sqrt{\frac{a^4b^2f}{4(b^2-c)e^2}}\right)}\ldots\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c}}-\sqrt{\frac{a^4b^2f}{4(b^2-c)e^2}}\right)}$

3.ª $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}+\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)f}{4b^2e^2}}\right)}\ldots\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}-\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)f}{4b^2e^2}}\right)}$.

La somma dei quadrati in questa terza forma è $=\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}$; la superficie prodotta per la moltiplica di una linea nell' altra è $=\sqrt{\left(\frac{a^2(b^2-c)}{4b^2}-\frac{a^2(b^2-c)f}{4b^2e^2}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}\times\sqrt{\left(1-\frac{f}{e^2}\right)}$; onde il doppio di tal superficie è $=\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}\times\sqrt{\left(1-\frac{f}{e^2}\right)}$: per la qual cosa è già manifesto, che l'aggregato de' quadrati è incommensurabile al doppio della superficie di una linea nell'altra giusta ciò, che ad ultima condizione si esigeva: e basta aver dimostrato l'avveramento di questa condizione, ed averlo dimostrato nella terza forma lasciando al Leggitore l'esercizio delle altre dimostrazioni.

Si può alle forme della Relaz. V. dare qualche semplificazione sostituendo ad $\frac{e^2-f^2}{e^2}$, o sia $1-\frac{f^2}{e^2}$ la espressione $1-g^2$. E molto più semplici render si possono le forme delle Relazioni IV., VI., VII., VIII., IX., che inchiudono le forme delle linee della Relaz. II. con tramutare le forme immediatamente dal metodo euclideo uscenti di queste linee, che usate si sono, nelle più semplici, e con surrogare inoltre ad $\frac{e^2-f}{e^2}$, o sia $1-\frac{f}{e^2}$ la espressione $1-g$.

Binomio 1.°, e suo reciso. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. I.. Caso 1.°. Modo 1.°.

$$a \pm \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}, \text{ più semplicemente } a \pm \sqrt{(a^2-d^2)}.$$

Esempio di Frate Luca. $4 \pm \sqrt{7}$. Confrontandolo con la general espressione semplificata $a \pm \sqrt{(a^2-d^2)}$, le due equazioni $4=a$, $7=a^2-d^2=16-d^2$ porgono tosto $d^2=16-7=9$, $d=3$. Si paragoni alla generale espressione immediata $a \pm \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}$, e le due equazioni saranno $4=a$, $7=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}=a^2-\frac{a^2c^2}{b^2}=16-\frac{16c^2}{b^2}$, quinci $\frac{16c^2}{b^2}=9$, $\frac{c^2}{b^2}=\frac{9}{16}$, $\frac{c}{b}=\frac{3}{4}$. Questa equazione assegna il rapporto tra b, c, ma non determina i valori loro: possono essere qualunque numeri, purchè fra lor nel rapporto di 4 a 3. Laonde per infinite maniere l'esempio di Frate Luca si può concepire racchiuso nella generale immediata espressione $a \pm \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}$, od in infiniti modi questa può darlo. Il Leggitore estenderà da sè questo riflesso, considerando in universale, che in qualunque forma generale, ed in qualunque particolare esempio non sono, che due i termini, due sole per conseguenza le equazioni dal confronto somministrate, e che perciò tante lettere delle generali espressioni restar debbono indeterminate, ed arbitrarie, quante sono di là di due.

Binomio 2.°, e suo reciso. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. I.. Caso 1.°. Modo 2.°.

$$\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2-c^2}} \pm a.$$

Esempio di Frate Luca. $\sqrt{112} \pm 7 = \sqrt{\frac{7^2 \times 16}{16-9}} \pm 7$.

Binomio 3.°, e suo reciso. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. I.. Caso 2.°.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a(b^2 - c^2)}{b^2}}.$$

Esempio di Frate Luca. $\sqrt{112} \pm \sqrt{84} = \sqrt{112} \pm \sqrt{\frac{112(4-1)}{4}}$.

Io mi sono contenuto a richiamare gli esempj alle generali espressioni per i minimi numeri del rapporto tra b, c segnato dalle due equazioni di confronto. E similmente nelle tre specie di binomj, e recisi, che seguono, mi ristrignerò a richiamare gli esempj alle immediate espressioni generali per i minimi termini del rapporto, che le due equazioni di confronto definiranno tra b^2, c.

Binomio 4.°, e suo reciso. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. II.. Caso 1.°. Modo 1.°.

$$a \pm \sqrt{\frac{a^2(b^2 - c)}{b^2}}, \text{ più semplicemente } a \pm \sqrt{(a^2 - d)}.$$

Esempio di Frate Luca. $4 \pm \sqrt{10} = 4 \pm \sqrt{\frac{16(1 - \frac{3}{8})}{1}} = 4 \pm \sqrt{(16 - 6)}$.

Binomio 5.°, e suo reciso. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. II.. Caso 1.°. Modo 2.°.

$$\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm a, \text{ più semplicemente } \sqrt{(a^2 + d)} \pm a.$$

Esempio di Fr. Luca. $\sqrt{20} \pm 3 = \sqrt{\frac{9 \times 1}{1 - \frac{11}{20}}} \pm 3 = \sqrt{(9 + 11)} \pm 3$.

Binomio 6.°, e suo reciso. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. II.. Caso 2.°.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a(b^2 - c)}{b^2}}, \text{ più semplicemente } \sqrt{a} \pm \sqrt{(a - d)}.$$

Esempio di Frate Luca. $\sqrt{20} \pm \sqrt{8} = \sqrt{20} \pm \sqrt{\frac{20(1 - \frac{3}{5})}{1}} = \sqrt{20} \pm \sqrt{(20 - 12)}$.

Bimediale 1.°, e suo reciso. Distinguone io due modi.

Modo 1.° Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. III.

Forme tre.

$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}}+\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)^3}{b^6}}};\ \sqrt{\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}};$$
$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)^3}{b^6}}}.$$

La prima di queste può essere semplificata in $\sqrt{\sqrt{a^2(a^2-d^2)}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{(a^2-d^2)^3}{a^2}}}$, giusta la semplificazione data alle due linee della Relaz. I.. Caso 1.°. Modo 1.°.

Modo 2.° Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. IV.

Forme tre.

$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)^3}{b^6}}};\ \sqrt{\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}};$$
$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)^3}{b^6}}};$$

più semplicemente

$$\sqrt{\sqrt{a^2(a^2-d)}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{(a^2-d)^3}{a^2}}};\ \sqrt{\sqrt{a^2(a^2+d)}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^6}{a^2+d}}};$$
$$\sqrt{\sqrt{a(a-d)}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{(a-d)^3}{a}}}.$$

Esempio di Frate Luca. $\sqrt{\sqrt{432}}\pm\sqrt{\sqrt{48}}$. Appartiene al Modo 2.°, e se confrontisi con la prima delle forme immediate trovasi $c=\frac{2}{3}b^2$, onde preso, per attenerci ai minimi numeri, $b=1$ si ricava $a=6$, e quinci $\sqrt{\sqrt{432}}\pm\sqrt{\sqrt{48}}=\sqrt{\sqrt{\frac{6^4(1-\frac{2}{3})}{1}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{6^4(1-\frac{2}{3})^3}{1^6}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{6^4}{3}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{6^4}{27}}}$. Confrontandolo con la prima delle semplici si ha determinatamente $a=6$, $a^2-d=12$, e perciò risolvesi in $\sqrt{\sqrt{6^2\times 12}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{12^3}{6^2}}}$.

Euclide definisce il bimediale 1.° il congiungimento di due linee mediali solamente in potenza commensurabili, e che contengano superficie razionale. Nulla prescrive egli rispetto alla differenza delle potenze, o de' quadrati di esse mediali, ma lascia cosa indeterminata, e libera che la potenza della più lunga superi la potenza della minore nel quadrato di una linea ad essa più lunga commensurabile, ovvero incommensurabile. Quinci io ho distinto del bimediale 1.°, e del suo reciso insieme due modi; e similmente li distinguo rapporto al bimediale 2.°, e suo reciso.

Bimediale 2.°, e suo reciso.

Modo 1.° Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz V., da Euclide ommessa, da me aggiunta.

Forme tre.

$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)}{b^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c^2)(1-g^2)^2}{b^2}}};\ \sqrt{\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4b^2(1-g^2)^2}{b^2-c^2}}};$$
$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)(1-g^2)^2}{b^2}}}.$$

Modo 2.° Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. VI.

Forme tre.

$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)(1-g)^2}{b^2}}};\ \sqrt{\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4b^2(1-g)^2}{b^2-c}}};$$
$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)(1-g)^2}{b^2}}}$$

più semplicemente

$$\sqrt{\sqrt{a^2(a^2-d)}}\pm\sqrt{\sqrt{a^2(a^2-d)(1-g)^2}};\ \sqrt{\sqrt{a^2(a^2+d)}}\pm\sqrt{\sqrt{a^2(a^2+d)(1-g)^2}};$$
$$\sqrt{\sqrt{a(a-d)}}\pm\sqrt{\sqrt{a(a-d)(1-g)^2}}.$$

Esempio di Frate Luca. $\sqrt{\sqrt{200}}\pm\sqrt{\sqrt{18}}$: è di questo 2.° modo. Il confronto con la prima delle forme più semplici, dando le equazioni $a^2(a^2-d)=200$, $a^2(a^2-d)\times(1-g)^2=18$, conduce ad $\frac{a^2(a^2-d)(1-g)^2}{a^2(a^2-d)}=(1-g)^2=\frac{18}{200}=\frac{9}{100}$, onde, retrocedendo, $a^2(a^2-d)\frac{9}{100}=18$, $a^2(a^2-d)$

$= 200$, $d = a^2 - \frac{200}{a^2}$, il che lascia il numero a indeterminato, così però, che assumendolo tale, che sia $a^2 < \frac{200}{a^2}$, ovvero $a^4 < 200$, fatto d negativo, ed in conseguenza $-d$ positivo, l'esempio passi dalla prima alla seconda forma. Il partito più semplice si è di assumer $a = 10$, dal quale assunto ne viene $a^2 - d = 2$, ed il bimediale di Frate Luca $\sqrt{\sqrt{200}} \pm \sqrt{\sqrt{18}}$ risolvesi in $\sqrt{\sqrt{(10^2 \times 2)}} \pm \sqrt{\sqrt{(10^2 \times 2 \times \frac{9}{100})}}$. Confrontando con la prima delle forme men semplici rimarrebervi indeterminati due numeri, e tre confrontando con la forma immediatamente uscente dal metodo euclideo di cinque lettere vestita.

Irrazionale maggiore, e suo reciso detto irrazionale minore. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. VII.

Forme tre

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{\tfrac{a^4 c}{4 b^2}}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a^2 - \sqrt{\tfrac{a^4 c}{4 b^2}}\right)};\ \sqrt{\left(\tfrac{a^2 b^2}{2(b^2 - c)} + \sqrt{\tfrac{a^4 b^2 c}{4(b^2 - c)^2}}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{a^2 b^2}{4(b^2 - c)} - \sqrt{\tfrac{a^4 b^2 c}{4(b^2 - c)^2}}\right)};\ \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{a^2 c}{4 b^2}}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{a^2 c}{4 b^2}}\right)}$$

più semplicemente

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 d}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a^2 - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 d}\right)};\ \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}(a^2 + d) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2 + d)d}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}(a^2 + d) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2 + d)d}\right)};\ \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}ad}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}ad}\right)}.$$

Esempio di Frate Luca. $\sqrt{\left(6 + \sqrt{22\tfrac{1}{2}}\right)} \pm \sqrt{\left(6 - \sqrt{22\tfrac{1}{2}}\right)}$.

Sta sotto la terza forma, e confrontato con la terza delle più semplici si risolve in $\sqrt{\left(\frac{12}{2} + \sqrt{\frac{12}{4} \times 7\frac{1}{2}}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2} - \sqrt{\frac{12}{4} \times 7\frac{1}{2}}\right)}$. Il confronto con la terza delle meno semplici non assegna che il rapporto $\frac{c}{b^2} = \frac{15}{2}$, lasciando indefiniti i numeri b, c.

Potente in razionale, e mediale, e suo reciso. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. VIII.

Forme tre

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}+\sqrt{\frac{a^4c(b^2-c)}{4b^4}}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}-\sqrt{\frac{a^4c(b^2-c)}{4b^4}}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c}}+\sqrt{\frac{a^4c}{4(b^2-c)}}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c}}-\sqrt{\frac{a^4c}{4(b^2-c)}}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}+\sqrt{\frac{a^2c(b^2-c)}{4b^4}}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}-\sqrt{\frac{a^2c(b^2-c)}{4(b^2-c)}}\right)}$$

più semplicemente

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2-d)}+\sqrt{\frac{1}{4}(a^2-d)d}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2-d)}-\sqrt{\frac{1}{4}(a^2-d)d}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2+d)}+\sqrt{\frac{1}{4}a^2d}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2+d)}-\sqrt{\frac{1}{4}a^2d}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a(a-d)}+\sqrt{\frac{1}{4}(a^2-d)d}\right)}\pm\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{a(a-d)}-\sqrt{\frac{1}{4}(a-d)d}}\Big).$$

Esempio di Fr. Luca. $\sqrt{\left(\sqrt{45}+\sqrt{24\frac{3}{4}}\right)}\pm\sqrt{\left(\sqrt{45}-\sqrt{24\frac{3}{4}}\right)}$.

È della seconda forma, e le due equazioni del paragone alla seconda delle più semplici sono: $\frac{1}{4}a^2(a^2+d)=45$, $\frac{1}{4}a^2d=24\frac{3}{4}$. Questa dà tosto $d=\frac{99}{a^2}$, il qual valore sostituito nella prima, ne nasce $a^4+99=45\times4$, donde $a^4=81$, $a=3$, conseguentemente $\sqrt{\left(\sqrt{45}+\sqrt{24\frac{3}{4}}\right)}\pm\sqrt{\left(\sqrt{45}-\sqrt{24\frac{3}{4}}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{9(9+11)}+\sqrt{\frac{1}{4}\times9\times11}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{9(9+11)}-\sqrt{\frac{1}{4}\times9\times11}\right)}$. Paragonando con la seconda delle meno semplici non si trova che il rapporto $\frac{c}{b^2}=\frac{11}{20}$.

Potente in due mediali, e suo reciso. Addizione, e sottrazione delle due linee della Relaz. IX.

Forme tre

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}+\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)g}{4b^2}}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)}{b^2}}-\sqrt{\frac{a^4(b^2-c)g}{4b^2}}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c}}+\sqrt{\frac{a^4b^2g}{4(b^2-c)}}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^2}{b^2-c}}-\sqrt{\frac{a^4b^2g}{4(b^2-c)}}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}+\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)g}{4b^2}}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}-\sqrt{\frac{a^2(b^2-c)g}{4b^2}}\right)}$$

più semplicemente

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2-d)}+\sqrt{\frac{1}{4}a^2(a^2-d)g}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2-d)}-\sqrt{\frac{1}{4}a^2(a^2-d)g}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2+d)}+\sqrt{\frac{1}{4}a^2(a^2+d)g}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2+d)}-\sqrt{\frac{1}{4}a^2(a^2+d)g}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a(a-d)}+\sqrt{\frac{1}{4}a(a-d)g}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a(a-d)}-\sqrt{\frac{1}{4}a(a-d)g}\right)}.$$

Esempio di Frate Luca. $\sqrt{(\sqrt{80}+\sqrt{48})}\pm\sqrt{(\sqrt{80}-\sqrt{48})}$. Si può riferirlo a qualunque delle tre forme. Riferendolo alla prima delle più semplici, le due equazioni $\frac{1}{4}a^2(a^2-d)=80$, $\frac{1}{4}a^2(a^2-d)g=48$, divisa la seconda per la prima, danno $g=\frac{3}{5}$, e la prima da sè sola con le opportune trasposizioni assegna $d=a^2-\frac{320}{a^2}$, dove a resta indefinito, ed arbitrario. Se però il numero a si assuma tale che sia $a^2>\frac{320}{a^2}$, ovvero $a^4>320$, d è positivo, e la prima forma è quella sotto cui l'esempio cade; ma se per lo contrario a si prenda di tal piccolezza che a^2 riesca $<\frac{320}{a^2}$, ovvero $a^4<320$, d diviene negativo, $-d$ positivo, e la forma seconda sottentra a far suo, o comprendere in sè l'esempio. Se questo alla terza delle più semplici forme riferiscasi, dalle equazioni del paragone si trova, come innanzi, $g=\frac{3}{5}$, ma $d=a-\frac{320}{a}$, a rimane indeterminato, non pienamente però arbitrario, bensì con condizione, che non sia $a<\frac{320}{a}$, ovvero a^2 non < 320. Nella equazione $d = a^2 - \frac{320}{a^2}$ assumasi dapprima $a = 8$, e ne verrà $d = 64 - 5 = 59$, positivo; assumasi in secondo luogo $a = 3$, e ne seguirà $d = 9 - 35\frac{5}{9} = -26\frac{5}{9}$; nell'equazione poi $d = a - \frac{320}{a}$ assumasi $a = 40$, e ne risulterà $d = 32$. Per questi assunti di a l'esempio vestirà le tre forme nei seguenti modi:

$$\sqrt{(\sqrt{80}+\sqrt{48})} \pm \sqrt{(\sqrt{80}-\sqrt{48})} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{64(64-59)} + \sqrt{\tfrac{64(64-59)\frac{3}{5}}{4}}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{64(64-59)} - \sqrt{\tfrac{64(64-59)\frac{3}{5}}{4}}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{64\times 5}{4}} + \sqrt{\tfrac{64\times 5\times\frac{3}{5}}{4}}\right)} \pm \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{64\times 5}{4}} - \sqrt{\tfrac{64\times 5\times\frac{3}{5}}{4}}\right)}.$$

$$\sqrt{(\sqrt{80}+\sqrt{48})} \pm \sqrt{(\sqrt{80}-\sqrt{48})} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{9(9+26\tfrac{5}{9})} + \sqrt{\tfrac{9(9+26\frac{5}{9})\frac{3}{5}}{4}}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{9(9+26\tfrac{5}{9})} - \sqrt{\tfrac{9(9+26\frac{5}{9})\frac{3}{5}}{4}}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{9\times 35\frac{5}{9}}{4}} + \sqrt{\tfrac{9\times 35\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}}{4}}\right)} \pm \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{9\times 35\frac{5}{9}}{4}} - \sqrt{\tfrac{9\times 35\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}}{4}}\right)}.$$

$$\sqrt{(\sqrt{80}+\sqrt{48})} \pm \sqrt{(\sqrt{80}-\sqrt{48})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{40(40-32)} + \sqrt{\tfrac{40(40-32)\frac{3}{5}}{4}}\,)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{40(40-32)} - \sqrt{\tfrac{40(40-32)\frac{3}{5}}{4}}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{40\times 8}{4}} + \sqrt{\tfrac{40\times 8\times\frac{3}{5}}{4}}\right.} \pm \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{40\times 8}{4}} - \sqrt{\tfrac{40\times 8\times\frac{3}{5}}{4}}\right)}.$$

Per moltissimi, ed innumerevoli altri modi può l'esempio stesso vestire le tre forme stesse più semplici. Che se paragonisi alle men semplici, si troverà parimenti $g = \frac{3}{5}$, e $\frac{c}{b^2} = a^2 - \frac{320}{a^2}$, ovvero $\frac{c}{b^2} = a - \frac{320}{a}$, ed assunto a piacere il numero a, ci si assegnerà per esso bensì il rapporto tra i numeri b^2, c, ma non verrà alcuno di loro in singolare determinato; onde apparisce doppiamente infinite farsi le maniere, nelle quali l'esempio può alle tre forme meno semplici comporsi.

Podestà, e radici delle linee composte, e superficie di una in altra.

Teorema I. Qualunque de' sei binomj quadrato produce binomio 1.°, e qualunque de' sei recisi quadrato produce reciso 1.°.

Si sa in generale, che nel quadrato $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ la somma dei quadrati $a^2 + b^2$ è maggiore del doppio rettangolo $2ab$, poichè anche nel caso del segno $-$, e di $b > a$, ad onta cioè di esser $a - b$ negativo, il suo quadrato $a^2 - 2ab + b^2$ è positivo, conseguentemente $a^2 + b^2 > 2ab$. Così essendo, rappresenti $\sqrt{K} \pm \sqrt{L}$ un qualunque binomio, o reciso, intendendo K, ovvero L numero quadrato rispetto a que' binomj, e recisi, ne' quali la maggior parte, ovver la minore è razionale in lunghezza, vale dir numerica: sarà nella elevazione $(\sqrt{K} \pm \sqrt{L})^2 = K \pm 2\sqrt{KL} + L$ la somma razionale $K + L >$ del termine radicale $2\sqrt{KL}$. Dunque $K + L \pm 2\sqrt{KL}$ è un binomio, o reciso 1.°: con che resta dimostrato il teorema, e splende il vantaggio dell'algebra, la quale con tanta facilità, speditezza, ed evidenza dimostra ad un tempo due teoremi scabrosi presso Euclide.

Corollario. La radice di un binomio 1.° può essere qualunque de' sei binomj, e la radice di un reciso 1.° può essere qualunque de' sei recisi.

Problema. Estrarre da qualunque binomio, o reciso $\sqrt{K} \pm \sqrt{L}$ la radice.

Ne ho data la formola generale esprimente il metodo degli antichi alla pag. 251 del I volume. Mi è d'uopo ripeterla qui, dove occorre di partitamente applicarla. Segnato pertanto M il termine maggiore $\sqrt{K}$ del binomio, o reciso, ed m il termine minore $\sqrt{L}$, sarà

$$\sqrt{(M\pm m)}=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2-m^2)}\right)}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}M-\tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2-m^2)}\right)}$$

Tartaglia riprende Frate Luca di proporre, come io pure ho qui fatto, di estrarre da' binomj, e recisi la radice, non essendo i binomj, ed i recisi, che linee, non superficie; e rileva, che Euclide considera innanzi i binomj, ed i recisi moltiplicati con una linea razionale, indi cerca una linea potente tal rettangolo, vale dire il cui quadrato tal rettangolo uguagli. Prosegue però Tartaglia riflettendo, che la razionale moltiplicatrice può essere la linea presa ad unità, e concede l'uso della espressione di Frate Luca, qualora in mente si rettifichi, sottintendendo al binomio, o reciso moltiplicata l'unità. In algebraiche specie inoltre i binomj, ed i recisi considerar si possono rappresentanti ogni genere, ed ogni modo di quantità o numerica o geometrica, o prima, o prodotta, e linea, e superficie, e solido ancora.

Teorema II. La radice del binomio, o reciso 2.° è un bimedial 1.°, o suo reciso. La formola del binomio, o reciso 2.° si è $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}\pm a$. Sostituendo pertanto nella general formola della radice $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}$ per M, a per m, ne viene

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}\pm a\right)}=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 c^2}{b^2-c^2}}\right)}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}-\right.}$$

$$\left.\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 c^2}{b^2-c^2}}\right)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\,a(b+c)\sqrt{\frac{1}{b^2-c^2}}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\,a(b-c)\sqrt{\frac{1}{b^2-c^2}}}=$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b+c)^2}{4(b^2-c^2)}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b-c)^2}{4(b^2-c^2)}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b+c)}{4(b-c)}}}\pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b-c)}{4(b+c)}}}.$$

Egli è questo un composto di due mediali solamente in potenza commensurabili, che contengono superficie razionale, poichè il prodotto dell'una nell'altra è $=\sqrt{\sqrt{\frac{a^4}{16}}}=\frac{a}{2}$, e delle quali il quadrato della più lunga $=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{b+c}{b-c}}$ supera il quadrato della minore

$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(b-c)^2(b+c)}{(b+c)^2(b-c)}} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}\sqrt{\frac{b+c}{b-c}}$ nello spazio $\frac{ac}{b+c}\sqrt{\frac{b+c}{b-c}} = \frac{2c}{b+c}\sqrt{\frac{a^2(b+c)}{4(b-c)}}$, la cui radice quadrata $\sqrt{\cdot\frac{2c}{b+c}\sqrt{\frac{a^2(b+c)}{4(b-c)}}}$ è una mediale in lunghezza incommensurabile con la mediale maggiore $\sqrt{\sqrt{\frac{a^2(b+c)}{4(b-c)}}}$. Dunque la radice del binomio o reciso 2.° è un bimedial 1.°, o suo reciso, e lo è del secondo dei due da me distinti Modi; e quanto alla forma è, se ben si penetri, della seconda, l'essenza e lo spirito della quale consiste in contenere nella parte maggiore un quadrato per certa quantità moltiplicato, nella minore lo stesso quadrato per la stessa quantità diviso.

Corollario. Il quadrato del bimedial 1.°, o del suo reciso, è binomio 2.°, o suo reciso.

Teorema III. La radice del binomio, o reciso 3.°, è un bimedial 2.°, o suo reciso.

Essendo il binomio, o reciso 3.° $\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a(b^2-c^2)}{b^2}}$, sarà $\sqrt{\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a(b^2-c^2)}{b^2}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{c}{2b}\sqrt{a}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a} - \frac{c}{2b}\sqrt{a}\right)} = \sqrt{\sqrt{\frac{a}{4}\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}} \pm \sqrt{\sqrt{\frac{a}{4}\left(1-\frac{c}{b}\right)^2}}$, composto mediale, che ha le proprietà del bimediale 2.° giusta il Modo 2.°, e con un po' d'industria tirasi, se piace, ad esibirsi sotto la forma prima, oppure seconda di esso Modo, travvisandolo come segue: $\sqrt{\sqrt{a\left(\frac{b+c}{2b}\right)^2}} \pm \sqrt{\sqrt{a\left(\frac{b+c}{2b}\right)^2\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2}}$, e concependo il quadrato a^2 di quella forma generale nel quadrato $\left(\frac{b+c}{2b}\right)^2$ di questa, il quadrato $(1-g)^2$ nel $\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2$, ed il numero a^2-d, ovvero a^2+d, nel numero a.

Corollario. Il quadrato del bimedial 2.°, e suo reciso è binomio 3.°, e suo reciso.

Teorema IV. La radice del binomio, o reciso 4.°, è linea irrazionale maggiore, o minore.

Essendo il binomio e reciso 4.° $a \pm \sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}$, ne segue

$\sqrt{\left(a \pm \sqrt{\frac{a^2(b^2-c)}{b^2}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2c}{b^2}}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2c}{b^2}}\right)}$, che è la pretta pretta terza forma della irrazionale maggiore, e minore.

Corollario. Il quadrato della irrazionale maggiore, o minore è binomio, o reciso 4.°.

Teorema V. La radice del binomio, o reciso 5.°, è linea potente in razionale, e mediale, o suo reciso.

Il binomio, e reciso 5.° è $\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2-c}} \pm a$; e perciò

$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2-c}} \pm a\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2-c}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2c}{b^2-c}}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2-c}} - \sqrt{\frac{a^2c}{b^2-c}}\right)}$, che essenzialmente conviene con la seconda delle tre forme della potente in razionale, e mediale, e ad una perfetta uniformità non richiede che d'intendere quella divisa per $\sqrt{\sqrt{a^2}}$, il che nulla turba, od altera il fondo, e la natura della forma.

Corollario. Il quadrato della potente in razionale, e mediale, o del suo reciso, è binomio 5.°, o suo reciso.

Teorema VI. La radice del binomio, o reciso 6.°, è linea potente in due mediali, o suo reciso.

Il binomio, e reciso 6.° è $\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a(b^2-c)}{b^2}}$; dunque

$\sqrt{\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a(b^2-c)}{b^2}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac}{b^2}}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac}{b^2}}\right)}$, forma, che compresa riscontrasi nella terza delle forme generali più semplici della linea potente in due mediali, se pongasi $a - d = 1$, $g = \frac{c}{b^2}$.

Corollario. Il quadrato della potente in due mediali, o del suo reciso è binomio, o reciso 6.°

Teorema VII. Se AB sia uno spazio razionale, e $\sqrt{CD}$ uno spazio mediale, sarà $\sqrt{(AB+\sqrt{CD})}$ o uno de' binomj, o un bimedial primo, od una irrazionale maggiore, od una potente in razionale, e mediale.

Poichè $AB+\sqrt{CD}$ può essere binomio 1.°, o 2.°, o 4.°, o 5.°.

Teorema VIII. Se $\sqrt{AB}$, $\sqrt{CD}$ sieno due spazj mediali, sarà $\sqrt{(\sqrt{AB}+\sqrt{CD})}$ o un bimediale secondo, od una potente in due mediali.

Potendo essere $\sqrt{AB}+\sqrt{CD}$ un binomio 3.°, o 6.°.

Teorema IX. $\sqrt{(AB-\sqrt{CD})}$ può essere, od uno dei sei recisi, o linea irrazionale minore; potendo $AB-\sqrt{CD}$ essere o reciso 1.°, o reciso 4.°.

Teorema X. $\sqrt{(\sqrt{CD}-AB)}$ può essere o reciso bimedial primo, o reciso potente in razionale, e mediale; perchè $\sqrt{CD}-AB$ può essere reciso 2.°, o 5.°.

Teorema XI. $\sqrt{(\sqrt{AB}-\sqrt{CD})}$ può essere reciso bimedial secondo, o reciso potente in due mediali; atteso che $\sqrt{AB}-\sqrt{CD}$ può essere o reciso 3.°, o reciso 6.°.

Teorema XII. $\frac{A^2}{B+\sqrt{C}}=\frac{A^2}{B^2-C}(B-\sqrt{C})$. Imperciochè $\frac{A^2}{B+\sqrt{C}}=\frac{A^2(B-\sqrt{C})}{(B+\sqrt{C})(B-\sqrt{C})}$.

Teorema XIII. $\frac{A^2}{B-\sqrt{C}}=\frac{A^2}{B^2-C}(B+\sqrt{C})$; essendo $\frac{A^2}{B-\sqrt{C}}=\frac{A^2(B+\sqrt{C})}{(B-\sqrt{C})(B+\sqrt{C})}$.

Teorema XIV. $\sqrt{(B+\sqrt{C})(AB-A\sqrt{C})}=\sqrt{A(B^2-C)}$.

Teorema XV. Il lato, ed il diametro del quadrato sono tra loro in lunghezza incommensurabili. Poichè $d^2=2l^2$; dunque $l:d::l:\sqrt{2l^2}::l:l\sqrt{2}::1:\sqrt{2}$. Euclide lo dimostra per due vie, ma indirette ambedue.

Gli analisti antichi, trasportando il libro X. di Euclide dalle figure geometriche ai numeri, non fecero in realtà che lavorare degli esempj de' suoi teoremi, e problemi, e dimostrare la verità di quelli, offrir lo scioglimento di questi in particolare. Ben altro si è l'effetto del trasporto per me intrapreso, e adempiuto di esso libro a specie letterali. L'astratta natura, l'indefinita rappresentanza loro esibisce nella massima ampiezza, ed illimitata i teoremi, e problemi; il facile calcolo di esse ha rendute piane, spedite, e tutte dirette le dimostrazioni, e le risoluzioni; il perspicuo loro compendio mette sotto l'occhio le forme delle linee più composte, e ne distingue la varietà; e la conservazion inconfusa dei primi elementi nella composizione stessa fa ad un colpo vedere le origini più rimote. Un cumulo di tanti vantaggj, onde il trasporto alle specie letterali adorna il libro X. di Euclide, non può non riuscir grato agli amatori delle cose euclidee.

TEMPO II.

Invenzioni di Tartaglia, e di Cardano.

Le dottrine sotto il tempo primo esposte dissipata già avranno dall'animo del Leggitore quella maraviglia sospettosa conceputa all'udirmi asserire aver gli antichi italiani analisti avuta una teoría delle quantità irrazionali niente men ricca, più ricca anzi di quella, che nelle odierne istituzioni d'analisi s'insegna. Maggiormente arricchita e quanto alla operativa, e quanto alla specolativa parte ritrovasi nelle opere di Tartaglia, e di Cardano. Il primo l'arricchì di un problema, che io non posso non maravigliarmi, e non dolermi, che ommesso venga nei moderni libri di analitico ammaestramento.

§. I.

Del Problema di Tartaglia.

Problema. Dato un binomio, o reciso di qualsiasi grado, e questo o lo stesso, o diverso nei due nomi, ritrovare una quantità, con cui moltiplicandolo producasi quantità razionale.

Risoluzione. Parte I., supposto, che i nomi sieno della medesima specie, o del medesimo grado.

Si è già veduto essere stato sin da Euclide insegnato rispetto al binomio, e reciso quadrato, che $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \mp \sqrt{b}) = a - b$. La invenzion dunque di Tartaglia propriamente non incomincia, che dal binomio, o reciso cubico.

Proposto sia il binomio cubico $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$. Si prendano nella continua proporzione $a : b$ i tre termini $a^2 : a b : b^2$, e si uniscano con alternanti segni le radici loro cubiche, e sarà $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a b} + \sqrt[3]{b^2}$ la quantità desiderata. Poichè $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a b} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$.

Viceversa $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a b} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$.

Propongasi il binomio quadrato-quadratico $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$. Si prendano nella continua proporzione $a : b$ le quattro quantità $a^3 : a^2 b : a b^2 : b^3$, e si leghino con alternanti segni le radici loro quadrato-quadrate, e sarà $\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2 b} + \sqrt[4]{a b^2} - \sqrt[4]{b^3}$ la quantità idonea all'intento; essendo $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2 b} + \sqrt[4]{a b^2} - \sqrt[4]{b^3}) = a - b$.

Viceversa $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3})=a-b$.

Si presenti un binomio, giusta il parlar de' nostri antichi, *Relato* 1.°, di quinto, direm noi, grado $\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}$. Prese le cinque continue proporzionali $a^4 : a^3b : a^2b^2 : ab^3 : b^4$, e con alternanti segni legate le quinte loro radici, sarà

$(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b})(\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}-\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4})=a+b$.

Viceversa $(\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b})(\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4})=a-b$.

Trattisi del binomio quadrato-cubico, o cubico-quadrato, di grado 6.° in somma, $\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. Con pigliare le sei continue proporzionali $a^5 : a^4b : a^3b^2 : a^2b^3 : ab^4 : b^5$, e legarne con alternanti segni le radici di ordine 6.° si avrà

$(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}-\sqrt[6]{b^5})=a-b$.

Viceversa $(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}+\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}+\sqrt[6]{b^5})=a-b$.

Generalmente sia il binomio esibito $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$, sarà $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}-\sqrt[n]{a^{n-4}b^3}\ldots\pm\sqrt[n]{b^{n-1}})=a\pm b$: avrà luogo il segno $+$ se n sia dispari, il $-$ se n sia pari.

Viceversa $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\sqrt[n]{a^{n-4}b^3}\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$.

Parte II. Allorchè i nomi del binomio, o reciso sono di specie differente, vale dire radicali di grado diverso.

Rappresenterò in generale un binomio, e reciso sì fatto per $\sqrt[r]{p}\pm\sqrt[s]{q}$. Non si ha a far altro, che ridurre i due radicali alla medesima denominazione, o sia al grado stesso, il quale riducimento darà $\sqrt[rt]{p^t} \pm \sqrt[rt]{q^r}$; dopo di che si opererà, come sopra, contando rt come n, p^t come a, q^r come b.

Corollario. Data dunque una frazione, la quale abbia a denominatore un binomio, o reciso di qualsiasi grado, o lo stesso, o diverso ne' due nomi, si potrà rendere tal denominatore razionale.

§. II.

Specolazioni di Cardano.

Specolazione I. Le potenze dispari dei sei binomj, e recisi, sono binomj, e recisi della medesima specie rispettivamente.

Si rappresentino in genere i sei binomj, e recisi tutti per la formola $\sqrt{M} \pm \sqrt{N}$, che prenderà la natura dei binomj, e recisi di 1.ª e 4.ª specie pigliandosi M numero quadrato, e di quelli di specie 2.ª e 5.ª pigliandosi numero quadrato N. Sarà il cubo $(\sqrt{M} \pm \sqrt{N})^3 = (M + 3N)\sqrt{M} \pm (N + 3M)\sqrt{N}$; e sarà $((M + 3N)\sqrt{M})^2 - ((N + 3M)\sqrt{N})^2 = M^3 + 6M^2N + 9MN^2 - (N^3 + 6MN^2 + 9M^2N) = M^3 - 3M^2N + 3MN^2 - N^3 = (M - N)^3$. In 1.° luogo adunque le parti del cubo sono analoghe alle parti del binomio, o reciso innalzato, cioè la parte prima del cubo sarà razionale, o irrazionale, giusta, che la parte prima $\sqrt{M}$ del binomio o reciso innalzato sarà razionale, o irrazionale; ed altrettanto dicasi della seconda parte del cubo rispetto alla seconda parte di esso binomio o reciso innalzato. In 2.° luogo essendo $(M - N)^3$ positivo, per supporsi $M > N$, il quadrato della prima parte del cubo eccede il quadrato della parte seconda di esso, siccome supponesi la parte prima del binomio o reciso innalzato maggiore della parte sua seconda. Per 3.° la differenza dei quadrati immediati delle parti del binomio, o reciso $\sqrt{M} \pm \sqrt{N}$ è $= M - N$, e la differenza dei quadrati delle parti del cubo si è trovato essere $= (M - N)^3$; dunque denominando la prima differenza d, la seconda D, sta $d : D :: M - N : (M - N)^3 :: 1 : (M - N)^2$, e $\sqrt{d} : \sqrt{D} :: 1 : M - N$: son dunque le radici delle due differenze commensurabili in lunghezza fra loro, e quinci se la prima di loro sia commensurabile con $\sqrt{M}$, lo sarà pur la seconda, e non lo sarà questa, se quella non lo sia. Ritenendo pertanto il cubo i caratteri tutti distintivi del binomio, o reciso innalzato, non si può più dubitare, che non resti della medesima specie. È facile trasferire la dimostrazione alla podestà 5.ª, alla 7.ª, e così via via; ma il buon analista l'amerà in general compendioso sembiante, ed eccomi a soddisfarlo. Sia $2t + 1$ il grado indeterminato di potenza dispari, e sarà

$$(\sqrt{M} \pm \sqrt{N})^{2t+1} = \Big(M^t + \frac{(2t+1)2t}{1.2} M^{t-1} N + \frac{(2t+1)(2t)(2t-1)(2t-2)}{1.2.3.4} M^{t-2} N^2 + \frac{(2t+1)(2t)(2t-1)(2t-2)(2t-3)(2t-4)}{1.2.3.4.5.6} M^{t-3} N^3 \ldots \Big) \sqrt{M}$$
$$\pm \Big(\frac{2t+1}{1} M^t + \frac{(2t+1)(2t)(2t-1)}{1.2.3} M^{t-1} N + \frac{(2t+1)(2t)(2t-1)(2t-2)(2t-3)}{1.2.3.4.5} M^{t-2} N^2 +$$
$$\frac{(2t+1)(2t)(2t-1)(2t-2)(2t-3)(2t-4)(2t-5)}{1.2.3.4.5.6.7} M^{t-3} N^3 \ldots\ldots \Big) \sqrt{N}.$$

Se si rappresenti per H il coefficiente di $\sqrt{M}$, e per K il coefficiente di $\sqrt{N}$, e si facciano di $H\sqrt{M}$, $K\sqrt{N}$ i quadrati, si troverà, sottraendo il secondo dal primo, $H^2 M - K^2 N = (M - N)^{2t+1}$, ed avran luogo su le equazioni $(\sqrt{M} \pm \sqrt{N})^{2t+1} = H\sqrt{M} \pm K\sqrt{N}$; $H^2 M - K^2 N = (M - N)^{2t+1}$ tutti i riflessi, e tutte le illazioni testè fatte nel caso del cubo.

Specolazione II. Le potenze pari di un qualunque dei sei binomj o recisi sono universalmente tutte binomio, o reciso di prima specie.

Distinguerò due sorti di potenze pari, altre di grado espresso per 2^m, altre di grado espresso per $2^m h$. Quanto alle prime è già dimostrato geometricamente da Euclide, e sopra da me algebraicamente, che il quadrato di un qualunque binomio, o reciso è binomio, o reciso di prima specie; ora il quadrato di tal binomio o reciso, che verrà ad essere il quadrato-quadrato, o sia la potenza 2^2 del qualunque binomio, o reciso assegnato, sarà pur binomio, o reciso di prima specie, e similmente il quadrato di questo, che è quanto dire la potenza 2^3 del proposto qualunque, e così via via. Passiamo alle altre potenze pari di grado $2^m h = 2^{m-1} \times 2h$. Supponendo h numero dispari, la potenza h del binomio, o reciso proposto sarà giusta la particolar di lui specie, ma il quadrato $2h$ di essa potenza h sarà binomio, o reciso di prima specie, ed ascendendo in seguito di quadrato in quadrato tante volte, quante ne esprime 2^{m-1}, si genererà ad ogni volta un nuovo binomio, o reciso di prima specie.

Ma trattiamo la cosa in forma generale siccome sopra. Sia il grado della potenza pari $2t$, e sarà

$$(\sqrt{M} \pm \sqrt{N})^{2t} = M^t + \frac{2t(2t-1)}{1 \cdot 2} M^{t-1} N + \frac{2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} M^{t-2} N^2 + \frac{2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)(2t-4)(2t-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} M^{t-3} N^3 \ldots \ldots \pm$$
$$\left(\frac{2t}{1} M^{t-1} + \frac{2t(2t-1)(2t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} M^{t-2} N + \frac{2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)(2t-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} M^{t-3} N^2 + \frac{2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)(2t-4)(2t-5)(2t-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} M^{t-4} N^3 \ldots\right) \sqrt{M} \times \sqrt{N}.$$

Ecco, la prima parte è razionale. Se intendasi essa raccolta nel simbolo F, ed il coefficiente della parte seconda compendiato nel simbolo G, e fatti di F, e di $G\sqrt{MN}$ i quadrati, si sottragga dal primo il secondo, si discoprirà essere $F^2 - G^2 MN = (M-N)^{2t}$; laonde, essendo universalmente la potenza pari $(M-N)^{2t}$ positiva, sarà per conseguenza generalmente $F^2 > G^2 MN$, cioè il quadrato della parte razionale maggiore del quadrato della parte irrazionale. Finalmente la radice della differenza de' quadrati $(M-N)^{2t}$, essendo $(M-N)^t$, è manifesto esser essa, siccome razionale, alla prima parte commensurabile: tre proprietà, che dimostrano la potenza pari $(\sqrt{M} \pm \sqrt{N})^{2t}$ universalmente binomio, o reciso di prima specie.

Specolazione III. Se il binomio, o reciso di prima specie $a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)}$ si alzi a qualunque potenza n, ed il provento si rappresenti compendiosamente per $R \pm S\sqrt{(a^2 - d^2)}$, concepiscasi cioè $(a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)})^n = R \pm S\sqrt{(a^2 - d^2)}$: è sempre $R : a < S\sqrt{(a^2 - d^2)} : \sqrt{(a^2 - d^2)}$: vale dire la parte razionale della potenza ha alla parte razionale del binomio, o reciso di prima specie innalzato ragione minore che la parte irrazionale alla irrazionale; per conseguenza $R : a < S : 1$.

Incominciamo dal veder che cosa succeda nel quadrato, ponendo $n = 2$. Si ha $(a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)})^2 = 2a^2 - d^2 \pm 2a\sqrt{(a^2 - d^2)}$; onde $R : a :: 2a^2 - d^2 : a$; $S : 1 :: 2a : 1 :: 2a^2 : a$. Ma $2a^2 - d^2 : a < 2a^2 : a$; dunque $R : a < S : 1$.

Posto $n = 3$, $(a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)})^3 = a^3 \pm 3a^2\sqrt{(a^2 - d^2)} + 3a(a^2 - d^2) \pm (a^2 - d^2)\sqrt{(a^2 - d^2)} = 4a^3 - 3ad^2 \pm (4a^2 - d^2)\sqrt{(a^2 - d^2)}$. Quinci $R : a :: 4a^3 - 3ad^2 : a :: 4a^2 - 3d^2 : 1$; $S : 1 :: 4a^2 - d^2 : 1$: dunque $R : a < S : 1$.

Posto $n = 4$, $(a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)})^4 = a^4 \pm 4a^3\sqrt{(a^2 - d^2)} + 6a^2(a^2 - d^2) \pm 4a(a^2 - d^2)\sqrt{(a^2 - d^2)} + (a^2 - d^2)^2 = a^4 + 6a^2(a^2 - d^2) + (a^2 - d^2)^2 \pm (4a^3 + 4a(a^2 - d^2))\sqrt{(a^2 - d^2)}$.

Conseguentemente $R : a :: 8a^4 - 4a^2d^2 - d^2(4a^2 - d^2) : a$; $S : 1 :: 8a^3 - 4ad^2 : 1 :: 8a^4 - 4a^2d^2 : a$. Dunque $R : a < S : 1$.

A rendere la dimostrazione generale intendasi, siccome per $R \pm S\sqrt{(a^2-d^2)}$ la potenza n^{esima}, così per $P \pm Q\sqrt{(a^2-d^2)}$ la potenza $n - 1^{esima}$ di $a \pm \sqrt{(a^2-d^2)}$: sarà in conseguenza $R \pm S\sqrt{(a^2-d^2)} = \left(P \pm Q\sqrt{(a^2-d^2)}\right)\left(a \pm \sqrt{(a^2-d^2)}\right) = Pa + Qa^2 - Qd^2 \pm (P + Qa)\sqrt{(a^2-d^2)}$. Dunque $R : a : Pa + Qa^2 - Qd^2 : a$; ed $S : 1 :: P + Qa : 1 :: Pa + Qa^2 : a$; quindi $R : a < S : 1$.

Se pertanto $P \pm Q\sqrt{(a^2-d^2)}$ rappresenti il quadrato di $a \pm \sqrt{(a^2-d^2)}$, questa minor ragione di $R : a$, che di $S : 1$ resta dimostrata per il cubo, se $P \pm Q\sqrt{(a^2-d^2)}$ rappresenti il cubo, la cosa va a ricever dimostrazione rispetto al quadrato-quadrato, e così con indefinito progresso, ed universalmente.

Specolazione IV. Se del binomio, o reciso di prima specie $a \pm \sqrt{(a^2-d^2)}$ rappresentino ordinatamente $P \pm Q\sqrt{(a^2-d^2)}$ il quadrato, $R \pm S\sqrt{(a^2-d^2)}$ il cubo, $T \pm U\sqrt{(a^2-d^2)}$ il quadrato-quadrato sarà

$$R : P < S : Q;\quad T : P < U : Q;\quad T : R < U : S.$$

Parte I. Per le elevazioni fatte nella dimostrazione superiore $P = 2a^2 - d^2$, $Q = 2a$, $R = 4a^3 - 3ad^2$, $S = 4a^2 - d^2$. Or $4a^3 - 3ad^2 : 2a^2 - d^2 < 4a^2 - d^2 : 2a$; poichè $(4a^3 - 3ad^2)\,2a < (2a^2 - d^2)(4a^2 - d^2)$, cioè $8a^4 - 6a^2d^2 < 8a^4 - 6a^2d^2 + d^4$.

Parte II. $T = 8a^4 - 8a^2d^2 + d^4$, $U = 8a^3 - 4ad^2$. Or $8a^4 - 8a^2d^2 + d^4 : 2a^2 - d^2 < 8a^3 - 4ad^2 : 2a$; essendo $(8a^4 - 8a^2d^2 + d^4)\,2a < (2a^2 - d^2)(8a^3 - 4ad^2)$, vale dir $16a^5 - 16a^3d^2 + 2ad^4 < 16a^5 - 16a^3d^2 + 4ad^4$.

Parte III. $8a^4 - 8a^2d^2 + d^4 : 4a^3 - 3ad^2 < 8a^3 - 4ad^2 : 4a^2 - d^2$; imperciocchè $(8a^4 - 8a^2d^2 + d^4)(4a^2 - d^2) < (4a^3 - 3ad^2) \times$

$(8a^3 - 4ad^2)$, che è quanto dire $32a^6 - 40a^4d^2 + 12a^2d^4 - d^6 < 32a^6 - 40a^4d^2 + 12a^2d^4$.

Specolazione V. I due teoremi nelle due antecedenti Specolazioni 3.ª e 4.ª dimostrati per il binomio e reciso di prima specie $a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)}$ vagliono ugualmente per il binomio, o reciso di 4.ª specie $a \pm \sqrt{(a^2 - d)}$, non inducendo alcuna mutazione nelle dimostrazioni il cangiamento di d^2 in d.

Falla Cardano, il quale riguardo alle due specie 1.ª, e 4.ª de' binomj, e recisi, al contrario di ciò, che io ho dimostrato nella terza parte della Specolaz. antecedente, stabilisce $T : R > U : S$. Ne adduce egli ad esempio il binomio di 4.ª specie $3 + \sqrt{2}$. Si ha $(3 + \sqrt{2})^2 = 11 + 6\sqrt{2}$; $(3 + \sqrt{2})^3 = 45 + 29\sqrt{2}$, e dice Cardano aversi $(3 + \sqrt{2})^4 = 193 + \sqrt{8712}$. Ora, soggiugne egli, $193 : 45 :: 4\frac{13}{45} : 1$, e $\sqrt{8712} : 29\sqrt{2} :: 66\sqrt{2} : 29\sqrt{2} :: 66 : 29 :: 2\frac{8}{29} : 1$; dunque la parte razionale del quadrato-quadrato alla parte razionale del cubo essendo nella ragione $4\frac{13}{45} . 1$, è in maggior ragione che la parte irrazionale alla irrazionale, non essendo la ragione di queste parti che quella di $2\frac{8}{29} : 1$. Anderebbe bene l'argomentar di Cardano, se fosse veracemente $(3 + \sqrt{2})^4 = 193 + \sqrt{8712} = 193 + 66\sqrt{2}$; ma qui sta l'errore, essendo propiamente $(3 + \sqrt{2})^4 = 193 + \sqrt{17424} = 193 + 132\sqrt{2}$. Pertanto $132 : 29 :: 4\frac{16}{29} : 1$, che è ragione maggiore di $4\frac{13}{45} : 1$. Non dovea Cardano accontentarsi di un esempio numerico; dovea con tutta diligenza provare in più, trattandosi d'inferirne una conseguenza generale: è troppo facile l'errore in computo numerico, nel letterale all'incontro, oltre il procedere alla verità piena e generica in un sol viaggio, è facil anche schivare il material fallo.

Specolazione VI. Segnando per $p \pm q \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}}$ il quadrato, e qualunque altra potenza pari $2m$ del binomio, o reciso di seconda specie $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm a$, e per $s \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm r$ il suo cubo, e qualunque altra potenza di esso dispari $2m+1$, sarà $p \pm q \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}}$ per la Specolaz. 2.ª un binomio, o reciso di prima specie, ed $s \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm r$ un binomio, o reciso di seconda specie, conformemente al binomio, o reciso innalzato $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm a$; ma sarà per ugual modo

$$p : a > q \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} : \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} > q : 1 \text{ ed } r : a > s : 1 .$$

Per qualunque potenza cioè del binomio o reciso di seconda specie generalmente la parte razionale della potenza alla parte razionale dell'innalzato binomio, o reciso, sarà in ragion maggiore, che la irrazionale alla irrazionale.

Primieramente $\left(\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm a\right)^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2} + a^2 \pm 2a \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}}$ $= 2a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2 - c} \pm 2a \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}}$. Or $2a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2 - c^2} : a > 2a : 1 > 2a^2 : a$, il che è di sè evidente; dunque $p : a > q : 1$.

In secondo luogo $\left(\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm a\right)^3 = \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2} + 3a^2\right) \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}}$ $\pm \left(\frac{3a^3 b^2}{b^2 - c^2} + a^3\right) = \left(4a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2 - c^2}\right) \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm \left(4a^3 + \frac{3a^3 c^2}{b^2 - c^2}\right)$. Or $4a^3 + \frac{3a^3 c^2}{b^2 - c^2} : a > 4a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2 - c^2} : 1 > 4a^3 + \frac{a^3 c^2}{b^2 - c^2} : a$; dunque $r : a > s : 1$.

Per terzo $\left(\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} \pm a\right)^4 = \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}\right)^2 + \frac{6a^4 b^2}{b^2 - c^2} + a^4 \pm$ $\left(\frac{4a^3 b^2}{b^2 - c^2} + 4a^3\right) \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}} = 8a^4 + \frac{8a^4 c^2}{b^2 - c^2} + \frac{a^4 c^4}{(b^2 - c^2)^2} \pm \left(8a^3 + \frac{4a^3 c^2}{b^2 - c^2}\right) \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 - c^2}}$. Or $8a^4 + \frac{8a^4 c^2}{b^2 - c^2} + \frac{a^4 c^4}{(b^2 - c^2)^2} : a > 8a^3 + \frac{4a^3 c^2}{b^2 - c^2} : 1$; dunque $p : a > q : 1$.

A dimostrare in universale si moltiplichi $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm a$ per $p \pm q\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}$, e si avrà $\left(\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm a\right)\left(p \pm q\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}\right) = (p+aq)\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm \left(ap + \frac{q a^2 b^2}{b^2-c^2}\right) = s\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm r$. Ora sciolto $\frac{q a^2 b^2}{b^2-c^2}$ in $q a^2 + \frac{q a^2 c^2}{b^2-c^2}$ fassi evidente $ap + qa^2 + \frac{q a^2 c^2}{b^2-c^2} : a > p + q a : 1$; dunque $r : a > s : 1$.

Si moltiplichi al presente $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm a$ per $s\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm r$ e rappresenti $p' \pm q'\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}$ la potenza pari $2m+2$, che ne proverrà. Ritroveremo $\left(\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm a\right)\left(s\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm r\right) = \frac{s a^2 b^2}{b^2-c^2} + a r \pm (a s + r)\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} = p' \pm q'\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}$. Sciolgasi la frazione $\frac{s a^2 b^2}{b^2-c^2}$ in $s a^2 + \frac{s a^2 c^2}{b^2-c^2}$, ed apparirà chiaro $a^2 s + a r + \frac{s a^2 c^2}{b^2-c^2} : a > a s + r : 1$; dunque $p' : a > q' : 1$. Ed unendo le due dimostrazioni conchiudesi in tutta generalità ciò, che si è proposto.

Specolazione VII. Intendendo ordinatamente per $p \pm q\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}$ il quadrato, per $s\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm r$ il cubo, per $t \pm u\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}}$ il quadrato-quadrato del binomio, o reciso di seconda specie $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2-c^2}} \pm a$: sarà

$$r : p < s : q; \quad t : p < u : q; \quad t : r > u : s.$$

Parte I. $p = 2a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2-c^2}$, $q = 2a$, $s = 4a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2-c^2}$, $r = 4a^3 + \frac{3 a^3 c^2}{b^2-c^2}$. Or $4a^3 + \frac{3 a^3 c^2}{b^2-c^2} : 2a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2-c^2} < 4a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2-c^2} : 2a$. Poichè $\left(4a^3 + \frac{3 a^3 c^2}{b^2-c^2}\right) 2a = 8a^4 + \frac{6 a^4 c^2}{b^2-c^2} < \left(2a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2-c^2}\right) \times \left(4a^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2-c^2}\right) = 8a^4 + \frac{6 a^4 c^2}{b^2-c^2} + \frac{a^4 c^4}{(b^2-c^2)^2}$.

Parte II. $t = 8a^4 + \frac{8a^4c^2}{b^2-c^2} + \frac{a^4c^4}{(b^2-c^2)^2}$; $u = 8a^3 + \frac{4a^3c^2}{b^2-c^2}$.

Ora $8a^4 + \frac{8a^4c^2}{b^2-c^2} + \frac{a^4c^4}{(b^2-c^2)^2} : 2a^2 + \frac{a^2c^2}{b^2-c^2} < 8a^3 + \frac{4a^3c^2}{b^2-c^2} : 2a$.

Imperciocchè $\left(8\,4^4 + \frac{8a^4c^2}{b^2-c^2} + \frac{a^4c^4}{b^2-c^2}\right)2a = 16a^5 + \frac{16a^5c^2}{b^2-c^2} + \frac{2a^5c^4}{(b^2-c^2)^2} < \left(2a^2 + \frac{a^2c^2}{b^2-c^2}\right)\left(8a^3 + \frac{4a^3c^2}{b^2-c^2}\right) = 16a^5 + \frac{16a^5c^2}{b^2-c^2} + \frac{4a^5c^4}{(b^2-c^2)^2}$.

Parte III. $8a^4 + \frac{8a^4c^2}{b^2-c^2} + \frac{a^4c^4}{(b^2-c^2)^2} : 4a^3 + \frac{3a^3c^2}{b^2-c^2} > 8a^3 + \frac{4a^3c^2}{b^2-c^2} : 4a^2 + \frac{a^2c^2}{b^2-c^2}$. Imperocchè $\left(8a^4 + \frac{8a^4c^2}{b^2-c^2} + \frac{a^4c^4}{(b^2-c^2)^2}\right) \times \left(4a^2 + \frac{a^2c^2}{b^2-c^2}\right) = 32a^6 + \frac{40a^6c^2}{b^2-c^2} + \frac{12a^6c^4}{(b^2-c^2)^2} + \frac{a^6c^6}{(b^2-c^2)^3} > \left(4a^3 + \frac{3a^3c^2}{b^2-c^2}\right)\left(8a^3 + \frac{4a^3c^2}{b^2-c^2}\right) = 32a^6 + \frac{40a^6c^2}{b^2-c^2} + \frac{12a^6c^4}{(b^2-c^2)^2}$.

Specolazione VIII. I teoremi sotto le due precedenti Specolazioni 6.ª, e 7.ª vagliono ugualmente per il binomio, e reciso di quinta specie $\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2-c}} \pm a$, rimanendo le stesse le dimostrazioni cangiando c^2 in c.

Esempio. Sia $\sqrt{5} \pm 2$ binomio e reciso di quinta specie. $(\sqrt{5} \pm 2)^2 = 9 \pm 4\sqrt{5}$; $(\sqrt{5} \pm 2)^3 = 17\sqrt{5} \pm 38$; $(\sqrt{5} \pm 2)^4 = 161 \pm 72\sqrt{5}$. Or

$38 : 9 < 17 : 4$, o sia $4\frac{2}{9} : 1 < 4\frac{1}{4} : 1$

$161 : 9 < 72 : 4$, o sia $17\frac{8}{9} : 1 < 18 : 1$

$161 : 38 > 72 : 17$, o sia $4\frac{9}{38} : 1 > 4\frac{4}{17} : 1$

A veder chiaro, che $\frac{9}{38}$ è $> \frac{4}{17}$ basta moltiplicare in croce, uscendone $153 > 152$.

Asserisce il Cardano rispetto ai binomj, e recisi di seconda, e di quinta specie, che $t : p > u : q$ al contrario di quello, che io ho piantato. Ma è questo un secondo errore di Cardano, discoperto per il calcolo generale, e riconvinto dall'esempio suo stesso. Al che aggiugnerò la ragione intrinseca, che il quadrato di un binomio, o reciso di 2.ª, e di 5.ª specie è giusta la Specolaz. II. un binomio, o reciso di 1.ª specie, ed il quadrato-quadrato di esso binomio, o reciso di 2.ª, e di 5.ª specie viene in conseguenza ad essere il quadrato primo di un binomio, o reciso di prima specie; e perciò le ragioni della parte razionale del quadrato-quadrato alla parte razionale del quadrato, e della irrazionale alla irrazionale entrano nelle leggi della Specolaz. IV.

Cardano propone le sue specolazioni, qui da me, emendando, riferite, nel capo XVII del suo libro *Ars magna Arithmeticae*. Ma a prova non ne adduce che un esempio numerico per ciascheduna. Il recarle alle specie letterali ha prodotto due beneficj: il primo di purgarle da ogni errore, il secondo di ornarle di generale dimostrazione; mi saprà di ciò grado chi ama, e gusta le cose specolative; e non furono specolazioni sterili appresso Cardano, siccome vedremo. Ma vi ha di più nelle generali dimostrazioni per me formate un terzo beneficio, qual è quello di aprire il campo a de' nuovi teoremi. Poichè, siccome, ad esempio, nella general dimostrazione della Specolaz. III. si è supposto $P \pm Q \sqrt{(a^2 - d^2)}$ la potenza $n-1^{esima}$ di $a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)}$, il che importa concepire P razionale, e maggiore di $Q\sqrt{(a^2 - d^2)}$, così si può intender $P \pm Q \sqrt{(a^2 - d^2)}$ un qualunque binomio, o reciso, fuori dell'avere con $a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)}$ comune $\sqrt{(a^2 - d^2)}$, nel resto ad esso lui estranio, ed avente P, e Q e razionali ambidue, e irrazionali, e l'uno razionale, l'altro irrazionale, come si vuole. E stando cionulladimeno sempre pel prodotto $\left(P \pm Q \sqrt{(a^2 - d^2)}\right)\left(a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)}\right) = Pa + Qa^2 - Qd^2 \pm (P \pm Qa) \sqrt{(a^2 - d^2)}$ l'essere $Pa + Qa^2 - Qd^2 : a < P + Qa : 1$ ne viene per illazione il

Teorema. Per qualunque binomio, o reciso $P \pm Q \sqrt{(a^2 - d^2)}$ venga il binomio, o reciso di prima specie $a \pm \sqrt{(a^2 - d^2)}$ moltiplicato, la parte razional del prodotto sarà alla parte razional a di esso binomio, o reciso di prima specie in minore ragione che la parte irrazionale alla irrazionale.

Simili teoremi si tireranno dalle altre generali dimostrazioni.

§. III.

Calcolo delle radici universali, o legate.

Radice universale chiamarono gli antichi la radice di un composto di due, tre, o più nomi qual $\sqrt{(3 \pm \sqrt{2})}$, o $\sqrt{(5 \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{2}})}$ ec. Ed avendo segnate con la lettera ℞ le radici semplici, vi aggiunsero, od accoppiarono la lettera *v*, od *V* per significar la radice universale; così a dinotar esempigrazia la radice universale del binomio o reciso $3 \pm \sqrt{2}$ scrissero ℞. *V*. 3. $\bar{p}$. ℞ 2, ℞. *V*. 3. $\bar{m}$ ℞ 2. Apprendiamo da Frate Luca alla pag. 67, ed altrove, che in vece di universali appellavansi eziandio radici sì fatte *radici legate*. Usò egli nondimeno attenersi alla prima denominazione. E questo costume fu da Tartaglia seguito tanto, che nel definire, ed insegnare a mettere in calcolo tali radici non fece tampoco del nome di *legate* menzione alcuna. Cardano a due nomi due significati assegnò differenti, con aggiugnere inoltre il terzo nome di radici *disgiunte* o *distinte*. E valendosi della lettera *V* per dinotare la radice universale, adoperò la lettera *L* a nota delle legate, e *D*, o *d* a nota delle disgiunte, o distinte. Le sue idee rendonsi chiare là dove, capo XVII della *Pratica generale dell' Aritmetica*, assegna i quadrati differenti delle tre per lui divisate specie di radici. Il quadrato della ℞. V 9. $\bar{p}$. ℞4 è 11; il quadrato della ℞. L 9. $\bar{p}$. ℞4 è 25; ed il quadrato della ℞. D 9. $\bar{p}$. ℞4 è 13. Nel nostro stile noi scriveremmo $(\sqrt{(9+\sqrt{4})})^2 = 9+\sqrt{4} = 11$; $(\sqrt{9}+\sqrt{4})^2 = (3+2)^2 = 25$; $(\sqrt{9})^2 + (\sqrt{4})^2 = 9+4 = 13$; cioè la lettera L significa per Cardano dover il quadrato, e così qualunque altra operazione cadere su l'aggregato delle radici, e la lettera per l'opposto D avvisa dover il quadrato o qualunque altra operazione cadere su ciascuna delle radici a parte, e disgiuntamente. La separazione da Cardano fatta delle due denominazioni di radici universali, e di radici legate, portandole a significar cose differenti, o non fu abbracciata, o non ebbe sussistenza. Poichè dall'opera di Bombelli pag. 99 apparisce, che all'anno 1572, anterior di quattro anni a quello, in cui morì il Cardano, ambedue le denominazioni riferite venivano alla cosa stessa, e solamente gli analisti erano divisi nella predilezione dell'una, o dell'altra, secondo il diverso concetto in diversi di maggior proprietà, e significativa forza in questa, od in quella. Rispetto alla qual disputa, sebben protesti Bombelli, che a lui non importava contendere sopra ciò, non essendo in sostanza importante punto, aggiugne tuttavolta a lui parere, che stia meglio dire radice legata, perchè si vuole il lato del composto de' nomi collegati insieme; e quinci il titolo di legate adotta, e adopera costantemente.

Le condizioni delle linee euclidee denominate l'irrazionale maggiore, la potente in razionale e mediale, la potente in due mediali, in un con i recisi respettivi, importano il quadrare radici universali, e moltiplicarne una in l'altra; laonde almeno queste due operazioni su le radici universali vantano la stessa antichità che il trasporto dei teoremi, e problemi euclidei dalle linee ai numeri, se dir piuttosto non devesi, godersi da esse in linee quella dei teoremi, e problemi medesimi. Frate Luca però non diede intorno alle accennate operazioni su le radici universali insegnamento veruno; senza dubbio perchè vide bastare ad eseguirle le regole del quadrare, e moltiplicare l'una nell' altra le radici semplici, combinate con le regole della moltiplica delle quantità moltinomie. Effettivamente siccome $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; così $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} \times \sqrt{(F \pm \sqrt{G})} = \sqrt{(A \pm \sqrt{B})(F \pm \sqrt{G})}$, ed altro a compiere la moltiplica accennata sotto il segno radicale non richiedesi che la rimembranza delle regole per la moltiplica delle quantità binomiali. Tartaglia cionondimeno stimò bene d'occuparsi di proposito su le antidette operazioni, e su i varj accidenti loro, insegnando partitamente come si quadri una radice universale quadra, e come si cubi una cuba, come quella si moltiplichi per numero o per radice quadra semplice, o per altra radice universale quadra; ed aggiunse l'operazione reciproca del dividere e quelle del sommare, e sottrarre. Le regole tutte di Tartaglia sono semplici, e chiare, e quali da noi si danno, e si usano. Cardano per l'opposto, che della quadratura, della moltiplica, e della divisione delle universali radici pur tratta, intricandovi le sue idee di radici legate e disgiunte, toglie alle regole la semplicità, e chiarezza lor naturale. Per esempio a moltiplicare ℞. V. 7. $\bar{p}$ ℞ 4 con ℞. V. 5 $\bar{p}$ ℞ 16, si dèe, giusta Cardano, 1.° prender di queste radici universali i quadrati ed apporvi il D così: D. 7 $\bar{p}$ ℞ 4; D. 5 $\bar{p}$ ℞ 16. In 2.° luogo di queste radici disgiunte fare i quadrati, che saranno 49 $\bar{p}$ 4; 25 $\bar{p}$ 16. In 3.° luogo trasferire questi quadrati a radici legate come segue: ℞ L 49 $\bar{p}$ 4; ℞ L 25 $\bar{p}$ 16. Per 4.° moltiplicare tra loro queste radici legate, che è quanto moltiplicare ℞ 49 $\bar{p}$ ℞ 4 per ℞ 25 $\bar{p}$ ℞ 16: 5.° della somma de' quattro prodotti ℞ 1225 $\bar{p}$ ℞ 100 $\bar{p}$ ℞ 784 $\bar{p}$ ℞ 64, prender la radice che si troverà 9, essendo ℞ 1225 $=35$, ℞ 100 $=10$, ℞ 784 $=28$, ℞ 64 $=8$, la somma $=81$, e ℞ 81 $=9$. Qual intrico senza ragione veruna, e in cosa per sè semplice, e spedita? Non si può propiamente caratterizzarlo che un abuso d'ingegno; e non per altro l'ho io addotto, che per non mancare all'esattezza storica, ed affinchè la risoluzione ordinata e chiara del cardanico calcolo da me esibita servisse di ajuto a chi vaghezza concepisse di scorrere l'opera di lui.

TEMPO III.

Leggieri aggiunte di Bombelli.

Tanto era lungi che la teoria delle quantità irrazionali presentar si potesse novella, quale il Gua-de-Malves dipignela, nell'opera di Bombelli, che per la ricchezza all'incontro, della quale già godeva, non trovò Bombelli pressochè nulla di nuovo da aggiugnerle. Poichè ecco tutto ciò, che le aggiunse. In primo luogo, relativamente alle radici semplici, alle due maniere di trasformarne la somma e sottrazione già stampate nei libri di Frate Luca, di Tartaglia e di Cardano, e che io brevemente esprimo nelle due equazioni $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{(a+b\pm 2\sqrt{ab})}$; $\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}=\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\pm 1\right)\sqrt[n]{b}$ aggiunse la terza, che rappresento nella equazione $\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}=\left(\sqrt[n]{\frac{a}{c}}\pm\sqrt[n]{\frac{b}{c}}\right)\sqrt[n]{c}$. Riesce questa utile qualora $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ sieno potenze perfette del grado n siccome la già adoperata dagli analisti anteriori $\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}=\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\pm 1\right)\sqrt[n]{b}$ è utile ogni volta che sia podestà perfetta di grado n il quoziente della divisione $\frac{a}{b}$. A bene penetrar poi, le condizioni di ambedue le maniere, per essere utili, importano in fondo che $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ sieno tra di loro comunicanti: poichè suppongasi $\frac{a}{b} = f^n$, e sarà conseguentemente $a = f^n b$, $\sqrt[n]{a} = f\sqrt[n]{b}$; e similmente supponendo $\frac{a}{c} = g^n$, $\frac{b}{c} = h^n$ ne verrà $a = g^n c$, $b = h^n c$, $\sqrt[n]{a} = g\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{b} = h\sqrt[n]{c}$. Richiedendo del pari la prima delle tre maniere, ad esser utile, la comunicanza fra $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, si fa manifesto che tutte tre esse maniere di trasformar la somma, o sottrazione delle quantità irrazionali semplici spettano lo stesso caso, e rendonsi vantaggiose, con divenir vere riduzioni, alla condizione solamente, che le irrazionali quantità sieno tra loro comunicanti. Rispetto in secondo luogo alle radici universali non fece Bombelli, che applicar loro con maggiore estensione, e distinzion di casi, che Tartaglia non avea fatto, le regole delle operazioni su le radici semplici. Laonde non si può che conchiudere, pressochè nulla di nuovo, e nulla affatto di essenziale aver alla dottrina delle quantità irrazionali aggiunto quel Bombelli, nell'opera del quale al dire del Gua-de-Malves per la prima volta apparve il calcolo delle quantità irrazionali.

CAPO V.

Calcolo delle radici immaginarie presso Cardano, e Bombelli.

Il Gua-de-Malves annovera a secondo vanto di Bombelli l'essere lui stato il primo, che abbia fatto entrare ne' calcoli le radici impossibili, e che noi chiamiamo immaginarie. *Bombelli en second lieu est le premier, qui ait fait entrer dans les calculs les racines impossibles.* E sì, che rispetto al calcolo delle immaginarie radici ha veracemente Bombelli ad illustre lode diritto. Non è però, che il primo assolutamente ei fosse a dar pensiero alle immaginarie radici, e su di esse operare. Cardano nel capo XXXVII dell' *Arte magna* ne tratta sotto il titolo di regola di falso porre per radice di meno: *Regula falsum ponendi per radicem m.* Ed a spiegare praticamente tal regola propone tre problemi, il primo de' quali è questo: Se alcun chiegga, che gli si divida il numero 10 in due parti, il prodotto delle quali sia 40, è cosa manifesta, che il caso, od il quesito è egli impossibile. *Manifestum est,* così egli, *quod casus, seu quaestio est impossibilis.* Ciononostante operando giusta il metodo ordinario, ed universale dello scioglimento delle equazioni di 2.° grado si trova le due parti essere $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$. A render all'intelletto più chiaro il senso della regola, *ut regulae verus pateat intellectus*, rappresenta Cardano il numero 10 da dividere per una retta, e su la metà vi forma il quadrato 25, ma in giungendo alla radice immaginaria $\sqrt{(25-40)}=\sqrt{-15}$ si raccomanda alla immaginazion del Leggitore; ed indi volgesi a dimostrare che le parti $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$ adempiono le condizioni imposte, perchè la somma loro $=5+\sqrt{-15}+5-\sqrt{-15}=10$, e perchè il risultato della lor moltiplica, distruggendosi l'un l'altro i prodotti in croce, ristrignesi ai due prodotti $5\times 5=25$, $+\sqrt{-15}\times-\sqrt{-15}=--15=+15$, e così trovasi essere $=25+15=40$. È egli questo certamente un operare su le radici immaginarie, un eseguirne l'operazione potissima, qual è quella della moltiplica, ed è un eseguirla con somma giustezza. Paragona Cardano i problemi, che recano a semplice meno, e quelli che recano a radice di meno; ed a differenza tra il semplice meno, che noi diciamo quantità negativa, e la radice di meno, chiama questa *meno sofistico*, dando alla negativa quantità il nome di *puro meno*. Ognun vede quanto all'odierno titolo d'immaginario vicino sia quel di sofistico. E coerentemente a tal denominazione Cardano termina con dire *hucusque progreditur Arithmetica subtilitas, cujus hoc extremum adeo est subtile, ut sit inutile*. Cardano non si fa egli autore di tal sottile progresso, e la taccia, che gli dà di inutilità, piegaci a riguardarlo per passo anteriore di alcun altro, anzi che passo novello di lui. Del Cardano fu bensì l'avvertire la immaginaria radice, che implicasi nella tartagliana formola di scioglimento dell'equazione $x^3-px\pm q=0$ nel caso $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$. In vista di questa implicazione, alla quale la tartagliana formola va soggetta, tentò Cardano tutte le altre vie, che tentar si possano per giugnere ad ottenere nel segnato caso sotto differente, e del tutto reale aspetto la radice dell'esposta equazione; ed alto onore gli fanno l'ingegno, e la finissima analisi, con cui per tali vie si conduce, e la dimostrata impossibilità di arrivare per qualunque di esse al bramato termine.

Le dimostrazioni di Cardano persuasero, siccome io credo, Bombelli a ritornare anche nell'accennato caso alla formola tartagliana, e su di essa insistere, e adoperarsi di sforzarla a manifestare la quantità cercata, cui essa svisa ed occulta, al che stimò valere, e vale in ipotesi, che tal quantità razional sia, l'estrarre dal binomio, e dal reciso di parte reale, e di parte immaginaria composti, non altrimenti che da binomio, e da reciso interamente reali le cubiche radici. Si fu di qui, che Bombelli prese motivo di considerare ben di proposito le radici immaginarie, e tutto partitamente svolgerne, e stabilirne il calcolo. Ecco le sue denominazioni, e fondamentali regole con i traducimenti in algebraiche specie

Denominazioni.

Denom. 1.ª Più di meno 3 .... $+3\sqrt{-1}$.

Generalmente più di meno a .... $+a\sqrt{-1}$.

Denom. 2.ª Meno di meno a .... $-a\sqrt{-1}$.

Denom. 3.ª Più di meno R. $q.a$ .... $+\sqrt{a}\sqrt{-1}$, o sia $+\sqrt{-a}$.

Denom. 4.ª Meno di meno R. $q.a$ .... $-\sqrt{a}\sqrt{-1}$, o sia $-\sqrt{-a}$.

Regole di moltiplica.

Reg. 1.ª Più via più di meno fa più di meno .....

$+b\times+a\sqrt{-1}=+ab\sqrt{-1}$ .... $+\sqrt{b}\times+a\sqrt{-1}=+a\sqrt{-1}\sqrt{b}$.

Reg. 2.ª Meno via più di meno fa meno di meno .....

$-b\times+a\sqrt{-1}=-ab\sqrt{-1}$ .... $-\sqrt{b}\times+a\sqrt{-1}=-a\sqrt{-1}\sqrt{b}$.

Reg. 3.ª Più via meno di meno fa meno di meno:

$+b\times-a\sqrt{-1}=-ab\sqrt{-1}$ .... $+\sqrt{b}\times-a\sqrt{-1}=-a\sqrt{-1}\sqrt{b}$.

Reg. 4.ª Meno via meno di meno fa più di meno:

$-b \times -a\sqrt{-1} = +ab\sqrt{-1} \ldots -\sqrt{b} \times -a\sqrt{-1} = +a\sqrt{-1}\sqrt{b}$.

Reg. 5.ª Più di meno via più di meno fa meno:

$+a\sqrt{-1} \times +b\sqrt{-1} = -ab \ldots +\sqrt{-a} \times +\sqrt{-b} = +\sqrt{a}\sqrt{-1} \times +\sqrt{b}\sqrt{-1} = -\sqrt{ab}$.

Reg. 6.ª Più di meno via men di meno fa più:

$+a\sqrt{-1} \times -b\sqrt{-1} = +ab \ldots +\sqrt{-a} \times -\sqrt{-b} = +\sqrt{a}\sqrt{-1} \times -\sqrt{b}\sqrt{-1} = +\sqrt{ab}$.

Reg. 7.ª Meno di meno via più di meno fa più:

$-a\sqrt{-1} \times +b\sqrt{-1} = +ab \ldots -\sqrt{-a} \times +\sqrt{-b} = -\sqrt{a}\sqrt{-1} \times +\sqrt{b}\sqrt{-1} = +\sqrt{ab}$.

Reg. 8.ª Meno di meno via men di meno fa meno:

$-a\sqrt{-1} \times -b\sqrt{-1} = -ab \ldots -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-b} = -\sqrt{a}\sqrt{-1} \times -\sqrt{b}\sqrt{-1} = -\sqrt{ab}$.

Sono queste le regole, che la metafisica considerazione delle immaginarie radici di subito suggerisce, e persuade. Poichè chi può dubitare, o non comprendere ad evidenza essere $+\sqrt{-1} \times +\sqrt{-1}$, o sia il quadrato di $\sqrt{-1} = -1$? E da questo principio discendono tutte e quattro le regole dalla 5.ª all'8.ª spettanti la moltiplica di immaginaria con immaginaria radice. Alla regola 6.ª è conforme l'operazione preventivamente esibita da Cardano nella moltiplica di $+\sqrt{-15}$ in $-\sqrt{-15}$ con prendere a prodotto $--15$, e quinci $+15$. Il problema anzi per Cardano trattato ci porge una conferma sensibile, e di fatto della verità, e necessità della regola. Le due equazioni condizionali del problema essendo $x+y=10$, $xy=40$, l'analisi determina a parti necessarie di 10, $x=5+\sqrt{-15}$, $y=5-\sqrt{-15}$. Or se nel prodotto di $5+\sqrt{-15}$, con $5-\sqrt{-15}$, rispetto alla moltiplica di $+\sqrt{-15}$ in $-\sqrt{-15}$ a pigliar si avesse per effetto di essa $-\sqrt{15}$, o sia -15, si avrebbe per prodotto intero $25-15=10$, cioè in luogo di $xy=40$, riuscirebbe $xy=10$, per conseguenza la seconda condizione non resterebbe adempita, ciò che non può essere in alcun modo, essendo ripugnante, che le determinazioni ugualmente tratte da due condizioni non le adempiano ugualmente tutte e due. Dunque il vero prodotto di $+\sqrt{-15}$ in $-\sqrt{-15}$ è di necessità $+15$, ed in genere $+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}$ di necessità $=+a$, e più generalmente $+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-b}$ di assoluta necessita $=+\sqrt{ab}$. Per la qual cosa ingannati si sono coloro, che le immaginarie radici creduto hanno doversi onninamente trattare, siccome le reali, senza riguardo verun loro propio, onde attesa la sola comune regola di $-\times-=+$ insegnarono essere $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$. È caduto in questo errore l'Eulero negli *Elementi di Algebra* num. 148 dicendo aversi $\sqrt{6}$ per valore di $\sqrt{-2}$ moltiplicato per $\sqrt{-3}$, $\sqrt{4}$, o sia 2 per valor del prodotto di $\sqrt{-1}$ in $\sqrt{-4}$; e coerentemente nel seguente num. 149 fa $\frac{1}{\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{+1}{-1}}=\sqrt{-1}$, quando giusta la buona metafisica è in verità $\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{1\times\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}=-\sqrt{-1}$. Reca tanto maggior maraviglia questa caduta dell'esimio Eulero, quanto che nel num. 146 pianta a prima nozione nella materia presente delle immaginarie radici, che $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$, e nel num. 147 procede a parlare, e con varj esempj insiste su lo scioglimento di una qualunque radice immaginaria in una radice reale, e nella immaginaria $\sqrt{-1}$. Ad illustramento della vera regola, e rimovimento di un obbietto ci presenta una ottima nota il Bezout sotto il num. 118 dell'algebra sua. *Il ne faut pas confondre* $\sqrt{(-a)^2}$ *avec* $\sqrt{-a^2}$; *le premier est* $\sqrt{(-a\times-a)}$, *et le second est* $\sqrt{(-a \times +a)}$. *Nous ferons à cette occasion une remarque, que nous croyons très à propos. Puisque* $-a \times -a$ *donne* $+a^2$, *dont la racine est* $\pm a$, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ *devroit donc donner* $\pm a$; *cependant nous ne donnons ici que* $-a$. *La raison en est simple. Quand on demande quelle est la racine de* $+a^2$, *on a raison d'assigner également* $+a$ *et* $-a$; *parceque rien dans cette question ne détermine si l'on considere* $+a^2$ *comme venu de* $+a \times +a$, *ou de* $-a \times -a$; *mais quand on demande quelle est la valeur de* $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, *quoique cette quantité, selon les regles, se reduise à* $\sqrt{+a^2}$, *on ne doit prendre que* $-a$, *parceque la question elle même fixe ici par quelle opération est venu* $+a^2$. *C'est en faisant cette attention, qu'on remarquera, que* $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ *doit donner* $-\sqrt{ab}$, *et non pas* $\pm\sqrt{ab}$; *parceque* $\sqrt{-a}$ *étant la même chose que* $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, *et* $\sqrt{-b}$ *la même chose que* $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ *sera* $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$, *ou* $\sqrt{ab} \times \sqrt{(-1)^2}$, *qui revient à* $-\sqrt{ab}$, *puisque* $\sqrt{(-1)^2} = -1$.

Si è fatto un gran mistero di algebra del risultare dalla moltiplica di due quantità immaginarie una quantità reale. Ma posson esservi misterj in algebra? Il Wolfio passò a riguardare tal risultato quale solenne assurdo, ed a volere relativamente alle quantità negative poste sotto i segni radicali nelle immaginarie radici eccezione alla universal regola $- \times - 1 = +$. *In multiplicatione*, scrive egli nello scolio 3.° del Probl. 13, n. 71, *Elem. Anal.*, delle immaginarie radici brevemente parlando, *in multiplicatione signum non mutatur, sed facto perinde, ac factoribus praefigitur signum* $-$, *alias enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum. Quamobrem regulae de signis tantummodo observantur respectu radicum, minime vero respe-*

cta quantitatum sub signo radicali positarum. E quinci calcola egli $(\sqrt{-5}-\sqrt{-7})\times\sqrt{-3}=\sqrt{-15}-\sqrt{-21}$, in luogo di $=-\sqrt{15}+\sqrt{21}$, che danno le regole. Io non ho mai saputo scorgere assurdità veruna, nè la menoma ombra tampoco di mistero nel provenire dalla moltiplica di due quantità immaginarie una quantità reale. La quantità reale negativa $-a$ diventa ella quantità immaginaria, affiggendole il concetto incompatibile di quadrato, con affiggerle il segno radicale, o segnare $\sqrt{-a}$. Il moltiplicare $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-a}$, o l'elevare $\sqrt{-a}$ a quadrato altro poi non è, nè vuol dire, che ritogliere da $\sqrt{-a}$ l'affissole segno $\sqrt{\ }$, e da $-a$ rimovere il ripugnante attaccatole concetto di quadrato: e che altro pertanto può, e dèe riuscirne, fuorchè quella stessa stessissima negativa quantità, ma reale, $-a$, che prima di ogni mentale assurda operazione si aveva? E poichè la moltiplica di due immaginarie quantità qualunque, $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$, risolvesi nella moltiplica di $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, o sia nel quadrato di $\sqrt{-1}$, che per la metafisica spiegazione, cui di dar vengo, è $=-1$; perciò tanto è lungi, che a me si presenti alcun paradosso nella equazione $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$, che a tutta limpidezza anzi mi splende la verità, la ragione di essa, il modo del ritornarsi dall'immaginario al reale. Cardano e Bombelli non ritrovarono di che stupire, e menar romore di fastidioso arcano nel prodotto di real quantità per moltiplica di due quantità immaginarie, e lo usò il primo, ne stese il precetto il secondo senza esprimere, o lasciar traspirare il più leggiero senso di maraviglia: senza dubbio, perchè meglio di molti analisti moderni penetrarono la metafisica in sè semplice di esso prodotto. Per ciò, che spetta a Bombelli in particolare, l'ordine medesimo, ed il modo da lui tenuto nel denominare, e precettare, l'incominciare vo' dire dalle quantità immaginarie della specie $\pm\sqrt{-a^2}$, denominandole relativamente alla forma di riduzione $\pm a\sqrt{-1}$, ed il proceder quinci a quelle della specie $\pm\sqrt{-a}$, denominandole del pari relativamente alla risoluzione $\pm\sqrt{-1}\sqrt{a}$: tutto ciò porge argomento a credere, che il primo filo, a cui si appigliò, si fu la metafisica evidenza di $(\sqrt{-1})^2 = -1$, e di tal filo seguendo la retta via si condusse sicuro nella sua dottrina.

Piantate pertanto le regole pella moltiplica, con passo franco si estende egli Bombelli per ogni altro modo di operare su radici immaginarie, ad esse trasportando quanti artificj mai si usano, e si usavan già, nel calcolo delle radici reali. E siccome l'oggetto, ed il motivo della disquisizione sua erano le radici immaginarie universali cubiche, nelle quali degenera la formola tartagliana nel caso di sopra esposto; così di sì fatte immaginarie radici si occupa massimamente, loro con grande copia di esempj applicando qualunque operazione di calcolo, la moltiplica, la divisione, la riduzion di somma, o di sottrazione, l'elevamento a potenza, l'effettiva estrazion di radice. Di tali operazioni i molti esempj raccolgo io in formole generali così:

1.° $\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})}\times\sqrt[3]{(g+\sqrt{-b})}=\sqrt[3]{(fg+g\sqrt{-a}+f\sqrt{-b}-\sqrt{ab})}$

$$\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})}\times\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})}=\sqrt[3]{(f^2-a+2f\sqrt{-a})}$$

$$\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})}\times\sqrt[3]{(g-\sqrt{-b})}=\sqrt[3]{(fg+g\sqrt{-a}-f\sqrt{-b}+\sqrt{ab})}$$

$$\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})}\times\sqrt[3]{(f-\sqrt{-a})}=\sqrt[3]{(f^2+a)}.$$

Quinci $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q+\sqrt{-\left(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q-\sqrt{-\left(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2\right)}\right)}$
$=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}q^2+\left(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2\right)\right)}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}=\frac{1}{3}p.$

2.ª $\dfrac{m}{\sqrt[3]{(f \pm \sqrt{-a})}} = \sqrt[3]{\dfrac{m^3}{f \pm \sqrt{-a}}} = \sqrt[3]{\dfrac{m^3\,(f \mp \sqrt{-a})}{(f \pm \sqrt{-a})(f \mp \sqrt{-a})}} = \sqrt[3]{\dfrac{m^3(f \mp \sqrt{-a})}{f^2 + a}}$

Perciò $\dfrac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{-(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)})}} = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{-(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2)})}$.

$$\frac{m}{\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})} + \sqrt[3]{(g \pm \sqrt{-b})}} =$$

$$\frac{m\left(\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})^2} - \sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})(g \pm \sqrt{-b})} + \sqrt[3]{(g \pm \sqrt{-b})^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})} + \sqrt[3]{(g \pm \sqrt{-b})}\right)\left(\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})^2} - \sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})(g \pm \sqrt{-b})} + \sqrt[3]{(g \pm \sqrt{-b})^2}\right)}$$

$$= \frac{m\left(\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})^2} - \sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})(g \pm \sqrt{-b})} + \sqrt[3]{(g \pm \sqrt{-b})^2}\right)}{f + \sqrt{-a} + g \pm \sqrt{b}}.$$

3.ª $\sqrt[3]{(n^3 f + \sqrt{-n^6 a})} \pm \sqrt[3]{(f + \sqrt{-a})} = \sqrt[3]{((n \pm 1)^3 f + \sqrt{-a(n \pm 1)^6})}$

$\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})} \pm \sqrt[3]{(g+\sqrt{-b})} = \sqrt[3]{(g+\sqrt{-b})}\left(\sqrt[3]{\dfrac{f+\sqrt{-a}}{g+\sqrt{-b}}} \pm 1\right)$,

riesce questa riduzione utile, allora quando $\dfrac{f+\sqrt{-a}}{g+\sqrt{-b}}$ sia $= n$, cioè ad una quantità qualunque reale, e meglio se sia $= n^3$, vale dire ad un real cubo.

4.ª $\left(\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})} + \sqrt[3]{(f-\sqrt{-a})}\right)^3 = 2f + 3\sqrt{(f^2+a)} \times$
$\left(\sqrt[3]{(f+\sqrt{-a})} + \sqrt[3]{(f-\sqrt{-a})}\right)$.

Laonde $\left(\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q + \sqrt{-(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2)})} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q - \sqrt{-(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2)})}\right)^3$
$= q + d\left(\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q + \sqrt{-(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2)})} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q - \sqrt{-(\tfrac{1}{27}p^3 - \tfrac{1}{4}q^2)})}\right)$.

5.ª La quinta operazione è la effettiva estrazione della radice cubica segnata in $\sqrt[3]{(f \pm \sqrt{-a})}$: ella è questa l'operazione, alla quale Bombelli in tutto il suo specolamento su le immaginarie radici mirato avea. Si studiò di riuscirvi, e vi riuscì negli esempj di un caso, accomodando al binomio o reciso immaginario il suo metodo di già impiegato ad estrarre la radice cubica dal binomio e reciso reale: metodo su buoni principj piantato, ma nell'operare condotto a tentone, e non recato alla debita estensione possibile, siccome nel §. V del capo III del mio I.° volume feci dimostro. Vero è pertanto, che ad onta della somma differenza, anzi diametral contrarietà tra il reale e l'immaginario, l'estrazione della radice cubica non importa differenza d'artificio, ma, sia per i binomj, e recisi reali, sia per gli immaginarj, all'artificio medesimo si sottopone, ed alle medesime leggi. Per la qual cosa tutta si può qui trasferire la dottrina, che a rimedio dei difetti del metodo di Bombelli, a conseguimento spedito, e certo della radice cubica dei binomj, e recisi reali in tutti i casi di possibile estrazione spiegai nel citato luogo del volume mio primo. Io stesso ne farò il trasporto per risparmiare al Leggitore il fastidio dei convenevoli cangiamenti nelle specie letterali, e nei segni. Pongasi $\sqrt[3]{(f \pm \sqrt{-a})} = \left(\frac{1}{2} h \pm \sqrt{-l}\right) \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$, e ne verrà $f \pm \sqrt{-a} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8} h^3 \pm \frac{3}{4} h^2 \sqrt{-l} - \frac{3}{2} h l \mp l \sqrt{-l}\right)$; quinci $f = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8} h^3 - \frac{3}{2} h l\right)$; $\pm \sqrt{-a} = \frac{1}{n}\left(\pm \frac{3}{4} h^2 \mp l\right) \sqrt{-l}$; $f^2 - (\pm \sqrt{-a})^2 = f^2 + a = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{4} h^2 + l\right)^3$, e $\sqrt[3]{n^2 (f^2 + a)} = \frac{1}{4} h^2 + l$. Se $f^2 + a$ sia da sè numero cubico, si prenderà $n = 1$, altrimenti si piglierà per n il minimo numero valevole a render $n^2(f^2 + a)$ perfetto cubo, e se altro numero non trovisi, che serva, servirà evidentemente sempre $n^2 = (f^2 + a)^2$. Renduto perfetto cubo il prodotto $n^2 (f^2 + a)$, sarà $\sqrt[3]{n^2 (f^2 + a)}$ quantità razionale: la si chiami K, e conseguentemente sarà $l = K - \frac{1}{4} h^2$, sostituito il qual valore di l nell'equazione $f = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{8} h^3 - \frac{3}{2} h l\right)$, ne risulta $h^3 - 3 K h - 2 n f = 0$.

Questa equazione è quella, che ci fa sapere, se l'estrazione sia possibile, od impossibile, e che, essendo possibile, ci fornisce il modo di adempierla. La quantità h debbe essere razionale; poichè altrimenti elevando al cubo $\left(\frac{1}{2}h \pm \sqrt{-l}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{n}}$, ne nascerebbe un radical reale, che non è in $f \pm \sqrt{-a}$. Dunque l'estrazione della radice cubica da $f \pm \sqrt{-a}$ sarà possibile, e si effettuerà sciogliendo l'equazione $h^3 - 3Kh - 2nf = 0$, se questa abbia radice razionale; altrimenti, cioè non avendo essa equazione radice razionale, l'estrazione antidetta non sarà possibile, e si potrà, si dovrà pronunciare non ammetter $f \pm \sqrt{-a}$ radice cubica, per non essere cubo. Supponendo l'estrazione possibile, e trovato supponendo il valor razionale di h, sarà

$$\sqrt[3]{(f \pm \sqrt{-a})} = \left(\frac{1}{2}h \pm \sqrt{-\left(K - \frac{1}{4}h^2\right)}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{n}}.$$

Esempio di Bombelli: $\sqrt[3]{(52 \pm \sqrt{-2209})} \ldots \sqrt[3]{n^2(f^2+a)} = \sqrt[3]{n^2(52^2+2209)} = \sqrt[3]{n^2 4913} = \sqrt[3]{n^2 17^3} = \sqrt[3]{1^2 . 17^3} = 17 \ldots$ $h^3 - 3 \times 17h - 2 \times 52 = 0$, $h = 8$, poichè $8^3 - 3 \times 17 \times 8 - 2 \times 52 = 512 - 408 - 114 = 0$, dunque $\sqrt[3]{(52 \pm \sqrt{-2209})} = 4 \pm \sqrt{-1}$.

Esempio trascendente il metodo di Bombelli: $\sqrt[3]{(54 \pm 35\sqrt{-3})} \ldots \sqrt[3]{n^2(f^2+a)} = \sqrt[3]{n^2(54^2 + 35^2 \times 3)} = \sqrt[3]{n^2 6591} = \sqrt[3]{3^2 \times 6591} = \sqrt[3]{59319} = 39 \ldots h^3 - 3 \times 39h - 2 \times 3 \times 54 = 0$, $h = 12$ divisor razionale dell'ultimo termine $2 \times 3 \times 54$. E di fatto $12^3 - 3 \times 39 \times 12 - 2 \times 3 \times 54 = 1728 - 1404 - 324 = 0$. Dunque $\sqrt[3]{(54 \pm 35\sqrt{-3})} = (6 \pm \sqrt{-3})\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Il difetto cioè di estensione del metodo di Bombelli si è il limitarsi al caso di $n = 1$: le due equazioni da lui maneggiate sono $l = \sqrt[3]{(f^2 + a)} - \frac{1}{4}h^2$; $\frac{1}{8}h^3 - \frac{3}{2}hl = f$. Fu di ciò pago Bombelli, perchè bastava per quei binomj, e recisi immaginarj, che erano lo scopo suo, quelli, che la risoluzione tartagliana cava dall'equazione $x^3 - px - q = 0$ supponendo $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{22} p^3$, e sono della forma $\sqrt[3]{(\frac{1}{2} q \pm \sqrt{-(\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2)})}$. Di vero $\sqrt[3]{(f^2 + a)} = \sqrt[3]{(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2)} = \sqrt[3]{\frac{1}{27} p^3} = \frac{1}{3} p$, senza che bisogno vi sia d'introdurre un numero n a render $f^2 + a$ perfetto cubo. Mancando Bombelli della teoría dei divisori dell'ultimo termine q, onde trovare a dirittura la radice razionale dell'equazione $x^3 - px - q = 0$, era pe' quei tempi far molto il trarla dall'immaginario binomio, ed immaginario reciso componenti la tartagliana formola per mezzo delle equazioni $l = \frac{1}{3} p - \frac{1}{4} h^2$; $\frac{1}{8} h^3 - \frac{3}{2} h l = \frac{1}{2} q$, ancorchè il modo di trarre da queste i valori di h, l fosse a tentone, fingendo cioè il valor di h, e quindi per la prima equazione deducendo quello di l, e poi provando se soddisfacevan essi alla equazion seconda, e così reiterando gli infingimenti, le deduzioni, le prove sino ad averne buon esito. Di questa guisa esempigrazia Bombelli dalla espression $x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$, che dà il tartagliano scioglimento dell' equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$, trasse $x = 4$. Poichè $\frac{1}{3} p = 5$, $\frac{1}{2} q = 2$, e quinci le due equazioni ausiliarie, $l = 5 - \frac{1}{4} h^2$; $\frac{1}{8} h^3 - \frac{3}{2} h l = 2$, o sia $h^3 - 12 h l = 16$. Dalla prima tosto si vede dover essere $\frac{1}{4} h^2 < 5$, $h^2 < 20$, per conseguenza non poter h essere che uno di questi quattro numeri 1, 2, 3, 4, e facendo le prove trovasi soddisfare $h = 4$, dando $l = 5 - \frac{16}{4} = 1$, $h^3 - 12 h l = 64 - 48 = 16$. Dunque $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} = \frac{1}{2} h + \sqrt{-l} = 2 + \sqrt{-1}$, e

$\sqrt[3]{(2-\sqrt{-121})}=\frac{1}{2}h-\sqrt{-l}=2-\sqrt{-1}$; onde $x=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-121})}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-121})}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$. Ma ora, che per un pieno lume su la composizione delle equazioni si sa trovare la radice razionale dell' equazione $x^3-px-q=20$ direttamente per mezzo dei divisori razionali dell'ultimo termine q, essendo essa necessariamente della schiera di questi, torna a mero allungamento inutile di cammino lo sciogliere prima l'equazione nel modo tartagliano, poi estrarre dell'immaginario binomio, e dell'immaginario reciso le radici cubiche, per adempiere la quale estrazione, non a tentone, ma con regola certa, si risale d'onde si partì, montando all'equazione $h^3-ph-q=0$ identica con la $x^3-px-q=0$, e si è costretto fare, ciò che immediatamente far si poteva, di cercar vale dire per mezzo dei divisori razionali di q il valor razionale di h, uno stesso che il valor di x, con il frutto unicamente di aver questo per l'esposto circuito spezzato in $\frac{1}{2}h+\sqrt{-l}+\frac{1}{2}h-\sqrt{-l}$, o sia $\frac{1}{2}x+\sqrt{-l}+\frac{1}{2}x-\sqrt{-l}$, in vece di averlo a dirittura nel suo intero. Questo giro di calcolo può tutto al più ritenere l'utilità di dar a divedere col fatto come il tartagliano composto di due membri immaginarj, ad onta della immaginaria apparenza, inchiude in fondo una quantità reale: verità, di cui io in altro luogo recherò dimostrazione specolativa, e generale.

Fuori delle radici cubiche di binomio e di reciso immaginario addomandate per la risoluzione tartagliana dell' equazione $x^3-px-q=0$, altre ben molte ne possono in analisi essere richieste per altri problemi, per risoluzioni naturali ed uniche di altre equazioni: così la risoluzione dell'equazione $x^6 + A x^3 + B = 0$, che necessariamente è $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} A^2 - B \right)}\right)}$ esigerà ad ultimo suo compimento la estrazione della radice cubica da un binomio e da un reciso immaginario nel caso di $\frac{1}{4} A^2 < B$. Paragonando l'immaginario $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} A \pm \sqrt{-\left(B - \frac{1}{4} A^2 \right)}\right)}$ al generale $\sqrt[3]{(f \pm \sqrt{-a})}$ ne viene $\sqrt[3]{n^2 (f^2 + a)} = \sqrt[3]{n^2 B}$; e più frequentemente del caso $n = 1$, per rendere $n^2 B$ perfetto cubo, accaderà il caso di dover pigliare ad n un numero dall'unità diverso, e di essere $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} A \pm \sqrt{-\left(B - \frac{1}{4} A^2 \right)}\right)} = \left(\frac{1}{2} h \pm \sqrt{-l} \right) \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$.

Il Wallis riprodusse siccome parto di suo ingegno e studio l'estrazione della radice cubica dai binomj, e recisi immaginarj; e si fece gloria di aver vinto il mistero della formola tartagliana, costrignendola a svestirsi del manto immaginario, e dar fuori la real quantità nel fondo celata. Senza inserir menzione veruna di Bombelli, aggiunse unicamente, che il Collins da alcuni anni scritto gli aveva, che qualche cosa di simile *tale quid* era stato scoperto da un matematico del Belgio Kinkhuysen di nome. Wallis per il suo assunto di storico era in particolar debito di pieno lume della estesa dottrina di tutte le parti del calcolo degli immaginarj insegnata dal Bombelli. Il vanto del Wallis dimostra almeno, che era caduta in obblivione pel comune degli analisti. Fu il calcolo degli immaginarj un'arbore analitico, che, allo spuntare ammirato, restò in breve dimentico sul suo suolo, e che non si ripigliò a coltivare di proposito che in questi ultimi tempi, ne' quali si può anzi dire essersi a lusso trapassato nell'uso loro.

CAPO VI.

Analisi di forma finita delle equazioni di 4.° grado per quelle di 3.°. Ed analisi di approssimazione indefinita rispetto alle radici irrazionali delle une, e delle altre.

PARTE I.

Analisi in finita forma delle equazioni di 4.° grado per quelle di 3.°.

§. I. Scrisse Cardano nel capo XVIII dell'*Arte magna* della *Aritmetica*, che conseguito lo scioglimento delle equazioni cubiche, l'arte analitica ne avea a sufficienza, perchè sino al cubo vi è gradazione in natura, essendovi linee, superficie, e corpi, e corrispondendo le linee alla cosa incognita x, le superficie al censo x^2, i corpi al cubo x^3; ciò che si aggiugne essere a lussureggiamento, e quasi voluttà dell' ingegno, non ad effetto di pratica utilità; e le equazioni derivative per fine, le quali sopra il cubo ascendono, non stare per loro medesime, ma per accidente, cioè, per quanto intendo io, non avere essenza da quella della origin loro diversa, ma esserne accidenti. Vero si è non esservi in geometría che linee, superficie, e corpi; ma falso, che questi tre gradi di geometrica grandezza limitino l'analisi a tre gradi, i quali ordinatamente ad essi corrispondano. Le linee anche sole inducono equazioni di qualunque grado il più alto: non vi ha, che la linea retta, la cui natura si esprima per una equazione di primo grado; le linee curve giusta la diversa curvità loro addomandano equazioni di secondo grado, come le sezioni coniche, di terzo, di quarto, di quinto, di qual più elevato grado immaginare si possa. Cardano non era a portata di conoscer ciò; ma ben era al dovere di riflettere, che equazioni di qualunque grado presentar possono a sciogliere i problemi su le quantità continuamente proporzionali.

§. II. A queste infatti spettava il primo problema, che fu proposto, di equazione di 4.° grado; e Messer Zuanne de Tonini da Coi si fu, che a Tartaglia proposelo il giorno 15 di Dicembre dell'anno 1536, come narra Tartaglia stesso sotto il quesito XXVI del libro IX dei quesiti. Ecco il problema tal quale Tartaglia lo riferisce: *Sono tre, che hanno comprato lire 20 di carne, et tante ne ha comprate uno di loro, che moltiplicato tal numero de lire in se medesimo, tal produtto è eguale alla moltiplicazione delle lire, che hanno comprato gli altri dui, cioè quelle dell'uno fia quelle dell'altro, et moltiplicate anchor le due menor quantità de lire, l'una fia l'altra, fanno precisamente 8. Se adimanda la quantità delle lire della carne, che comprò cadauno per se, il qual quesito non uol dire altro in sostantia, che far de 20 tre parti continue proportionale, in tal specie di proportione, che moltiplicando le due menore, l'una fia l'altra, facciano 8.* Rappresentando per $z : zy : zy^2$ tre qualunque continue proporzionali l'esposto problema viene espresso per le due equazioni $z + zy + zy^2 = 20$; $z \times zy = z^2 y = 8$; e recandolo a generalità, per $z + zy + zy^2 = a$; $z \times zy = h$. Da questa seconda equazione si ha tostamente $y = \frac{h}{z^2}$, il qual valore di y sostituito nella prima produce $z^4 + hz^2 + h^2 = az^3$. Rispose Tartaglia al de Tonini, che non solamente aveva per possibile lo scioglimento di tal suo quesito, ma che spedite alcune sue faccende sperava trovarvi regola generale, come fatto avea ad altri suoi quesiti menanti ad equazioni cubiche. Non leggo, che Tartaglia conducesse ad effetto la sua speranza, ed al de Tonini mandasse la risoluzione del quesito. Ciò dovette a costui bastare per inferirne, che fosse di estrema difficoltà, e ad ogni altro insolubile; e dilettandosi di mettere a prova i matematici ingegni, e crear loro imbarazzo, andò proponendolo a varj in varj luoghi, cangiando soltanto i numeri. Cardano nel capo XXXIX dell'*Arte magna*, Reg. II, quest. IV, esposta la quistione con il numero 10 per somma delle tre continue proporzionali, e 6 per il prodotto delle due minori, scrive: *Hanc proponebat Joannes Colla*, così alterando egli l'aggiunto da Coi; e soggiugne, che la quistione era da colui vantata per insolubile, che egli al contrario la sosteneva solubile, ma che ne ignorava il modo, sin che Lodovico Ferrari suo scolare, da lui pregato a studiarvi sopra, ritrovollo, *et dicebat Joannes solui non posse, ego uero dicebam eam posse solui, modum tamen ignorabam, donec Ferrarius eum invenit*.

§. III. A Lodovico Ferrari pertanto, bolognese di nascita, debbesi la gloria d'inventore della risoluzione delle equazioni di 4.° grado. Nel molto, che Cardano espone rispetto ad essa vi si scorge taluno de' suoi ritrovati, che egli vi applicò ad arricchirla; ma il fondo è del Ferrari. Quanto al metodo da lui tenuto, bella si è primieramente l'industria usata per avere in vece dell'equazione $z^4 - az^2 + hz^2 + h^2 = 0$ contenente il cubo z^3 una equazione, che di esso fosse priva. In luogo di cercare la prima delle tre continue proporzionali z si volse a cercare immediatamente la seconda zy, la quale con un semplice simbolo si chiami x. Per la condizione $zx = h$, ne segue $z = \frac{h}{x}$; ed essendo $\frac{h}{x}$, x le espressioni della prima, e della seconda delle tre continue proporzionali, ne proviene ad espressione della terza $\frac{x^3}{h}$, e quinci per la condizion prima del problema $\frac{h}{x} + x + \frac{x^3}{h} = a$, onde, riducendo, si ottiene $x^4 + hx^2 + h^2 = ahx$. A sciogliere questa equazione, ed in universale qualunque altra simile generalmente rappresentata per $x^4 + nx^2 + q = px$, due furono gli artificj, che il Ferrari escogitò, ambidue fondati sul teorema: Che a passare dal quadrato del binomio $a + b$ al quadrato del trinomio $a + b + c$ è mestieri aggiugnere $2ac + 2bc + c^2$, vale dire che $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2ac + 2bc + c^2$. Cardano pone sotto gli occhi la verità di questo teorema con figura geometrica nel rettangolo $AGHK$ costrutto sopra la retta AG composta delle tre parti AB, BC, CG (*Fig* 3.ª). Il mio Leggitore non abbisogna, che io mi dilunghi nella spiegazione; e senza indugio procedo ad esibire di generali algebraiche specie vestiti i due artificj.

Artificio 1.° Dall'una e dall'altra parte dell'equazione $x^4 + nx^2 + q = px$ si aggiunga $(2\sqrt{q} - n)x^2$, e si avrà $x^4 + 2x^2\sqrt{q} + q = px + (2\sqrt{q} - n)x^2$: il primo membro è il quadrato del binomio $x^2 + \sqrt{q}$, ma il secondo membro non è quadrato; per lo che non può estrarsene la radice. Ad ottenere pertanto di poter estrarre la radice dall'uno, e dall'altro si renda il primo membro quadrato del trinomio $x^2 + \sqrt{q} + t$, intendendo per t una quantità incognita sussidiaria, da determinarsi poi per la condizione di essere idonea a render quadrato il secondo membro. Per il teorema fondamentale si avrà $x^4 + 2x^2\sqrt{q} + q + 2tx^2 +$

$2t\sqrt{q}+t^2=(2t+2\sqrt{q}-n)x^2+px+2t\sqrt{q}+t^2$. Ad essere questo secondo membro un quadrato è mestieri, che il doppio prodotto $2\sqrt{(2t+2\sqrt{q}-n)}\times\sqrt{(t^2+2t\sqrt{q})}$ sia $=p$, ovvero $4(2t+2\sqrt{q}-n)(t^2+2t\sqrt{q})=p^2$. Fatte le moltipliche ed ordinati i termini, risulta l'equazion cubica

$$t^3+\left(3\sqrt{q}-\tfrac{1}{2}n\right)t^2+(2q-n\sqrt{q})t=\tfrac{1}{8}p^2.$$

Questa è la equazione, per cui conviene determinar t, e per cui si avrà tale, qual si desidera, atto a rendere quadrato il secondo membro dalla equazione di 4.° grado: così la risoluzione di essa è ridotta alla risoluzione di una equazione di 3.°; e supponendo ritrovato t, che renda $(2t+2\sqrt{q}-n)x^2+px+t^2+2t\sqrt{q}=Ax^2+2ABx+B^2$, sarà $x^2+\sqrt{q}+t=\pm(Ax+B)$, ed in fine

$$x=\pm\tfrac{1}{2}A\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}A^2\pm B-t-\sqrt{q}\right)}.$$

Artificio 2.° Da ambe le parti dell'equazione $x^4+nx^2+q=px$ aggiungasi $\frac{1}{4}n^2-q$, e ne proverrà $x^4+nx^2+\frac{1}{4}n^2=px+\frac{1}{4}n^2-q$; indi proseguendo, come nel primo artificio, con aggiugnere all'uno, ed all'altro membro di questa $2tx^2+nt+t^2$, si conseguirà per determinar t, l'equazione

$$t^3+nt^2+\left(\tfrac{1}{4}n^2-q\right)t=\tfrac{1}{8}p^2,$$

la quale equazione determinatrice di t è molto più semplice della prima. E supponendo determinato t, e per esso renduto $2tx^2+px+nt+t^2+\frac{1}{4}n^2-q=C^2x^2+2CDx+D^2$, sarà $x^2+\frac{1}{2}n+t=\pm(Cx+D)$, ed in ultimo

$$x=\pm\tfrac{1}{2}C\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}C^2\pm D-\tfrac{1}{2}n-t\right)}.$$

Il primo artificio nel suo primo passo cangia il coefficiente n di x^2, lasciando intatto il termine noto q; ed il secondo a rovescio lascia intatto il coefficiente n di x^2, cangiando il termine omogeneo q.

L'artificio 2.° si applica senza bisogno di modificazione veruna all'equazione $x^4 - n x^2 + q = p x$; e per applicarvi il 1.° basta in luogo di $(2\sqrt{q} - n) x^2$ aggiugnere dall'una e dall'altra parte $(2\sqrt{q} + n) x^2$.

Si accomoda l'artificio 2.° all'equazione $x^4 \mp n x^2 - q = p x$ cangiando l'aggiunta $\frac{1}{4} n^2 - q$ in $\frac{1}{4} n^2 + q$.

È indifferente per l'uso degli artificj, che l'equazione di 4.° grado abbia $p x$ nel primo, o nel secondo membro, od in nostro stile, che abbia $+ p x$, ovvero $- p x$: ciò si comprende dal tenore degli artificj, e lo dimostrano agli occhi le due equazioni determinatrici di t con non contenere di p che il quadrato p^2, quadrato ugualmente di $+ p$, e di $- p$: onde l'artificio primo ai casi tutti dell'equazione $x^4 \mp n x^2 \mp p x + q = 0$ si estende; e l'artificio secondo con tutti i casi di questa i casi insieme tutti dell'equazione $x^4 \mp n x^2 \mp p x - q = 0$ abbraccia, o sia, congiungendo, i casi tutti dell'equazione $x^4 \mp n x^2 \mp p x \mp q = 0$. Tutti questi casi enumerati sono da Cardano, tranne il solo $x^4 + n x^2 + p x + q = 0$, per la ragione più volte detta di non sapersi in que' tempi concepire equazione che di quantità a quantità.

§. IV. Nè l'enumerazione di Cardano si limita ai casi dell'equazione $x^4 \mp n x^2 \mp p x \mp q = 0$, che, ommesso il caso notato, sono sette; ma una tavola ei stende, nella quale oltre a questi ed a quelli dell'equazione $x^4 \mp p x \mp q = 0$, con simile ommission sempre, comprende i casi dell'equazione $x^4 \mp m x^3 \mp q = 0$, e quelli dell'equazione ancora $x^4 \mp m x^3 \mp n x^2 \mp q = 0$, scrivendo sotto la tavola: *Oportet reducere capitula* (aequationes), *in quibus ingreditur cubus* (x^3) *ad capitula, in quibus ingreditur res* (x). Si avvidero bene Ferrari, e Cardano, che se nel problema di Giovanni de Tonini da Coi la industria della posizione avea prodotto il felice successo di sfuggire il cubo, non era da promettersi comunemente così, e che il più anzi delle volte, ad onta di qualunque industria adoperata nelle posizioni, la equazione ultima del problema presentata sarebbesi fornita del secondo termine contenente l'x^3, e che perciò facea mestieri di trovar modo a sciogliere anche equazioni di 4.° grado sì fatte. L'esempio delle equazioni di 3.° grado di secondo termine dotate allo scioglimento sottomesse di quelle del secondo termine mancanti con trasformarle in queste, suggerire dovette di trasformar similmente le equazioni di 4.° grado fornite del secondo termine in altre di esso prive, e così alla risoluzione già ottenuta di queste assoggettarle. Nella quistione 7.ª proponendo Cardano di trovare un numero, che moltiplicato nella sua radice cubica più 6 produca 64, supposto industriosamente il cercato numero $= x^3$, e quinci conseguita l'equazione $x^4 + 6x^3 = 64$, a trasformarla in altra mancante di x^3 valesi della sostituzione $x = \frac{-\sqrt[3]{64}}{y} = \frac{-4}{y}$, mercè la quale proviene $y^4 + 6y = 4$. A trasformare in universale l'equazione $x^4 \pm mx^3 \pm q = 0$, regola si è di fingere $x = \frac{\sqrt[3]{\pm q}}{y}$, risultando per la sostituzione $y^4 \pm my \pm \sqrt[3]{q} = 0$: e non è egli questo che un particolar uso di una ingegnosa trasformazione a qualunque altezza e combinazione di due diversi gradi stendentesi, da Cardano insegnata nel capo VII dell'*Arte magna*, e che io nel seguente Capo riserbomi a spiegare. Poco dissimile è l'artificio, con cui nel luogo stesso tramuta $x^4 + nx^2 + q = mx^3$ in $y^4 + ny^2 + q = my\sqrt{q}$, surrogando $\frac{\sqrt{q}}{y} = x$. Surrogando così generalmente nell'equazione $x^4 \pm mx^3 \pm nx^2 \pm q = 0$, ne uscirà $q \pm my\sqrt{q} \pm ny^2 \pm y^4 = 0$.

§. V. Ma è egli poi vero, che a sciogliere le equazioni di 4.° grado di secondo termine fornite necessario sia, giusta il detto di Cardano, il dispogliarle di esso, e in altre trasmutarle, che in luogo di x^2 il semplice x contengano? Non già; e Cardano stesso con quell'*oportet* o non intese una vera stretta necessità, o la smentì egli, meglio illuminato, col fatto. Poichè nella quistione 11.ª simile alla 7.ª, della quale poco fa ho detto, avendo a sciogliere l'equazione $x^4 - 3x^2 = 64$, avverte potersi usare la trasmutazione stessa nella 7.ª usata; ma è l'una e l'altra potersi sciogliere con facilità direttamente, senza trasmutazione veruna; ed affinchè l'algebrista sia dell'uno, e dell'altro modo istruito, avendo sciolta con il primo la quistione 7.ª prende a sciogliere la 11.ª con il secondo. È però questo uno dei luoghi di Cardano, nella intelligenza de' quali ho avuto a provare maggiore difficoltà e pena; e ciò per tre cagioni, e per gli oscuri ed equivoci modi di dire, e per gli errori ne' numeri più essenziali del calcolo, e per il cammino, che vi tiene, inverso di quello che noi terremmo, e da lui tenuto nella soluzione delle equazioni di x^2 mancanti. Incomincia egli Cardano dal rendere nell'equazione $x^4 - 3x^2 = 64$ quadrato di un binomio il secondo monomio membro 64, con aggiugnergli i due termini $2tx^2 + \frac{t^2 x^4}{64}$, i quali parimenti al primo membro aggiunti, risulta $x^4 - 3x^2 + 2tx^2 + \frac{t^2 x^4}{64} = 64 + 2tx^2 + \frac{t^2 x^4}{64} = \left(8 + \frac{tx^2}{8}\right)^2$. Indi volgesi a considerare ciò che richiedesi, perchè quadrato pure divenga il primo membro, ed è, che sia $2\sqrt{\left(1 + \frac{t^2}{64}\right)} \times \sqrt{2tx^2} = 3x$, ovvero $\left(1 + \frac{t^2}{64}\right) \times 2tx^2 = \frac{9}{4}x^2$, conseguentemente $\left(1 + \frac{t^2}{64}\right) \times 2t = \frac{9}{4}$, ed ordinando $t^3 + 64t = 72$, la qual è l'equazione determinatrice di t. Trasferendo questo calcolo dal particolare al generale su l'equazione $x^4 \pm m x^3 = q$, sarà $x^4 \pm m x^3 + 2 t x^2 + \frac{t^2 x^4}{q} = q + 2 t x^2 + \frac{t^2 x^4}{q} = \left(\sqrt{q} + \frac{t x^2}{\sqrt{q}}\right)^2$; ed a far quadrato il primo membro, $\left(1 + \frac{t^2}{q}\right) \times 2 t = \frac{1}{4} m^2$, e però la equazione determinatrice di t

$$t^3 + q t - \frac{1}{8} m^2 q = 0.$$

E supposto determinato il valore di t, per il quale diventi $x^4 \pm m x^3 + 2 t x^2 + \frac{t^2 x^4}{q} = (F x^2 \pm G x)^2$, si avrà $F x^2 \pm G x = \sqrt{q} + \frac{t x^2}{\sqrt{q}}$, e quinci

$$x = \frac{\sqrt{q}}{2(F\sqrt{q} - t)}\left(\frac{\mp G}{2} \pm \sqrt{\left(G^2 + 4(F\sqrt{q} - t)\right)}\right).$$

Siccome a radice di q si è preso $\sqrt{q}$, così può prendersi $-\sqrt{q}$, e ne risulteranno due altri valori di x.

§. VI. Ai modi di soluzione sin qui addotti, che Cardano insegna nel capo XXXIX sotto il titolo della regola, di cui dà lode al Ferrari, altri esso Cardano premessi n'avea nel capo XXVI sotto il nome di regole maggiori, cioè a quelle per le equazioni cubiche superiori, ma affatto singolari. E sono

1.ª L'equazione $x^4 = n x^2 \pm p x + q$, se sia $\frac{p}{2n} = \sqrt{\frac{q}{n}}$, ha per radici $x = \frac{1}{2}\sqrt{n} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} n \pm \frac{p}{2\sqrt{n}}\right)}$. Poichè $x^2 = \sqrt{(n x^2 \pm p x + q)} = \sqrt{\left(n x^2 \pm p x + \frac{p^2}{4n}\right)} = x\sqrt{n} \pm \frac{p}{2\sqrt{n}}$, e quinci $x = \frac{1}{2}\sqrt{n} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} n \pm \frac{p}{2\sqrt{n}}\right)}$. E potendosi in luogo di $\sqrt{n}$ prendere eziandio $-\sqrt{n}$, i valori di x ascenderanno a quattro.

2.ª Se nell'equazione $x^4 + n x^2 + p x = m x^3 + q$ sia $p = m$, $\frac{1}{2} p = \sqrt{q}$, $q = n + 2$, cioè se l'equazione sia della struttura $x^4 + \left(\frac{1}{4} m^2 - 2\right) x^2 + m x = m x^3 + \frac{1}{4} m^2$, sarà $x = \frac{1}{4} m \pm$

$\sqrt{\left(\frac{1}{16}m^2+1\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+1\right)}\right)}$. Si disponga l'equazione così: $x^4-mx^3+\frac{1}{4}m^2x^2-2x^2+mx=\frac{1}{4}m^2$; ed è facile vedere che il primo membro non manca, che del termine $+1$ ad essere perfetto quadrato del trinomio $x^2-\frac{1}{2}mx-1$: aggiunto dunque ad ambi i membri $+1$, ed estraendo le radici, sarà $x^2-\frac{1}{2}mx-1=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+1\right)}$; e risolvendo questa equazione di secondo grado, ne verrà $x=\frac{1}{4}m\pm\sqrt{\left(\frac{1}{16}m^2+1\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+1\right)}\right)}$.

3.ª L'equazione $x^4+\frac{6a^2}{c+1}x^2+\frac{a^4}{c+1}=\frac{a(c+4)}{c+1}x^3+\frac{4a^3}{c+1}x$ ha per radice $x=\frac{a}{1+\sqrt{c}}$. Se ne vedrà la verità sostituendo; e se amansi esempj, eccone due nelle equazioni $x^4+24x^2+144=8x^3+96x$; $x^4+6x^2+4=3\frac{1}{2}x^3+8x$. Confrontando con la forma generale la prima, si ha $144=\frac{a^4}{c+1}$, $96=\frac{4a^3}{c+1}$, perciò $\frac{144}{96}=\frac{3}{2}=\frac{a}{4}$, onde $a=6$, e quinci $\frac{4\times6^3}{c+1}=96$, $\frac{6^3}{c+1}=24$, $6^2=4(c+1)$, $36=4c+4$, $32=4c$, $8=c$, conseguentemente $x=\frac{6}{1+\sqrt{8}}=\frac{6}{1+2}=2$. Con un calcolo simile si troverà, rispetto alla seconda, $a=2$, $c=3$, $x=\frac{2}{1+\sqrt{3}}$.

Ma e come fabbricò Cardano tali forme di equazioni di 4.° grado e determinonne le radici? Ponendo un dato problema numerico in equazione, con l'avvertenza di segnare soltanto, senza effettuare le operazioni su i numeri, giusta la bella regola del Modo, che al fine del capo III del I. volume ho descritta; sciogliendo indi il problema per altra via di teoremi, e di investigamenti indiretti; ritornando in fine su la equazione, a considerare i rapporti dei coefficienti tra di loro, e di essi con l'espressione del numero solvente il problema per l'altra via trovato. Un esempio rischiarerà appieno la cosa. Debbasi dividere il numero 6 in due parti tali, che il cubo della minore, che chiamerò x, il quadrato della maggiore $6-x$, ed il prodotto di questa con 8 sieno in continua proporzione. Si vuole adunque $x^3 : (6-x)^2 : 8(6-x)$. Quindi ne segue $x^3 \times 8(6-x) = (6-x)^4$, ed eseguendo le elevazioni, ed ordinando, si ha $x^4 + \frac{6 \times 6^2}{8+1} x^2 + \frac{6^4}{8+1} = \frac{6(8+4)}{8+1} x^3 + \frac{4 \times 6^3}{8+1} x$. Si prenda altra via: esprimasi per $1 : h$ la ragione delle due parti di 6, anzi indeterminatamente di due numeri soddisfacenti alla condizione del proposto problema. Chiamato x il minore, ed istituita la proporzione $1 : h :: x : hx$, sarà questo il numero maggiore, e per la condizione assegnata dovrà essere $x^3 : (hx)^2 : 8hx$, conseguentemente $8hx^4 = (hx)^4 = h^4 x^4$, e però $8 = h^3$, $\sqrt[3]{8} = h$, cioè essendo il numero minore x, il maggiore debb'essere $x\sqrt[3]{8}$, e la ragione loro quella di $1 . \sqrt[3]{8}$. Ma nel caso delle due parti di 6 essendo la minore x, la maggiore è di necessità $6-x$; dunque $1 : \sqrt[3]{8} :: x : 6-x$, e per i teoremi su le proporzionali $1+\sqrt[3]{8} : 1 :: 6 : x$, e quinci $x = \frac{6}{1+\sqrt[3]{8}}$. Questa è dunque la radice dell' equazione $x^4 + \frac{6 \times 6^2}{8+1} x^2 + \frac{6^4}{8+1} = \frac{6(8+4)}{8+1} x^3 + \frac{4 \times 6^3}{8+1} x$. E sostituendo al numero 6 il simbolo general a, al numero 8 il simbolo c, sarà $x = \frac{a}{1+\sqrt[3]{c}}$ radice dell'equazione $x^4 + \frac{6a^2}{c+1} + \frac{a^4}{c+1} = \frac{a(c+4)}{c+1} x^3 + \frac{4a^3}{c+1} x$. Del resto, non voglio tralasciar d'osservare, che la equazione fondamentale $x^3 \times 8(6-x) = (6-x)^4$ è divisibile per $6-x$, per conseguenza eziandio la equazione di 4.° grado, in cui si svolge; e similmente la equazione letterale è divisibile per $a-x$. Sarebbe però rispetto all'esposto problema inutile il fare $6-x$, od in generale $a-x=o$, e trarne $x=a$, cioè la minor parte del numero a dato a dividere uguale ad esso intero. Dal che tutto apparisce essere il detto problema propiamente di terzo grado, e la sua genuina equazione $x-\frac{3a}{c+1}x^2+\frac{3a}{c+1}-\frac{a^3}{c+1}=o$, recata al 4.° grado dal fattore superfluo $a-x$, espellendo, e conservato nel calcolo. Ciò tuttavía non impedisce, che, distaccando essa equazione di 4.° grado dal trattato problema, non possa in relazione ad altri problemi avere ad utile divisore $a-x=o$, ed a vera radice solutrice dei problemi stessi $x=a$.

Non vi ha nell'*Arte magna* di Cardano equazione di 4.° grado fornita di tutti i cinque suoi termini, cui egli sciolga in generalità o senza supposizioni di particolari rapporti tra i coefficienti; e nella già citata tavola stesa sotto la regola di Lodovico Ferrari non comprende alcuna equazione quinomia. In altra però general tavola delle equazioni, e di secondo, e di terzo, e di quarto grado, che schiera nel capo XX dell'*Arte magna* dell'*Aritmetica*, alle classi delle equazioni di 4.° grado trinomie, e quadrinomie aggiugne la classe delle quinomie, e cinque ne espone, dicendo che conosciuta non n'era la soluzione, ma per le insegnate regole la si poteva conoscere, e da lui era ommessa per non essere soverchiamente prolisso in cosa sopra il bisogno, richiamando quella sua idea, che io ho confutata nell'ingresso di questo Capo. Ciò, che vi ha di vero, si è, che poco certamente volevaci a stendere alle equazioni quinomie gli artificj dal Ferrari inventati, e dal Cardano spiegati per risolvere le equazioni trinomie, e quadrinomie.

§. VII. Bombelli diede l'ultimo compimento alla risoluzione delle equazioni di 4.° grado, sciogliendo del pari le equazioni trinomie e quadrinomie, e quinomie, e tutti i casi di ciascheduna classe partitamente, con regola però uniforme, e costante, di modo, che le soluzioni tutte si concentrano nella soluzione dell'equazione quinomia $x^4 \pm m x^3 \pm n x^2 \pm p x \pm q = 0$. Si ritengano da una parte i soli termini $x^4 \pm m x^3$, e si portino all'altra gli altri con la conveniente mutazione de' segni, e sarà $x^4 \pm m x^3 = \mp n x^2 \mp p x \mp q$. Si accrescano ambedue i membri della quantità $\frac{1}{4} m^2 x^2 + 2 t x^2 \pm m t x + t^2$, facciasi cioè $x^4 \pm m x^3 + \frac{1}{4} m^2 x^2 + 2 t x^2 \pm m t x + t^2 = \left(\frac{1}{4} m^2 + 2 t \mp n \right) x^2 + \left(\pm m t \mp p \right) x + t^2 \mp q$. Il primo membro è già quadrato del trinomio $x^2 \pm \frac{1}{2} m x + t$. A rendere quadrato il secondo membro fa d'uopo, che sia $2 \sqrt{\left(\frac{1}{4} m^2 + 2 t \pm n \right)} \times \sqrt{(t^2 \mp q)} = \pm m t \mp p$, ovvero $\left(\frac{1}{4} m^2 + 2 t \mp n \right) \left(t^2 \mp q \right) = \frac{1}{4} \left(\pm m t \mp p \right)^2$, donde eseguite le moltipliche, si ricava a determinazione di t

$$t^3 \mp \frac{n}{2} t^2 + \left(\mp q + \frac{\pm m \times \mp p}{4} \right) t = \frac{1}{8} p^2 \pm q \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} m^2 \mp n \right).$$

Si vede la grande varietà, che questa equazione comprende giusta le varie combinazioni de' segni $+$ e $-$ dei quattro coefficienti m, n, p, q, come pure della mancanza di uno, o di due di loro. Onde non è maraviglia, che Bombelli impieghi cinquantasei pagine in trattare distintamente tante combinazioni, con ommettere però quelle di tutti i termini aggregati col segno più ad una parte, tenendosi anch'egli all'antico costume, e sistema di non concepir equazione, che di quantità a quantità.

Supposto determinato t, e renduto $\left(\frac{1}{4} m^2 + 2 t \mp n \right) x^2 + \left(\pm m t \mp p \right) x + t^2 \mp q = \left(H x + K \right)^2$, si avrà $x^2 \pm \frac{1}{2} m x + t = \pm \left(H x + K \right)$, e quindi

$$x = \frac{1}{2}\left(\pm H \mp \frac{1}{2} m\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\pm H \mp \frac{1}{2} m\right)^2 \pm K - t\right)}.$$

§. VIII. A ricchezza dell'analisi insegna anche Bombelli a trasmutare le equazioni, e semplifica il metodo di Cardano, cangiando la sostituzione $x = \frac{\sqrt{q}}{y}$ in $x = \frac{q}{y}$, o, per esibir fedelmente le sue idee, riducendo la trasmutazione dell' equazion $x^4 = m x^3 + q$ al problema di trovare due numeri tali, che $x y = q$, ed $x^4 = m x^3 + q$. Venendo dalla prima condizione $x = \frac{q}{y}$, con sostituire nella equazione $x^4 = m x^3 + q$, questa trasmutasi in $q^3 = m q^2 + y^4$. Il metodo si trasporta in un attimo all'equazione $x^4 \pm m x^3 \pm n x^2 \pm q = 0$, e fatta la sostituzione ottiensi $q^3 \pm m q^2 y \pm n q y^2 \pm y^4 = 0$.

§. IX. Piacque altresì a Bombelli di arricchire la generale analisi delle equazioni di 4.° grado di soluzioni particolari: non tornerà inutile il saperle, ed, a moltiplicarne il vantaggio, le recherò a formole.

1.ª $x^4 + 2 x^3 = x + 12$. Soluzione: $x^4 + 2 x^3 + x^2 = x^2 + x + 12$, $x^2 + x = \sqrt{(x^2 + x + 12)}$. Fatto $x^2 + x = y$, $y = \sqrt{(y + 12)}$, $y^2 = y + 12$, $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 12\right)} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$, $x^2 + x = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4} \pm \frac{7}{2}\right)}$.

$x^4 \pm 6 x^3 = \pm 27 x + 10$. Soluzione: $x^4 \pm 6 x^3 + 9 x^2 = 9 x^2 \pm 27 x + 10$, $x^2 \pm 3 x = \sqrt{\left(9\left(x^2 \pm 3 x\right) + 10\right)}$; posto $x^2 \pm 3 x = y$, $y^2 = 9 y + 10$, $y = 4\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{4} + 10\right)} = 4\frac{1}{2} \pm 5\frac{1}{2}$, $x^2 \pm 3 x = 4\frac{1}{2} \pm 5\frac{1}{2}$, $x = \mp 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(6\frac{3}{4} \pm 5\frac{1}{2}\right)}$.

Formola: $x^4 \pm m x^3 = \pm \frac{1}{8} m^3 x + q$. Soluzione: $x^4 \pm m x^3 + \frac{1}{4} m^2 x^2 = \frac{1}{4} m^2 x^2 \pm \frac{1}{8} m^3 x + q$, $x^2 \pm \frac{1}{2} m x = \sqrt{\left(\frac{1}{4} m^2 \left(x^2 \pm \frac{1}{2} m x\right) + q\right)}$; posto $x^2 \pm \frac{1}{2} m x = y$, $y^2 = \frac{1}{4} m^2 y + q$, $y = \frac{1}{8} m^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{64} m^4 + q\right)}$, $x = \mp \frac{1}{4} m \pm \sqrt{\left(\frac{3}{16} m^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{64} m^4 + q\right)}\right)}$.

2.ª $x^4 = 12x + 40$. Riduzione: $x^4 - 16 = 12x + 24 = 12(x+2)$, $\frac{x^4 - 16}{x+2} = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 12$.

Formola: $x^4 = px + ph + h^4$. Riduzione: $x^4 - h^4 = p(x+h)$, $\frac{x^4 - h^4}{x+h} = x^3 - hx^2 + h^2x - h^3 = p$.

E similmente $x^4 = px + ph - h^4$ si riduce ad $\frac{x^4 + h^4}{x-h} = x^3 + hx^2 + h^2x + h^3 = p$.

3.ª $x^4 + 6x^3 = 18x + 4$. Riduzione: $x^4 + 6x^3 + 32 = 18x + 36$, $= 18(x+2)$, $\frac{x^4 + 6x^3 + 32}{x+2} = x^3 + 4x^2 - 8x + 16 = 18$.

Formola: $x^4 + mx^3 = px + ph + h^4 - mh^3$. Riduzione: $x^4 + mx^3 + mh^3 - h^4 = p(x+h)$, $\frac{x^4 + mx^3 + mh^3 - h^4}{x+h} = x^3 + (m-h)x^2 - h(m-h)x + h^2(m-h) = p$.

Cangiando h in $-h$ si avrà $x^4 + mx^3 = px - ph + h^4 + mh^3$ riducibile ad $\frac{x^4 + mx^3 - mh^3 - h^4}{x-h} = x^3 + (m+h)x^2 + h(m+h)x + h^2(m+h) = p$.

Il modo di trovare simili formole si è questo. Fingasi $x^4 + mx^3 = px + ph + K$, donde $x^4 + mx^3 - K = p(x+h)$, $\frac{x^4 + mx^3 - K}{x+h} = p$. Operando per effettuare la divisione nel primo membro segnata di $x^4 + mx^3 - K$ per $x+h$, ritrovasi $x^3 + (m-h)x^2 - h(m-h)x + h^2(m-h)$ con il residuo $-K - h^3(m-h)$; onde facendo questo residuo $= 0$, cioè $K = h^3(h-m)$, la divisione si renderà perfetta, e conseguirassi $x^3 + (m-h)x^2 - h(m-h)x + h^2(m-h) = p$.

§. X. Occasion data voglio esporre un altro metodo fecondissimo per ricavare formole speciali di equazioni di 4.° grado con le rispettive soluzioni loro. Rappresenti $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$ in tutta universalità le equazioni di 4.° grado. Facciasi $x = y - \frac{1}{4}m$, e sostituiscasi: ne verrà

$y^4 + \left(n - \frac{6}{4^2} m^2 \right) y^2 + \left(p + \frac{2}{4^2} m^3 - \frac{1}{2} m n \right) y + q - \frac{1}{4} p m$ $+ \frac{1}{4^2} n m^2 - \frac{3}{4^4} m^4 = 0$, che chiamerò l'equazione (A). Supponiamo, che si distrugga il terzo termine, cioè che sia $p + \frac{2}{4^2} m^3 - \frac{1}{2} m n = 0$; conseguentemente resta $y^4 + \left(n - \frac{6}{4^2} m^2 \right) y^2 + q - \frac{1}{4} p m + \frac{1}{4^2} n m^2 - \frac{3}{4^4} m^4 = 0$, donde, compendiato in L il complesso $q - \frac{1}{4} p m + \frac{1}{4^2} n m^2 - \frac{3}{4^4} m^4$, si deduce $y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} m^2 - n \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \left(\frac{3}{8} m^2 - n \right)^2 - L \right)} \right)}$ e però $x = \frac{-1}{4} m \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} m^2 - n \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \left(\frac{3}{8} m^2 - n \right)^2 - L \right)} \right)}$. La equazione supposta $p + \frac{1}{8} m^3 - \frac{1}{2} m n = 0$, contiene le tre quantità m, n, p, tra due delle quali procedendo a supporre un rapporto, rimane determinato il rapporto della terza con esse, e si semplifica il complesso rappresentato per L. Se, ad esempio, suppongasi $p = -m$, si avrà $m^2 - 4 n - 8 = 0$, $\frac{1}{4} m^2 = n + 2$, e se di più pongasi $n + 2 = q$ vedremo nascerne la formola speciale 2.ª di Cardano sotto il §. VI.. Se nella equazione $p + \frac{1}{8} m^3 - \frac{1}{2} m n = 0$ facciasi $n = 0$, non avremo che una equazione di 3.° grado pura $p + \frac{1}{8} m^3 = 0$, dalla quale traendo $p = \frac{-1}{8} m^3$, ci incontreremo nella formola speciale 1.ª degli esempj di Bombelli nel §. IX.. Altre ipotesi far si possono.

Siccome nella equazione (A) supposto si è, $p + \frac{1}{8} m^3 - \frac{1}{2} m n = 0$, così supporre si può $q - \frac{1}{4} p m + \frac{1}{16} n m^2 - \frac{3}{64} m^4 = 0$. E contenendo questa equazione ipotetica tutte e quattro le quantità m, n, p, q, apre un campo a tanto maggior numero di ipotesi, quanto maggiore è il numero delle combinazioni. Non tutte però le ipotesi tornerebbero utili, ma con quella di $n = 0$, $p = 0$ riducente essa equazione ad equazione di 4.° grado pura, le altre sole abbassanti la medesima dal quarto ad inferior grado: tra le quali si presentan le prime $q - \frac{1}{4} p m = 0$, e $q + \frac{1}{16} n m^2 = 0$; ma più generale è l'ipotesi $q = k m^{4-a}$ intendendo per k una quantità qualunque, e per a un numero minor di quattro. L'equazione (A) per il supposto di $q - \frac{1}{4} p m + \frac{1}{16} n m^2 - \frac{3}{64} m^4 = 0$ vien depressa ad $y^3 + \left(n - \frac{3}{8} m^2\right) y + p + \frac{1}{8} m^3 - \frac{1}{2} m n = 0$.

Si possono anche insieme unire i due supposti $p + \frac{1}{8} m^3 - \frac{1}{2} m n = 0$, $q - \frac{1}{4} p m + \frac{1}{16} n m^2 - \frac{3}{64} m^4 = 0$, dai quali con la eliminazione di m^4 si tira $n m^2 - p m - 8 q = 0$; e la equazione (A) riducesi ad $y^2 + n - \frac{3}{8} m^2 = 0$. Io non voglio dilungarmi davantaggio in tali cose, e mi basta d'averne toccati i varj punti, lasciando al Leggitore il versarvi più di proposito, se gli piace.

§. XI. Udita da me la storia esatta della risoluzione delle equazioni di 4.° grado, chi può al Wallis perdonare, che nella pagina prima dell'*Arte magna* del Cardano, dove un succinto prospetto egli offre degli inventori di nuovi *Capitoli*, cioè di nuove equazioni, e regole per risolverle, leggendo: *Inde autem illo* (il Capitolo di Tartaglia) *habito, demonstrationem venatus intellexi complura alia posse haberi. Ac eo studio, auctaque jam confidentia, per me partim, ac etiam aliqua* (*capitula*) *per Ludovicum Ferrarium olim alumnum nostrum inveni*: interpretato abbia come già alla pag. 140 ho riferito, e qui è opportuno ripetere: *Puta methodos aliquas compendiarias, aut novos demonstrandi modos, aliaque hujusmodi. Nam rem ipsam quod spectat non video quod ars ipsa quicquam hactenus* (sino all'anno 1545) *promota fuerit* *ultra quod a Luca de Burgo traditum fuerat, praeter duas illas regulas Scipionis Ferrei.* Soggiugne Cardano la promessa di volere nel corso dell'opera del rispettivo nome decorare le invenzioni di ciascheduno: *Porro quae ab his inventa sunt illorum nominibus decorabuntur.* E come a tale promessa restarsi Wallis insensibile? come non concepire curiosità, e non avanzare a vedere a luogo, che cosa avea Lodovico Ferrari inventato?

Su i passi successivi del Ferrari, e del Bombelli pare distinto sì, a dovergli prestare intera fede, il racconto del Gua-de-Malves nella sua più volte citata Memoria *Recherches du nombre des racines réelles, ou imaginaires* Acad. Par. an. 1741. *Bombelli* (scrive egli) *donne assez au long pag.* 353 *la solution des équations du* 4.^{me} *degré dans les quelles le* 2.^{d} *et le* 3.^{me} *terme manquent tout à la fois; et il a l'attention d'avértir, que les regles qu'il donne dans cet endroit, ne sont point de lui, mais qu'elles ont été découvertes par L. Ferrari de Bologne, qui avoit vecu quelque tems auparavant. Enfin on trouve à la page* 369 *un morceau plus précieux que tout le reste. C'est la fameuse regle, que cet auteur a inventée pour résoudre les équations du* 4.^{me} *degré, dont le second terme est évanoui . . . . . . regle, qui à la vérité n'est expliquée ici que sur des exemples rationels, et avec un peu de confusion, mais qui n'en est pas moins bonne, et moins sûre, et qu'on regardera à jamais comme une des principales découvertes qui se soient faites dans les Mathematiques.* Meritissimo questo elogio, ma falso in tutti i punti il racconto delle invenzioni. Falso, che Lodovico Ferrari siasi limitato alle equazioni di 4.^{o} grado mancanti insieme del secondo e del terzo termine, essendo anzi stata una equazione del terzo termine fornita il motivo della sua indagine, e la prima da lui sciolta; e falso ancora, che egli non ne abbia sciolto alcuna del secondo termine dotata. Più falso, che alle equazioni prive del secondo termine ristretto siasi Bombelli, nè il pezzo di lui sarebbe sì prezioso, quale il Gua-de-Malves lo decanta, e qual è, se in luogo di estendersi a tutte pienamente le equazioni di 4.° grado, si circoscrivesse alla classe di quelle di secondo termine mancanti, ed in tale circonferenza stessa fosse involto in tenebría, e confusione. Dovea il Gua-de-Malves nell'*Arte magna* di Cardano istruirsi del segno, a cui Lodovico Ferrari con le sue regole, e Cardano stesso con accoppiar loro i proprj ritrovati, e con aggiugnervi nuovi studj, e tentativi, recato aveano le equazioni di 4.° grado; e nell' opera del Bombelli non dovea il Gua-de-Malves arrestarsi alla pag. 369, ma inoltrare alla pag. 383, e quindi pagina per pagina sino alla 408; chè in questo corso di ben 28 pagine presentata se gli sarebbe, prima una schiera di 13 equazioni quadrinomie di 4.° grado del secondo termine ornate, e poi una schiera di 15 di tutti i cinque termini fornite, od interamente complete. Sembra cruda, ed aspra taccia, ma che troppo spesso si conferma, che questi storici, Wallis, Gua-de-Malves, Montucla scrissero senza voler leggere. Che di quelli, che da essi trascrissero le varie narrazioni loro?

PARTE II.

Analisi di indefinita approssimazione rispetto alle radici irrazionali delle equazioni.

Tra i capi dell'*Arte magna*, ne' quali Cardano va successivamente esponendo le regole inventate a progresso dell'analisi, uno ne ha, cui leggesi in fronte scritto *De regula aurea*. Questo magnifico titolo sfuggì d'occhio al Wallis, al Gua-de-Malves, al Montucla; una regola pregiata tanto da Cardano, che fu creduta degna di essere insignita, e distinta col nome di aurea, ebbe il disastro di non cadere sotto la considerazion loro. E qual è codesta aurea regola? Una regola per trovare in approssimazione, quanto si desideri maggiore, la radice irrazionale di una equazione. Ed un artifizio ancora di questa fatta conobbe, ed insegnò Cardano? Sì, e bello n' è l'ingegno.

A comprendere insieme le equazioni di terzo, e di quarto grado si finga data l'equazione $lx^4+mx^3+nx^2+px=q$, la quale diverrà di grado terzo se sia $l=0$. E mercè il sostituire in luogo di x altri, ed altri numeri ordinatamente seguentisi nella progressione naturale, se ne sieno trovati due, t, $t+1$, i quali abbiano esibiti risultati contrarj, vale dire t un risultato r minore di q, e $t+1$ un risultato R di esso q maggiore, come qui sotto più chiaramente vado a segnare:

Sostituendo t risulti $\quad lt^4+mt^3+nt^2+pt=r<q$

Sostituendo $t+1$ risulti
$$\left.\begin{array}{r} lt^4+4lt^3+6lt^2+4lt+l \\ +mt^3+3mt^2+3mt+m \\ +nt^2+2nt+n \\ +pt+p \end{array}\right\}=R>q$$

Si prenda $h = \frac{q-r}{R-r} = \frac{q-(lt^4+mt^3+nt^2+pt)}{4lt^3+(6l+3m)t^2+(4l+3m+2n)t+l+m+n+p}$.
Sarà h necessariamente una frazione, essendo $R > q$, e per conseguenza $R-r > q-r$. Quindi aggiungendo questa frazione h al numero t, sarà $t+h$ un valore fra i due numeri t, $t+1$; e sarà appunto essa somma $t+h$ un valore imperfetto di x, ma più prossimo al vero, che t, o $t+1$.

Desiderando un approssimamento maggiore, si sostituisca $t+h$ in luogo di x, e

Sostituendo $t+h$ risulti

$$l(t+h)^4+m(t+h)^3+n(t+h)^2+p(t+h) = r' \lesseqgtr q.$$

Prendasi $h' = \frac{R-q}{R-r'}\Big(t+1-(t+h)\Big) = \frac{R-q}{R-r'}(1-h)$, e sarà $t+1-h'$ un valore ad x ancor più prossimo, che $t+h$. E così via via *per iteratas operationes* dice Cardano *semper propinquius accedere licet*.

Esempio: $x^4+3x^3 = 100 = q$.

Ad x sostituito 2 risulta $16+24 = 40 = r < q$

sostituito 3 risulta $81+81 = 162 = R > q$

$h = \frac{100-40}{162-40} = \frac{60}{122} = \frac{30}{61}$; e convertendo noi questa frazione in frazion decimale, $h = 0{,}4918$. Perciò $2+h = 2{,}4918$ primo prossimo valore di x.

Ad x sostituito 2,4918, risulta

$$38{,}5476 + 46{,}4094 = 84{,}957 = r' < q$$

$h' = \frac{162-100}{162-84{,}957}(1-0{,}4918) = \frac{62 \times 0{,}5082}{77{,}043} = 0{,}4089$

$t+1-h' = 3-0{,}4089 = 2{,}5911$ secondo valor più prossimo di x.

Ad x sostituito 2,5911, risulta

$$45{,}074 + 52{,}188 = 97{,}262 = r'' < q,$$

ma già ad esso approssimante di molto

$$h'' = \frac{(162 - 100)\left(t+1-(t+1-h')\right)}{162 - 97{,}262} = \frac{62 \times h'}{64{,}738} = \frac{62 \times 0{,}4089}{64{,}738} = 0{,}3916$$

$t + 1 - h'' = 3 - 0{,}3916 = 2{,}6084$ terzo valore vie più prossimo di x.

Ad x sostituito $2{,}6084$, risulta

$46{,}29 + 53{,}14 = 99{,}43 < q$, ad esso però assai prossimo

$$h''' = \frac{(162 - 100)\left(t+1-(t+1-h'')\right)}{162 - 99{,}43} = \frac{62 \times h''}{62{,}57} = \frac{62 \times 0{,}3916}{62{,}57} = 0{,}388$$

$t + 1 - h''' = 3 - 0{,}388 = 2{,}612$ quarto valore ancor più prossimo di x.

Ad x sostituito $2{,}612$, risulta

$46{,}5468 + 53{,}4611 = 100{,}0079 > q$, ma della sola tenue frazione $\frac{79}{10000}$.

Sebbene Cardano non dichiari il fondamento di questo metodo di approssimazione, non è difficile rilevare su qual principio piantato sia. Assumesi, che le differenze dei risultati per i numeri in luogo di x sostituiti nel primo membro dell'equazione sieno proporzionali alle differenze dei numeri stessi sostituiti. Giusta tale assunto $R - r : t + 1 - t = 1 :: q - r : h = x - t$. Se l'assunto potesse essere precisamente vero, h sarebbe l'esatta differenza tra x, e t, sarebbe cioè esattamente $h = x - t$, e quinci $t + h = x$. Ma l'assunto non può essere, che prossimamente vero, perciò h, che la proporzione assunta dà $= \frac{q-r}{R-r}$, non può, che prossimamente essere $= x - t$, e $t + h$ può soltanto essere un valor prossimo a quello di x, non già il vero, e preciso. Similmente istituendo la proporzione $R - r' : t + 1 - (t+h) = 1 - h :: R - q : h'$ ricavasi $h' = \frac{(R-q)(1-h)}{R-r'}$, che darebbe $t + 1 - h'$ esattamente $= x$, se la supposta proporzione fosse rigorosamente vera: perchè però questa seconda proporzione è più prossimamente vera, che la prima, perciò

$t+1-h'$ è più prossimo al giusto valor di x, che $t+h$. A tutto con sufficiente chiarezza comprendere, e perchè le proporzioni non possan essere esattamente vere, e perchè lo siano prossimamente, e perchè la seconda sia più prossimamente vera, che la prima, e così con progressivo ordine la terza più, che la seconda, la quarta più, che la terza, e vadasi continuando: a tutto ciò, dicea, con sufficiente chiarezza comprendere, basta fissare un po' l'attenzione sul complesso, $lx^4+mx^3+nx^2+px$. Se non si trattasse, che del termine px, è evidente, che le differenze dei risultati per le diverse quantità sostituite in luogo di x sarebbero proporzionali alle differenze delle quantità sostituite; poichè sostituendo in genere z, e $z+d$ i risultati sono pz, $pz+pd$, e la differenza loro $pz+pd-pz=pd$, che per la costanza di p si varia in sola ragione di d differenza fra z, e $z+d$. Ma non può essere altrettanto nel complesso esposto, il quale oltre il termine px abbraccia tre altri termini contenenti il quadrato, il cubo, il quadrato-quadrato di x. Sostituendo nell'intero complesso $lx^4+mx^3+nx^2+px$ in luogo di x prima z, poi $z+d$, e sottraendo il primo risultato dal secondo, si trova per differenza de' risultati $4lz^3d+(6ld^2+3md)z^2+(4ld^2+3md^2+2nd)z+ld^4+md^3+nd^2+pd$, che a motivo di brevità chiamerò D. È ben manifesto, che tal differenza è per sè lungi dall'essere in semplice ragione di d. Ciononondimeno se d sia una frazione, le cui potenze, cioè il quadrato, il cubo, il quadrato-quadrato, siccome quantità assai piccole, e ordinatamente minori, si trascurino, la differenza D si restrigne a $4lz^3d+3mz^2d+2nzd+pd=(4lz^3+3mz^2+2nz+p)d$, e supposto, come l, m, n, p, così z un certo numero, qual sopra t, o $t+1$, la differenza D varierà in semplice ragione di d. Le proporzioni adunque nella sopra descritta approssimazione adoperate non sono, e non possono essere esattamente vere, atteso che per quanto piccola frazion sia d, che intenderemo in serie rappresentante le h, h', h''...... le potenze di lei esser non possono assoluto zero; per essere però queste assai piccole, saranno le medesime proporzioni prossimamente vere, e con ordinato progresso tanto più prossimamente vere, quanto d si farà nella serie h, h', h'', h'''. . . . . più piccola.

Siccome, supposta la proporzione $R-r : t+1-t = 1 :: q-r : h$ prossimamente $= x-t$, si è preso $h = \frac{q-r}{R-r}$, ed x prossimamente $= t+h$; così supponendo la proporzione $R-r : t+1-t = 1 :: R-q : H$ prossimamente $= t+1-x$, si può prendere $H = \frac{R-q}{R-r}$, ed x prossimamente $= t+1-H$; e torna lo stesso, operando nell'uno, o nell'altro modo, vale dire, che $t+\frac{q-r}{R-r}$ è $= t+1-\frac{R-q}{R-r}$, poichè $\frac{q-r}{R-r} = 1-\frac{R-q}{R-r} = \frac{R-r-R+q}{R-r}$, cioè $h = 1-H$.

In vece della proporzione $R-r' : 1-h :: R-q : h'$ prossimamente $= t+1-x$, donde a secondo prossimo valor di x si tira $t+1-\frac{R-q}{R-r'}(1-h)$, si può usare la proporzione $R-r' : 1-h :: q-r : k$ prossimamente $= x-t$, donde a secondo prossimo valor di x ne viene $t+\frac{q-r}{R-r'}(1-h)$.

In oltre si può anche istituire la proporzione $R-r' : 1-h :: \pm q \mp r' : K$ prossimamente $= \pm x \mp (t+h)$, dalla quale a secondo prossimo valore di x ne segue $t+h\pm K = t+\frac{q-r}{R-r}+\frac{q-r'}{R-r'}(1-h)$. Questo ultimo si fa da sè negativo nel caso di $r'>q$.

In tal caso poi è ragionevole cangiare il primo termine della proporzione $R-r'$ in $r'-r$, e corrispondentemente il secondo $1-h=t+1-(t+h)$ in $t+h-t$. E con le due differenze $r'-r$, h prese a termini primo e secondo della proporzione combinando per terzo termine la differenza $q-r$, o la $R-q$, o la $r'-q$, si avranno tre altre proporzioni, tra le quali poter a piacere scegliere.

Insomma la sostanza del metodo si è la seguente proporzione: differenza di due risultati non veri alla differenza dei due non veri valori di x, dai quali provengono, come la differenza tra il debito risultato vero ed un risultato non vero alla differenza tra il vero valore di x ed il valore generatore del risultato non vero. Nella libertà delle proporzioni, delle quali mano mano si aumenta la moltitudine, sta all'accortezza dell'analista la scelta delle più favorevoli, cioè di quelle, che con celerità maggiore lo approssimino al vero valore di x: guardi a qual dei due limiti t, $t+1$ si appalesi dopo qualche operazione d'inclinare il valore di x, e spiegata l'inclinazione, segua la via che additata gli viene, si tenga nel formare i termini della proporzione a quel limite, a cui il valore di x si è manifestato pendente.

Se richiamisi a memoria il principio originario della regola della Doppia Falsa Posizione da me ampiamente dichiarato nella mia *Storia dell'Aritmetica*, si scorgerà altro non essere il metodo di approssimazione, di cui Cardano espose in esempj, ed io ho generalizzato, e convenevolmente agli accidenti varj regolato l'operare, e la teorica base discoperta e misurata, fuorchè quello stesso principio dal natural suo confine alle equazioni di 3.°, e 4.° grado trasferito, con il giusto intendimento di mezzo, non a precisa, ma quanto aggradi più prossima, verità. Anche al dì d'oggi per lo scioglimento di molte equazioni involgenti, o quantità ad esponenti incogniti elevate, od archi e funzioni loro si ricorre alla doppia falsa posizione. La sola diversità si è, che ora usasi essa giusta la regola, che nella citata mia *Storia dell'Aritmetica* chiamai *secondaria*, o *derivata*; e nel metodo di approssimazione, che presso Cardano ritrovasi, adoperata viene giusta la regola sua *primitiva*, ed *originaria*.

Insegna eziandío Cardano il modo di operare seguente. Sia l'equazione $x^4 + n x^2 + q = m x^3 + p x$. Sostituito t in luogo di x si sottragga il secondo membro dal primo, e provenga $t^4 + n t^2 + q - m t^3 - p t = -e$; sostituito poi $t+1$ provenga $(t+2)^4 + n(t+1)^2 + q - m(t+1)^3 - p(t+1) = E$: sarà $t + \frac{e}{E+e}$ il primo prossimo valore di x. Intendesi la ragione di ciò supponendo la equazione, mercè il trasponimento del suo destro membro, ridotta alla forma $x^4 + n x^2 + q - m x^3 - p x = 0$. Ciò supposto, il risultato vero che proverrebbe dal vero valor di x, è zero, ed è ad esso, che come a termine di confronto si hanno a riferire i risultati non veri $-e$, $+E$: è qui lo zero ciò che nel primo modo era q, è qui $-e$ ciò che là era r, ed è qui $+E$ ciò che colà era R; dunque siccome a primo prossimo valore di x si aveva $t + \frac{q-r}{R-r}$, così surrogando o a q, $-e$ ad r, $+E$ ad R, si avrà il medesimo primo valor prossimo di x espresso per $t + \frac{e}{E+e}$. L'aggiunta $\frac{e}{E+e}$ al limite t ha la sua origine, e ragione nella proporzione $E + e : t + 1 - t = 1 :: e : \frac{e}{E+e}$ prossimamente $= x - t$. Comprendesi già la modificazione simile da farsi nel seguito delle proporzioni, e dipendenti operazioni per trasferirle dal primo a questo modo. I due risultati $-e$, $+E$ sono qui insieme errori dal risultato debito e vero o, e perciò appunto ho adoperato a dinotarli le lettere e, E. Riducendo tutto $t + \frac{e}{E+e}$ alla denominazione $E+e$ si cangia in $\frac{tE+(t+1)e}{E+e}$. Ella è questa la pretta regola *secondaria* oggidì usitata della doppia falsa posizione nel caso di errori contrarj, per difetto l'uno, per eccesso l'altro: nel numeratore la posizione t è moltiplicato per l'errore E proveniente dalla posizione $t+1$, e scambievolmente questa posizione è moltiplicata nell'errore e proveniente dalla posizione t, e la somma de' prodotti è divisa per la somma degli errori, appunto come vuole la regola.

Oggidì volendo per approssimazione la radice irrazionale dell'equazione $lx^4 \pm mx^3 \pm nx^2 \pm px \pm q = 0$, conosciuti i limiti t, $t+1$, si pone $x = t+h$, e si trasforma l'equazione in $lt^4 + (4lh \pm m)t^3 + (6lh^2 \pm 3mh \pm n)t^2 + (4lh^3 \pm 3mh^2 \pm 2nh \pm p)t + lh^4 \pm mh^3 \pm nh^2 \pm ph \pm q = 0$; poi in considerazione della piccolezza del quadrato h^2, e molto più del cubo h^3, e molto ancora più del quadrato-quadrato h^4 della frazione h, trascurati i termini, che tali potenze di h contengono, si restrigne l'equazione a $lt^4 + (4lh \pm m)t^3 + (\pm 3mh \pm n)t^2 + (\pm 2nh \pm p)t \pm ph \pm q = 0$, donde si tira $h = \frac{-lt^4 \mp mt^3 \mp nt^2 \mp pt^3 \mp q}{4lt^3 \pm 3mt^2 \pm 2nt \pm p}$. Questo metodo di cercare la frazione h, del quale Newton, Halley, Raphson giunsero, da sè ciascuno, ma Newton prima degli altri, al ritrovamento, poggia in fondo su la stessa industriosa base del convertire, col trascuramento delle piccole quantità h^2, h^3, h^4, il vero in prossimo, su la quale ho io dimostrato essere costrutta l'aurea regola da Cardano insegnata. Secondo questa si ha $h = \frac{-lt^4 \mp mt^3 \mp nt^2 \mp pt \mp q}{4lt^3 + (6l \pm 3m)t^2 + (4l \pm 3m \pm 2n)t + l \pm m \pm n \pm p}$; il numeratore è lo stesso, che nell'odierno metodo; il denominatore è differente ne' coefficienti dei termini secondo e terzo, e nel termine ultimo noto.

Conchiude Cardano, avvertendo, che l'aurea regola ugualmente, che a calcolare per approssimazione, quanto piaccia maggiore, il valor della incognita irrazionale di una equazione, serve ad estrarre per simile indefinita approssimazione le radici dalle quantità, che non le ammettano esatte. Sono di fatto queste due cose intimamente fra loro connesse. Poichè sia A una quantità, della quale si voglia la radice d'ordine a, quantunque non sia ella potenza di grado a. Posto $x = \sqrt[a]{A}$, sarà $x^a = A$, e se A sia un binomio $B + \sqrt[e]{C}$, sarà $x^a - B = \sqrt[e]{C}$ ed $(x^a - B)^e = C$, e svolgendo la potenza $(x^a - B)^e$, si avrà una equazione di grado ae, della quale il trovare prossimamente l'incognita x sarà una cosa stessa, che estrarre la radice a^{esima} da A. Dica ora pertanto a gloria del suo Vieta Montucla nella Parte IV, lib. II, num. XI: *Viéte a le premier récouru aux approximations, soit pour les équations des troisieme et quatrieme degrés, soit pour celles des degrés ultérieurs.*

Nè, al pensiero tenendo presente il secondo dei due modi di insegnati dal Cardano, io posso convenire con il Wallis, il quale riguarda, ed esalta qual cosa affatto nuova in un Capo del suo Harriot il trasportare che fa in certe dimostrazioni tutti i termini di una equazione da una sola parte uguagliandone il complesso allo zero, che dall'altra parte rimane: il primo esempio ci si offre in quel luogo di Cardano; anzi è in Cardano un modo di risoluzione, laddove in Harriot non è, che un incidente di dimostrazione.

CAPO VII.

Teoremi, o semi di teoremi intorno alla natura delle equazioni sparsi per le opere di Cardano.

Montucla tributa a Cardano la gloria di avere un po' più dei suoi predecessori veduto addentro nelle equazioni, ma limita questo vedere al distinguere le radici negative. Ben più acuto vide egli, e ben più altre verità, più fine e più belle, o con piena luce brillano, o lampeggiano nelle opere di lui. Io vado a produrle ordinatamente sotto distinti articoli; ed il Leggitore non potrà non sentire moltiplicarsi in animo la maraviglia, che lo splendor loro non abbia colpiti gli occhi del Wallis, del Gua-de-Malves, del Montucla.

ARTICOLO I.

Composizione delle equazioni.

1.° Divisibilita' dell'equazione per $x \mp m$, essendo $\pm m$ una quantita' che sostituita in luogo di x verifichi l'equazione. È questo capital teorema relativamente alla composizione delle equazioni; e che rispetto alle equazioni cubiche conosciuto lo abbia Cardano, chi può dubitarne, ponendo mente alle speciali soluzioni da me collocate sotto il n. 3.° del Manipolo I, pag. 167? Cardano, è vero, espone il teorema un po' diversamente da quello che noi facciamo; ma la diversità non è che dipendente dalla maniera diversa di disporre i termini dell'equazione. Lasciati i termini dell'equazione $x^3 = px + q$ nella disposizion, che hanno, da due parti del segno d'uguaglianza, non potea Cardano adempier dall'una, e dall'altra parte separatamente la divisione per $x \mp m$, se non aggiugnendo all'una parte ed all'altra $\mp m^3$, e recando l'equazione allo stato $x^3 \mp m^3 = px + q \mp m^3$. Si trasporti ora il destro membro di questa equazione alla sinistra, e si scriva $x^3 \mp m^3 - px - q \pm m^3 = 0$, e facciasi la divisione per $x \mp m$: si troverà, che i due termini $\mp m^3$, $\pm m^3$ non vengono punto nel corso dell'operazione toccati, che senza toccarli la divisione riesce esatta, che sono, siccome collidentisi, così superflui, che in una parola tanto è dividere $x^3 \mp m^3 - px - q \pm m^3 = 0$ per $x \mp m$, quanto il dividere $x^3 - px - q = 0$ per $x \mp m$, come da noi si usa di fare. Dunque l'operare di Cardano, ed il teorema, che in fondo racchiude, sono l'operar nostro, ed il teorema, che noi celebriamo, con quella sola modificazione, che importa il distribuire i termini dell' equazione dall'una e dall'altra parte del segno di uguaglianza, in vece di collocarli tutti da una parte soltanto. Ci manifesta eziandío Cardano nel capo LI della *Pratica generale dell'Aritmetica* la via, che lo condusse al bel teorema. Incominciò dal fissar l'attenzione sul quoziente della divisione $\frac{x^3 \pm 1}{x \pm 1}$, che è $x^2 \mp x + 1$, e passò a riflettere su la divisione in altro problema occorsagli $\frac{x^3+8}{x+2} = x^2 - 2x + 4$, ed intese, che, espresso il 2 del divisore per $\sqrt[3]{8}$, ne veniva la forma $\frac{x^3+8}{x+\sqrt[3]{8}} = x^2 - x\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8^2}$: argomentando quinci secondo la regola del Modo, che, come ho detto in descriverla al fine del Capo 3.° del I volume, chiamava egli la madre delle invenzioni, dedusse in genere essere $\frac{x^3 \pm a}{x \pm \sqrt[3]{a}} =$

$x^2 \pm x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}$, e se a sia numero cubico $= m^3$ essere $\frac{x^3 \pm m^3}{x \pm m} = x^2 \mp mx + m^2$. Ciò inferito, proseguì a ragionare, e calcolare così: Sia $x^3 = px + q$, e sia m un numero che faccia $\pm m^3 = \pm pm + q$, sottraendo da quella questa equazione, dal sinistro il sinistro, dal destro il destro membro, ne nasce $x^3 \mp m^3 = px \mp pm$, donde, dividendo per $x \mp m$, procedesi ad $\frac{x^3 \mp m^3}{x \mp m} = \frac{px \mp pm}{x \mp m}$, che dà $x^2 \pm mx + m^2 = p$. Ma per il supposto $\pm m^3 = \pm pm + q$ è $\mp pm = q \mp m^3$, dunque del pari i due membri dell'equazione $x^3 \mp m^3 = px + q \pm m^3$ debbono essere divisibili per $x \mp m$, e dare $x^2 \pm mx^2 + m^2 = p$. Ed ecco la equazione di 3.° grado abbassata per Cardano ad una equazione di 2.°; eccola riconosciuta composta di questa, e del divisore $x \mp m$ formato dall'equazione di primo grado $x = \pm m$. E la soluzione speciale sotto il n. 13 del I Manipolo dimostra, che non fermossi Cardano al caso di m razionale, ma toccò eziandío a quello di m irrazionale.

2.° Coefficiente del secondo termine dell'equazione uguale in grandezza alla somma di tutte le radici di lei. Tra i rapporti, co' quali nella composizion delle equazioni legansi i coefficienti dei termini intermedj e l'ultimo termine inverso le radici, non fa maraviglia, che codesto del coefficiente del secondo termine, siccome il più semplice, sia stato il primo ad essere con tutta chiarezza, e precision discoperto. Cardano nel capo XVIII dell'*Arte magna*, recate le tre equazioni $x^3 + 10x = 6x^2 + 4$; $x^3 + 21x = 9x^2 + 5$; $x^3 + 26x = 12x^2 + 12$, osserva, che le tre radici della prima 2, $2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$ congiuntamente fanno 6, le tre della seconda 5, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$ fanno 9, e le tre della terza 2, $5 + \sqrt{19}$, $5 - \sqrt{19}$ fanno 12. Laonde così conchiude *ex hoc patet quod numerus quadratorum* (il coefficiente di x^2) *in his tribus exemplis in quibus aestimatio rei* (il valore di x) *triplicatur, semper componitur ex tribus aestimationibus junctis simul*. La conclusione è in queste parole limitata; ma soggiugne la citazione del Capo I, dove premettendo un ristretto quadro delle sue scoperte insegnato avea, che nelle equazioni $x^3+nx^2=q$; $x^3+q=nx^2$, la differenza delle radici positive e negative è $=n$. E più espressamente richiama a memoria la dottrina ivi stesso premessa su le radici positive, e negative delle equazioni $x^3+q=px$; $x^3=px+q$, ed è: che nella prima di due radici positive dotata, ed una negativa, questa è a quelle due uguale; e viceversa nella seconda fornita di una positiva, e di due negative, quella si ugualia a queste due: ciò che apertamente è un voler dire, che se nelle due equazioni $x^3+q=px$; $x^3=px+q$, manca nx^2, egli è perche n riman distrutto a cagione della uguaglianza tra le positive, e le negative radici. Raccogliendo pertanto tutto, qual è, rispetto al coefficiente n del secondo termine delle cubiche equazioni, il caso, che Cardano contemplato non abbia? Che più! se i casi tutti li riduce egli non meno, e non altrimenti, che noi, ad una idea comune, e generale, considerando sempre n come l'addizione delle tre radici? *Et patet etiam, quod omnes modi hi ad additionem semper referri possunt, quamvis minus, cum additur, vicem gerat plus, cum detrahitur*. Ed i corollarj, che tira da tutto il dottrinale, sono: *Numerus quadratorum dividitur trifariam, et una aestimatione habita aggregatum reliquarum cognitum relinquetur....: et duabus cognitis tertia semper exurgit*. Non è il dedurre, ed il parlar nostro?

3.° Ultimo noto termine dell'equazione prodotto delle radici di lei tutte insieme moltiplicate. Potevasi facilmente di questa verità sin dal principio dell'analisi trarre dall'equazione di secondo grado $x^2 + q = px$ il primo lume, riconosciute essendosene le due radici $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Bastava moltiplicare l'una radice con l'altra per vedere il prodotto loro $= \frac{1}{4}p^2 - (\frac{1}{4}p^2 - q) = q$, ultimo noto termine dell'equazione $x^2 - px + q = 0$. Con uguale facilità, e per la stessa via poteva Cardano acquistare una chiara cognizione di questo teorema rispetto alle equazioni cubiche, che con la divisione per $x \mp m$ riuscito gli era di abbassare ad equazioni di secondo grado. Abbassata l'equazione $x^3 = px + q$ con la divisione per $x \mp m$ (sul supposto $\pm m^3 = \pm pm + q$) all'equazione $x^2 \pm mx + m^2 = p$, e con lo scioglimento di questa trovati gli altri due valori di x, $x = \mp \frac{1}{2}m + \sqrt{(p - \frac{3}{4}m^2)}$, $x = \mp \frac{1}{2}m - \sqrt{(p - \frac{3}{4}m^2)}$, se data si fosse la pena di fare il prodotto $\pm m \times (\mp \frac{1}{2}m + \sqrt{(p - \frac{3}{4}m^2)}) \times (\mp \frac{1}{2}m - \sqrt{(p - \frac{3}{4}m^2)})$, rinvenuto avrebbe $\pm m^3 \mp pm$, che per il supposto è $= q$; onde agli occhi se gli sarebbe mostrata la composizione di q per le tre radici moltiplicate tutte insieme. Più aperta occasione di accorgersi di composizion tale esibivagli la special soluzione da me riportata sotto il num. 13 del I Manipolo, dove l'm è espressamente fattore del termine noto, essendo $q = b\sqrt{(p + b)}$, $-m = -\sqrt{(p+b)}$, e dove dalla moltiplica delle altre due radici risulta l'altro fattore b di q. Ciononondimeno, legge essendomi di non esagerar merito, nè palliare difetto, ingenuamente dirò non trovarsi negli scritti di

Cardano assoluta proposizione, con la quale stabilisca essere il termine noto delle cubiche equazioni il prodotto delle tre radici loro. Ma se questo teorema non gli splendette allo intelletto con una luce decisa e serena, non lasciarono certamente di rompergliene dei lampi grado grado più vivi. Il primo lampo è nella seconda soluzione speciale del Manipolo I; ed a passare dall'ipotesi di una casuale al teorema della necessaria divisibilità di q per x non mancò se non che riflettesse Cardano essere impossibile, che nell' equazione $x^3 = px + q$, dove p, q si suppongono numeri interi, sia il valore di x una frazione, e per conseguenza essendo nella equazione $x^2 = p + \frac{q}{x}$ interi i termini x^2, p, deve intero pur essere il termine $\frac{q}{x}$, cioè q necessariamente divisibile per x. Di tal riflessione corredata la soluzione speciale di Cardano acquista lo spirito di un metodo generale a ritrovare le radici razionali delle cubiche equazioni, e la condizione $a = \sqrt{\left(p + \frac{q}{a}\right)}$ è il criterio per discernere tra i divisori del noto termine q quelli che sono radici dell'equazione, e quelli che no. Il secondo lampo, che balenò alla mente di Cardano, si ha nel capo v del libro *De regula Aliza*, cui egli chiude con osservare, che allora quando il termine noto dell'equazione è numero composto riesce facile trovare la radice di lei, e trovarne anche più, ma che se è numero primo è difficile riuscire a trovarne pur una sola. *Si aequationis numerus sit compositus, facile est habere aestimationem* (valorem incognitae quantitatis x), *et plures etiam, si autem primus, difficile est invenire unam solam*. La ragione si è, perchè essendo il termine noto dell' equazione numero primo, se esso intero non soddisfaccia all' equazione, o non vi soddisfaccia l'unità, per cui sempre può intendersi moltiplicato, è necessario, che le radici dell' equazione sieno irrazionali, e tra i divisori irrazionali del medesimo noto termine, la moltitudine de' quali divisori irrazionali essendo immensa, troppo dilatasi il campo dell' incertezza, e malagevole di troppo si rende il discernimento dei buoni. Che anche ciò, vale dire il comprendersi dal noto termine dell'equazione a fattori suoi gli irrazionali non meno, che i razionali valori di x, lampeggiato abbia in mezzo alle indefesse indagini alla penetrazione di Cardano, fede ce ne fa il Capo XVII dello stesso libro *De regula Aliza*, cui ad argomento sta in fronte scritto *Quot modis numerus produci possit ex non numero*; cioè in quante maniere il numero q possa esser prodotto per quantità non numeriche, o sia irrazionali. E tra le molte maniere distingue, siccome la propria, questa, $q = a\left(b + \sqrt{(b^2 - c)}\right) \times \left(b - \sqrt{(b^2 - c)}\right) = ac$, la quale chi non si accorge riguardare il caso a lungo spiegato nel num. 4.° del I Manipolo delle soluzioni speciali, di allor quando le due equazioni $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ fornite sono di una radice razionale, e di due irrazionali composte di parte razionale, e di parte radicale quadrata? Raccolti questi lampi non equivalgono eglino ad una proposizione? E se Cardano non li dedusse alla limpida e stabile luce di un teorema, non è egli vero, che mise un Leggitore attento alla portata di dedurveli?

Dovere però è di confessare, che Cardano non pervenne alle cognizioni riferite intorno alla composizione delle equazioni, che con penose meditazioni, e per vie tortuose. Il piano, e retto sentiero gli era attraversato dal sistema del tempo di non costituire equazione, che di termini, altri a sinistra, altri a destra con positivo segno cadenti, e nei trasporti non mai trasportarli tutti da una parte, e fare dall'altra zero. Si lasciò Cardano avventurosamente condurre a violarlo nel secondo de' due modi di indefinita approssimazione, giusta che nella seconda parte del superior Capo ho mostrato. Lo trasgredì pure felicemente nel formare, come ho detto nel num. 1.° di questo Articolo, della equazione $x = \pm m$, il divisore $x \mp m$, ma non andò più avanti. Avrebbe dovuto, prima di dividere per tale divisore l'equazione cubica, portarne ad una parte tutti i termini; ottenuta l'equazione di secondo grado, e, sciogliendola, conseguiti gli altri due valori di x, che per brevità noterò $x = h$, $x = k$, dovuto avrebbe anche di queste due equazioni di primo grado formare i due divisori $x - h$, $x - k$; passando indi dall'analisi alla sintesi avrebbe dovuto fare la moltiplica $(x \mp m)(x - h)(x - k)$, e confrontando il prodotto con la cubica equazione avrebbe in un tratto veduto non solo il coefficiente del secondo termine $=$ alla somma $\mp m - h - k$, ed il termine noto $=$ al prodotto $\mp m \times - h \times - k$, ma ancora il coefficiente del terzo termine $=$ alla somma dei prodotti di $\mp m$, $- h$, $- k$ a due a due. E così avrebbe in un colpo più veduto, che con molte faticose specolazioni. Pare una cosa di lieve momento, e di niuna conseguenza il collocamento dei termini di una equazione ad una sola banda, in vece di distribuirli dall'una e dall'altra; ma spesso una cosa assai piccola è apertura a grande progresso, e la piccola contraria è un grande ostacolo. Ma di codesto cangiamento stesso chi può non riconoscere in Cardano i primordj?

ARTICOLO II.

Radici positive, e negative, reali, ed immaginarie.

Cardano distinse nelle equazioni le radici, che noi chiamiamo negative, e quelle, che positive, od affermative appelliamo. Diede egli alle prime il nome di *Vere*, e quello di *Finte*, o *False* alle seconde. Questa denominazione ebbe a mio credere origine da tre concetti: 1.° il concepire come una cosa stessa risoluzione utile, e risoluzion vera. 2.° il concepire generalmente inutili, perchè in realtà in certi casi tali, le soluzioni in quantità negative. 3.° il concepirle in conseguenza della inutilità eziandío come estranie al problema, ed in certa maniera per ignota cagione nella equazione intruse. Ho detto, che le soluzioni in quantità negative riescono in realtà talvolta inutili. Esempio ne sia questo problema: In una truppa schierata tante sono le file, quanti in ogni fila i soldati, e l'intero numero de' soldati è 400: quante sono le file, e quanti i soldati in ciascuna? L'equazione $x^2=400$ dà due soluzioni, $x=200$, $x=-200$. La seconda in -200 è inutile rispetto al problema proposto, non potendosi formare idea veruna di un numero negativo di soldati, e di fila di essi; quantunque non meno della prima sia vera soluzione verissima della equazione $x^2=400$ in astratto considerando. Su simili esempj è a credere, che prendesse Cardano a riguardare come vane ed illudenti, come finte o false le radici negative. Il nome di *false* si è alle negative radici conservato lungo tempo. Il Descartes così le chiama, e qualche Scrittore di Algebra più recente eziandío. Alcuni studiarono su la convenienza di tal nome, e si avvisarono di trovarlo ben ragionevole, e propio, in quanto, che ogni soluzione negativa sia effetto di una qualche falsa, e torta condizione nel proposto problema, e il vizio ne significhi, e additi il correggimento. Bezout nel §. 70 della sua *Algebra* ad evidente dichiarazione propone di trovare un numero, che essendo aggiunto a 15 dia 10: l'equazione di questo problema $x + 15 = 10$ conduce tosto ad $x = 10 - 15 = -5$. Questo negativo risultato fa vedere, che il problema si è proposto con una condizione rovescia alla debita, e che in luogo di addomandare un numero, il quale aggiunto al 15 facesse 10, dir si doveva, che sottratto dal 15 lasciasse 10. Ma se la negativa soluzione, io dico, è effetto, ed indizio di falsità nelle condizioni del problema, come anderà la cosa nei problemi di grado superiore al primo, allor quando l'equazione ha le radici, altre positive, altre negative? Significheranno le positive giustezza, le negative sconcio, ed invertimento nelle condizioni? ciò è assurdo. Nella equazione esempigrazia di sopra considerata $x^2 = 400$, se prendasi in astratto, quale l'equazione del problema di trovare un numero, il cui quadrato sia 400, chi potrà mai dire, che la radice $x = 20$ sia argomento di verità, la radice $x = -20$ argomento di falsità nella condizion del problema? Il numero positivo 20, ed il negativo -20 non differiscono che di estrinseca affezione, o relazion contraria, e sono due modi ugualmente veri, per i quali, quadrando, generasi 400, cioè adempiesi la condizione del problema. Che se, dando all'equazione il particolare soggetto dei soldati, il numero negativo -20 non può aver senso, ciò non mostra sconvenienza nella condizione, ma solamente che per qualità del soggetto la radice negativa dell'equazione non gli è applicabile. Le radici negative hanno senso niente meno, che le positive in geometría, additando quelle le rette nella negativa, siccome queste le rette nella positiva regione. E nei fisici problemi le radici positive, e negative assegnano i varj, e contrarj versi, per i quali si può ottenere l'effetto.

Ma Cardano trascurò egli in ogni caso, senza farne alcun uso, le negative radici? Montucla afferma, che Cardano *ne dit rien sur l'usage des racines negatives, qu'il regarda probablement comme inutiles*. Io trovo per lo contrario, che accintosi Cardano a spiegare nella ordinata schiera di dodici capi le regole varie per trattare i problemi, ne assegna uno alla spiegazione dell'uso delle false radici, ed è il capo XXXVII, cui scrive in fronte *De regula falsum ponendi*. E la ragione, che egli stesso adduce di ammettere e di porre il falso, si è che altrimenti molte quistioni sono inestricabili, *inextricabiles*. Scelgo tra le quistioni da lui proposte e risolute la 5.ª, che è di dividere il numero 6 in due parti, il prodotto delle quali $x(6-x)$ sia $=-40$. Da tal condizione ne segue, $6x-x^2=-40$, $x^2=6x+40$, $x=3\pm\sqrt{49}=3\pm7$, cioè $x=10$, ed $x=-4$, che è lo stesso che $x=6-10$: è dunque mestieri ammettere il falso, cioè considerare il numero dato a dividere 6 come composto del positivo 10, e del negativo -4 o sia $=10-4$, perchè in altra maniera è impossibile sciogliere il problema.

Ma altra cosa è ammettere il falso, cioè il negativo, cui in fine presenta lo scioglimento della equazione del problema, altra il porre a dirittura il falso nel primo passo sul problema; ed il titolo stesso della regola annuncia, che l'industria di essa verte propiamente su di ciò. La esposizione di una tale industria è tanto più importante, e da me dovuta, quanto più volte ho notato il difetto dei primi analisti, e di Cardano eziandio in ommettere nell' enumerazione, e nella analisi delle equazioni le forme $x^2 + px + q = 0$, $x^3 + nx^2 + px + q = 0$, $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$: la industria della regola del falso porre è un supplemento all'analisi di tali equazioni; no non si creda, che per non aver Cardano trattato, e sciolte sì fatte forme di equazioni non abbia trattati e sciolti problemi ad esse conducenti. E come ciò? L'esempio di una delle quistioni da lui risolute lo dichiarerà: Pietro ha 12 zecchini più che Francesco, ed il cubo di quelli di Pietro supera di 1161 il cubo degli zecchini di Francesco: quanti sono gli zecchini di Pietro, quanti quelli di Francesco? Oggidì qualunque analista dinotando per x gli zecchini di Pietro, per y quelli di Francesco, dalle due equazioni $x = y + 12$, $x^3 = 1161 + y^3$, trarrebbe l'equazione $y^2 + 12y + 15\frac{3}{4} = 0$. Cardano, ad isfuggire tale equazione, troppo brutta di aspetto secondo il comune pregiudizio d'allora, e penetrando già dover Francesco, non peculio, ma aver debito, pone a dirittura falso, o sia negativo, $= -y$, il numero degli zecchini di Francesco, e dalle equazioni $x = -y + 12$, $x^3 = 1161 - y^3$ tira l'equazione $y^2 + 15\frac{3}{4} = 12y$, dalla quale ricava y, e quindi $-y$.

In simil maniera si conduce Cardano nell'analisi delle equazioni di 4.° grado per quelle di una di 3.°, allorchè l'equazione determinatrice di t è per riuscire di termini tutti positivi ad una parte: in vece di t assume $-t$.

Ecco pertanto ne' veri e giusti termini il modo, onde Cardano usò delle radici negative. 1.° Si avvide egli, che nei problemi di due incognite simili a quello sopra recato della divisione di 6 in due tali parti, sì che risulti $x(6-x) = -40$, la radice negativa dell'equazione altro non è che la seconda incognita del problema, e perciò, siccome di parte della soluzione non meno che la radice positiva fece ugual conto di lei, che di questa. 2.° Trascurò le radici negative nel diverso caso, di non essere, che una la incognita del problema, e di non formar esse parte di soluzione, ma di servire a moltiplicare delle soluzioni il numero. Così dell'equazione stessa $x^2 = 6x + 40$ trasandata avrebbe Cardano la negativa radice -4, se il problema fosse stato di trovare un numero, il cui quadrato si uguagliasse al prodotto suo per 6 più 40. 3.° Senza deviare dall'antico, e comune costume di rigettare le equazioni di termini tutti positivi ad una parte, non fornite in conseguenza che di negative radici, riuscì all'effetto medesimo dell'analisi loro, con operare a rovescio, cioè in vece di porre positivo, o a meglio dire astratto, e ricavare per equazion negativo, ponendo a dirittura negativo, e ricavando positivo.

Radici reali, ed immaginarie.

Ho dimostrato su l'incominciare del Capo V, che Cardano conobbe, e trattò, e non il primo forse, le radici immaginarie dell'equazione $x^2 + q = px$. Avendo egli denominate false le radici negative reali, denominò pur false le radici immaginarie, essendo radici di meno, o sia di quantità negative; ma, a distinzione, costituì delle quantità negative il primo genere di falso, e delle quadrate radici loro il secondo.

Dopo aver parlato di questi due generi di falso, soggiugne Cardano poter avvenire, che l'analisi conduca in traccia di un terzo genere di meno, che non è nè puro meno, nè radice di meno, ma cosa onninamente falsa, la regola però di cui componesi a certo modo di ambedue. *Possumus vero venari genus* m: *aliud, quod neque est pu-*

rum m : *neque* ℞ m : *sed res omnino falsa, et cujus regula quasi componitur ex ambobus*. Oscuro è questo dire, e del problema, che per rischiararlo reca ad esempio, di trovare tre numeri continuamente proporzionali, il secondo de' quali sia il primo meno la radice di lui, il terzo sia il secondo meno similmente la radice di lui, affatto erronea è la risoluzion, che esebisce nella pretesa continua proporzione $\frac{1}{4} : \frac{-1}{4} : \frac{-1}{4} - \sqrt{-\frac{1}{4}}$. Pure da tale esibimento stesso traluce, che la cosa da Cardano concepita a terzo genere di falso fu in generale l'aggregato $-a-\sqrt{-b}$, per ogni parte, per ogni verso negativo, non puro meno, non semplice radice di meno, ma composto di quello, e di questa negativamente presa. Sì fatto complesso è la negativa radice immaginaria dell'equazione $x^2+px+q=0$, nel caso di $\frac{1}{4}p^2<q$. Per regola di porre il terzo genere di falso dovette Cardano intendere lo schivamento di tale equazione di tutti i termini positivi ad una parte, con porre nell'intraprendere del problema la cercata quantità $=-x$, in luogo di porla $=x$. Così estese Cardano i concetti, e le industrie dalle radici negative reali alle negative immaginarie, ed agli aggregati delle une, e delle altre.

È bel teorema intorno alle radici reali, ed immaginarie delle equazioni, che una equazione di grado pari o non ha radice alcuna reale, o ne ha un numero pari. Cardano lo insegnò primieramente rispetto alle equazioni di 2.° grado, avvertendo, che le equazioni $x^2+px=q$, $x^2=px+q$ hanno sempre due radici, e l'equazione $x^2+q=px$ ora ne ha due, ora niuna, cioè niuna reale, avendo riconosciute, e considerate le due immaginarie. Dalle equazioni di 2.° grado passò a quelle di 4.° da loro derivative, e stabilì, che le equazioni $x^4+mx^2=q$, $x^4=mx^2+q$ hanno sempre due radici, e che l'equazione $x^4 + q = m x^2$ in un caso, cioè quando $\frac{1}{4} m^2 > q$, ne ha quattro, in altro caso, cioè quando $\frac{1}{4} m^2 < q$, non ne ha veruna. Indi al generale avanzossi con dire, che le equazioni derivative del secondo grado, a qualunque altezza salgano, possono essere di radici affatto destitute, ma non possono averne una sola, e necessariamente, se ne hanno, debbono averne almeno due, nè possono averne tre, ma ben quattro. Io aggiugnerò esser questo un numero, cui non possono superare. Con universalità, e con precisa determinazione insieme delle equazioni pure di grado pari $x^{2n} = q$ asserì Cardano due esserne sempre, ma non più, le radici.

Contrario, e non men bello teorema si è, che una qualunque equazione di grado dispari ha almeno una radice reale, e che se ne ha più, le ha sempre in numero dispari. Questo teorema fu, relativamente alle equazioni di 3.° grado, in ogni parte veduto da Cardano, il quale nel Capo I dell'*Arte magna*, tessendo un succinto prospetto delle sue meditazioni, e scoperte, con sicura sentenza pianta, che qualsivoglia equazione di terzo grado va fornita di una radice, vera, o falsa, e se va ricca di più d'una, la ricchezza si estende a tre, nè mai si arresta a due sole. Non poteva Cardano non acquistare tale lume dopo acquistati i tre: 1.° che, avendo pur una equazione di secondo grado immaginarie le due radici, reale cionondimeno è la somma loro, siccome uguale al coefficiente del secondo termine di essa equazione; 2.° che una equazione di terzo grado componesi di una di primo, ed una di secondo insieme moltiplicate; 3.° che il coefficiente in particolare del secondo termine di una equazione di 3.° grado formasi per l'aggregato delle tre radici di lei. Il secondo di questi lumi gli mostrava la equazione di 3.° grado, rispetto a due delle sue radici, soggetta ai casi della equazione di secondo sua componente, ad avere cioè in questa o due radici reali, o niuna. Il primo, ed il terzo congiunti lo scorgevano ad inferire dover essere la terza radice della equazione di terzo grado reale, perchè essendo immaginaria, non potrebbe, aggregata alla somma in ogni caso reale delle due somministrate dall'equazione di secondo, formare il reale coefficiente della stessa equazione di terzo grado.

Nè si appagò Cardano di una vaga cognizione dei due casi nelle cubiche equazioni soli possibili, o di una, o di tre reali radici; ma a cercarne innoltrossi, e discoprir ne seppe le condizioni, e i limiti.

1.° Nelle equazioni $x^3+q=px$; $x^3=px+q$ vi sono tre radici se $\frac{4}{27}p^3>$, od almeno $=q^2$; e non ve ne ha, che una, se $\frac{4}{27}p^3<q^2$.

2.° Nelle equazioni $x^3+q=nx^2$; $x^3+nx^2=q$ vi hanno tre radici se $\frac{4}{27}n^3>$, od almeno $=q$, e non; ve ne ha, che una, se $\frac{4}{27}n^3<q$.

Io non so con sicurezza per qual via Cardano recato siasi a tali determinazioni; ma trovone una, che, partendo dalle cognizioni che egli aveva, speditamente vi conduce, e che perciò è molto verisimile essere la da lui battuta. Supposto, che m sia la una radice, che certamente aver debbe la equazione $x^3=px\pm q$, fatta, al modo di Cardano, la divisione di $x^3-m^3=px\pm q-m^3$ per $x-m$, ed ottenuta a quoziente la equazione $x^2+mx+m^2=p$, lo scioglimento di questa porge le due radici $x=-\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}$. Saranno queste reali, se sia $p>\frac{3}{4}m^2$, ed ancora se sia $p=\frac{3}{4}m^2$, e saranno immaginarie se sia

$p < \frac{3}{4} m^2$. Ecco le prime condizioni, che ci si affacciano, ma che immediate non fanno che assegnare i limiti della grandezza della radice m rispetto a p nei due casi. Un poco però di industrioso operare su di esse condizioni ci scorge al desiderato fine.

La prima condizione $p > \frac{3}{4} m^2$ congiunta con il supposto, che m sia radice di $x^3 = p x \mp q$, cioè che sia $m^3 = p m \mp q$, dà successivamente $p m > \frac{3}{4} m^3 > \frac{3}{4} p m \mp \frac{3}{4} q$, $\frac{1}{4} p m > \mp \frac{3}{4} q$, $p m > \mp 3 q$, $m^2 > \frac{3^2 q^2}{p^2}$, a più forte ragione, tornando donde si cominciò, $\frac{4}{3} p > \frac{3^2 q^2}{p^2}$, $\frac{4}{27} p^3 > q^2$.

Dalla seconda condizione $p = \frac{3}{4} m^2$ si procede a $p m = \frac{3}{4} m^3 = \frac{3}{4} p m \mp \frac{3}{4} q^2$, $\frac{1}{4} p m = \mp \frac{3}{4} q$, $p m = \mp 3 q$, $m^2 = \frac{3^2 q^2}{p^2} = \frac{4}{3} p$, $\frac{4}{27} p^3 = q^2$.

Il progresso della terza condizione $p < \frac{3}{4} m^2$ si è $p m < \frac{3}{4} m^3 < \frac{3}{4} p m \mp \frac{3}{4} q$, $\frac{1}{4} p m < \mp \frac{3}{4} q$, $pm < \mp 3 q$, $m^2 < \frac{3^2 q^2}{p^2}$, a ragion più forte $\frac{4}{3} p < \frac{3^2 q^2}{p^2}$, $\frac{4}{27} p^3 < q^2$.

Rimane adunque dimostrato aver l'equazione $x^3 = p x \mp q$ tre reali radici, essendo $\frac{4}{27} p^3 >$, od $= q^2$.
Ed una sola, essendo $\frac{4}{27} p^3 < q^2$.

Sebbene tre sieno le reali radici, tanto essendo $\frac{4}{27} p^3 > q^2$, quanto essendo $\frac{4}{27} p^3 = q^2$; passa però tra l'uno e l'altro evento una differenza, qual è, che essendo $\frac{4}{27} p^3 > q^2$, le tre radici sono tutte disuguali, ed essendo $\frac{4}{27} p^3 = q^2$, due sono uguali. Si vede chiaro la verità e la cagione di tal differenza, ritornando all'origine delle condizioni. La condizione $\frac{4}{27} p^3 > q^2$ nasce da $p > \frac{3}{4} m^2$; il che supposto, sussiste in real valore il radicale $\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}$, e le due radici $x=-\frac{1}{2}m+\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}$, $x=-\frac{1}{2}m-\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}$ sono due radici disuguali. La condizione $\frac{4}{27}p^3=q^2$ discende da $p=\frac{3}{4}m^2$, nella quale ipotesi, annullandosi il radicale $\sqrt{\left(p-\frac{3}{4}m^2\right)}$, codeste due radici si uguagliano nello stesso valore $-\frac{1}{2}m$.

A determinar ora le condizioni dei due casi rispetto alle equazioni $x^3+q=nx^2$; $x^3+nx^2=q$, non si ha che a spogliarle del secondo termine nx^2, e richiamarle alle due superiori con sostituire nella prima in luogo di x la somma $y+\frac{1}{3}n$, nella seconda la differenza $y-\frac{1}{3}n$. Operiamo su la prima, e si trasferirà l'operato su la seconda. Eseguita la sostituzione di $y+\frac{1}{3}n$ in luogo di x risulta $y^3=\frac{1}{3}n^2y+\frac{2}{27}n^3-q$. Confrontando pertanto questa con l'equazione $x^3=px\pm q$ si ha $\frac{1}{3}n^2$ in luogo di p, e $\frac{2}{27}n^3-q$ in luogo di $\pm q$. Dunque sostituendo nelle condizioni $\frac{4}{27}p^3>$, od $=q^2$; $\frac{4}{27}p^3<q^2$ in luogo di p, q i corrispondenti valori imparasi aver l'equazione $y^3=\frac{1}{3}n^2y+\frac{2}{27}n^3-q$, e per conseguenza la $x^3+q=nx^2$.

tre radici, essendo $\frac{4}{27}\left(\frac{1}{3}n^2\right)^3>\left(\frac{2}{27}n^3-q\right)^2$, ovvero $\frac{4}{27^2}n^6>\frac{4}{27^2}n^6-\frac{4}{27}n^3q+q^2$, o riduzion fatta, $\frac{4}{27}n^3>q$.

Ed eziandio, essendo $\frac{4}{27}n^3=q$.

Per l'opposto non aver, che una radice, essendo $\frac{4}{27}n^3<q$.

Gettò anche Cardano uno sguardo alle condizioni dei due casi relativamente alle due equazioni $x^3+nx^2+q=px$; $x^3=nx^2+px+q$, e scrisse che, se p sia assai piccolo, una sola ne sarà la radice, e che diverran tre, divenendo p

molto grande. Questo però è uno scrivere vago, ed indeterminato. Per supplire al difetto, ed insieme vederne la cagione, si tolga all'equazione $x^3 + n x^2 + q = p x$ il secondo termine $n x^2$, in luogo di x sostituendo $x - \frac{1}{3} n$. Proviene l'equazione $y^3 = \left(\frac{1}{3} n + p \right) y - \left(\frac{2}{27} n^3 + q + \frac{1}{3} n p \right)$ che paragonata con la $x^3 = p x - q$ mostra stare $\frac{1}{3} n + p$ in luogo di p, e $\frac{2}{27} n^3 + q + \frac{1}{3} n p$ in luogo di q. Fatte pertanto le debite sostituzioni nella condizione $\frac{4}{27} p^3 > q^2$, questa riceve la forma $\frac{4}{27} \left(\frac{1}{3} n^2 + p \right)^3 > \left(\frac{2}{27} n^3 + q + \frac{1}{3} n p \right)^2$, che sviluppasi in $\frac{4}{27^2} n^6 + \frac{4}{81} n^4 p + \frac{4}{27} n^2 p^2 + \frac{4}{27} p^3 > \frac{4}{27^2} n^6 + q^2 + \frac{1}{9} n^2 p^2 + \frac{4}{27} n^3 q + \frac{4}{81} n^4 p + \frac{2}{3} n p q$, e tolte le quantità uguali si riduce ad $\frac{1}{27} n^2 p^2 + \frac{4}{27} p^3 > q^2 + \frac{4}{27} n^3 q + \frac{2}{3} n p q$. Dal che si fa manifesto aver l'equazione $y^3 = \left(\frac{1}{3} n^2 + p \right) y - \left(\frac{2}{27} n^3 + q + \frac{1}{3} n p \right)$, conseguentemente la $x^3 + n x^2 + q = p x$ tre radici, essendo $\frac{1}{27} n^2 p^2 + \frac{4}{27} p^3 >$, od $= q^2 + \frac{4}{27} n^3 q + \frac{2}{3} n p q$.

Al contrario aver una radice sola, essendo $\frac{1}{27} n^2 p^2 + \frac{4}{27} p^3 < q^2 + \frac{4}{27} n^3 q + \frac{2}{3} n p q$. L'involgimento di p scusa Cardano.

Per trasferire queste condizioni all'equazione $x^3 = n x^2 + p x + q$ non si ha che a cangiare n in $-n$, q in $-q$.

Se in generale si rappresenti per $x^3 - n x^2 + p x - q = 0$ una qualunque equazione di 3.° grado, come nella pag. 165 si è fatto, si troverà aver l'equazione tre radici essendo $\frac{4}{27} \left(\frac{1}{3} n^2 - p \right)^3 >$, od $= \left(\frac{2}{27} n^3 - \frac{1}{3} n p + q \right)^2$ od, in altro modo $\left(\frac{1}{9} n^2 - \frac{1}{3} p \right)^3 \geqq \left(\frac{1}{27} n^3 - \frac{1}{6} n p + \frac{1}{2} q \right)^2$.

All'opposto non averne, che una, essendo $\left(\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{3}p\right)^3 < \left(\frac{1}{27}n^3-\frac{1}{6}np+\frac{1}{2}q\right)^2$.

Siccome per l'equazione $x^3=px\pm q$ si è dimostrato, che, essendo $\frac{4}{27}p^3>q^2$, le tre radici sono disuguali; e che, essendo $\frac{4}{27}p^3=q^2$, due delle tre radici sono uguali; così manifestamente ne segue essere le tre radici disuguali nella equazione $y^3=\left(\frac{1}{3}n^2-p\right)x-\left(\frac{2}{27}n^3+q-\frac{1}{3}np\right)$, in cui fatto $x=y+\frac{1}{3}n$ la completa equazione $x^3-nx^2+px-q=0$ tramutasi, qualora sia $\frac{4}{27}\left(\frac{1}{3}n^2-p\right)^3>\left(\frac{2}{27}-\frac{1}{3}np+q\right)^2$, ovvero $\left(\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{3}p\right)^3>\left(\frac{1}{27}n^3-\frac{1}{6}np+\frac{1}{2}q\right)^2$; ed essere due delle tre radici uguali, allorchè sia $\left(\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{3}p\right)^3=\left(\frac{1}{27}n^3-\frac{1}{6}np+\frac{1}{2}q\right)^2$. E poichè le tre radici della equazione completa $x^3+nx^2+px+q=0$ non sono, che le tre radici dell'equazione $y^3=\left(\frac{1}{3}n^2-p\right)y-\left(\frac{2}{27}n^3+q-\frac{1}{3}np\right)$ diminuite tutte di $\frac{1}{3}n$, ne viene di necessaria conseguenza, che le tre radici parimenti della completa equazione $x^3+nx^2+px+q=0$ sieno disuguali, essendo $\left(\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{3}p\right)^3>\left(\frac{1}{27}n^3-\frac{1}{6}np+\frac{1}{2}q\right)^2$; e due diventino uguali, facendosi $\left(\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{3}p\right)^3=\left(\frac{1}{27}n^3-\frac{1}{6}np+\frac{1}{2}q\right)^2$.

Portando ora l'occhio su la generalissima espressione di x, che sta al fine della pag. 165, si vede che il radicale quadrato, cui essa involge, riesce reale quando $\left(\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{3}p\right)^3 < \left(\frac{1}{27}n^3-\frac{1}{6}np+\frac{1}{2}q\right)^2$;

si annienta, allorchè $\left(\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{3}p\right)^3=\left(\frac{1}{27}n^3-\frac{1}{6}np+\frac{1}{2}q\right)^2$;

e si fa immaginario, qualora $\left(\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{3}p\right)^3>\left(\frac{1}{27}n^3-\frac{1}{6}np+\frac{1}{2}q\right)^2$.

Dunque il radicale quadrato, che la espressione di x involge, è reale, ed essa espressione presentasi in ogni parte reale, allorchè la equazione $x^3 - n x^2 + p x + q = 0$ non ha che una radice reale, e le altre due sono immaginarie; il detto radicale quadrato si annulla, e sparisce dalla espressione di x, qualora la equazione ha tre radici reali, ma due fra loro uguali; finalmente il radicale quadrato diventa immaginario, e la espressione di x affacciasi d'immaginarietà implicata, ed al sembiante qual immaginaria, allora appunto quando la equazione è fornita di tre reali radici tutte disuguali. Ciò, che io vengo di dire in generale, contemplata la general equazione $x^3 - n x^2 + p x + q = 0$, incominciò a notarlo Cardano trattando l'equazione $x^3 = p x + q$. La formola tartagliana di x, che trovasi nella terza linea della pag. 156 ha reale il radical quadrato $\sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3\right)}$ allorchè $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} q^2$, che è quando l'equazione $x^3 = p x + q$ non ha che una radice reale, e le altre due immaginarie; perde esso radicale, allorchè $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} q^2$, che è quando l'equazione ha tre radici reali, ma due uguali; e passa ad avere lo stesso radicale immaginario, e rinchiudere immaginaria implicazione, ed ingannare con immaginario aspetto, allorchè $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2$, che è quando l'equazione ha tre radici reali disuguali. È in ciò, che consiste il tanto celebre paradosso della formola detta cardanica, in verità tartagliana.

ARTICOLO III.

Rapporto del numero delle radici positive, e del numero delle negative al ripartimento de' termini tra sinistra e destra, o nel moderno stile ai segni loro ad una sola banda.

Chi il crederebbe, che Cardano spinto avesse le viste sue sino a quel teorema, per cui di tanta lode si colma il Descartes? Non certamente chi si lasciasse sopraffare dalla dilicatissima esattezza ostentata da Montucla timoroso, che per l'onore a Cardano da lui dato di aver saputo nelle equazioni riconoscere la capacità di più radici, e delle negative ancora, si trapassi ad accordargli di troppo. Mi segua però l'analista nella raccolta delle dottrine di Cardano per il denso campo del Capo I dell'*Arte magna*. Egli è certamente un bel mirare la copia, e la sottilità delle indagini, e delle osservazioni, lo studio e la sagacità, onde, equazione per equazione, investiga, e discerne le radici vere, e le false; e confrontando equazione ad equazione rintraccia, e scopre lo scambio reciproco delle vere, e delle false radici; nè in particolare no soltanto, ma eziandio in generale. Ecco i risultati:

1.° Si commutano due radici, una vera in falsa, una falsa in vera generalmente dall'equazione $x^2 = px + q$ alla $x^2 + px = q$, e reciprocamente da questa a quella.

Esempio. $x^2 = 4x + 21$; $x^2 + 4x = 21$: le due radici della prima 7, -3; della seconda -7, $+3$.

2.° Si commutano tre radici, due vere in false, una falsa in vera dall'equazione $x^3 + q = px$ all'equazione $x^3 = px + q$, e reciprocamente da questa a quella, se $\frac{4}{27}p^3 > q^2$.

Esempio. $x^3+9=12x$; $x^3=12x+9$: radici della prima $+3$, $-1\frac{1}{2}+\sqrt{5\frac{1}{4}}$, $-1\frac{1}{2}-\sqrt{5\frac{1}{4}}$; della seconda -3, $1\frac{1}{2}-\sqrt{5\frac{1}{4}}$, $1\frac{1}{2}+\sqrt{5\frac{1}{4}}$.

3.° E vale lo stesso se $\frac{4}{27}p^3=q^2$. Esempio. $x^3+16=12x$; $x^3=12x+16$: radici della prima $+2$, $+2$, -4; della seconda -2, -2, $+4$.

4.° Ma nel caso di $\frac{4}{27}p^3<q^2$, non avendo l'equazione $x^3+q=px$ che una radice falsa, e non più, che una reale vera l'equazione $x^3=px+q$, non vi ha conseguentemente dall'una all'altra più di una commutazione di radice reale, di falsa in vera, e viceversa.

Esempio. $x^3+21=2x$; $x^3=2x+21$: radice della prima -3; della seconda $+3$.

Universalmente adunque si commutano nelle equazioni $x^3+q=px$; $x^3=px+q$ di vero in falso, di falso in vero le reali radici, che hanno, od una, o tre.

5.° Si commutano tre radici, una vera in falsa, due false in vere dall'equazione $x^3+nx^2=q$ alla $x^3+q=nx^2$, e reciprocamente da questa a quella se $\frac{4}{27}n^3 \geqq q$. .

Esempio. $x^3+11x^2=72$; $x^3+72=11x^2$: radici della prima $-4+\sqrt{40}$, $-4-\sqrt{40}$, -3; della seconda $+4-\sqrt{40}$, $+4+\sqrt{40}$, $+3$.

6.° Ma le tre commutazioni di real vero, e real falso si restringono ad una, se sia $\frac{4}{27}n^3<q$, per venire in tal caso la equazione prima $x^3+nx^2=q$ sfornita delle due radici reali false, e la seconda $x^3+q=nx^2$ delle due reali vere.

Esempio. $x^3+3x^2=20$; $x^3+20=3x^2$: radice della prima $+2$; della seconda -2.

7.° L'equazione $x^3+nx^2+px=q$, od ha solamente una radice vera, che si cangia in falsa nell'equazione x^3+px+

$q = n x^2$; od ha in oltre due false, che si cambiano in vere nella seconda.

Esempio 1.° $x^3 + x^2 + 2x = 16$; $x^3 + 2x + 16 = x^2$: sola radice vera della prima $+2$; falsa della seconda -2.

Esempio 2.° $x^3 + 6x^2 + 3x = 18$; $x^3 + 3x + 18 = 6x^2$: radici della prima $-1\frac{1}{2} + \sqrt{8\frac{1}{4}}$, $-1\frac{1}{2} - \sqrt{8\frac{1}{4}}$, -3; della seconda $1\frac{1}{2} - \sqrt{8\frac{1}{4}}$, $1\frac{1}{2} + \sqrt{8\frac{1}{4}}$, $+3$.

8.° Con simili scambj si corrispondono le due equazioni $x^3 = n x^2 + p x + q$; $x^3 + n x^2 + q = p x$. Se p sia assai piccolo, la equazione prima ha soltanto una radice vera, che divien falsa nella seconda.

Esempio. $x^3 = 2x^2 + x + 6$; $x^3 + 2x^2 + 6 = x$: radice vera ed unica reale della prima $+3$; falsa ed unica reale della seconda -3.

Che se p cresca a segno, che la prima equazione acquisti, con la vera, due radici false, le medesime tramutate in vere, oltre la falsa, acquisterà la seconda.

Esempio. $x^3 = 3x^2 + 20x + 6$; $x^3 + 3x^2 + 6 = 20x$: radici della prima $3 + \sqrt{11}$, $3 - \sqrt{11}$, -3; della seconda $-3 - \sqrt{11}$, $-3 + \sqrt{11}$, $+3$.

9.° Non altrimenti, o l'una, o le tre radici si scambiano fra loro le due equazioni $x^3 + n x^2 = p x + q$; $x^3 + q = n x^2 + p x$. Anche qui, se una è la radice, essa è vera nella prima equazione, falsa nella seconda; e se le radici son tre, una vera, due false sono quelle della prima, una falsa, due vere, e corrispondentemente le stesse, quelle della seconda.

Esempio 1.° $x^3 + 6x^2 = 3x + 72$; $x^3 + 72 = 6x^2 + 3x$: radice vera della prima $+3$; della seconda -3.

Esempio 2.° $x^3 + 3x^2 = 5x + 4$; $x^3 + 4 = 3x^2 + 5x$. radici della prima $\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}}$, $\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$, -4; della seconda $-\frac{1}{2} - \sqrt{1\frac{1}{4}}$, $-\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}} + 4$.

Qui Cardano dà un saggio di dimostrazione lineare. Eccone il succo. Rappresenti la linea AB (*Fig.* 4) il valore di x^3, e vi si congiunga BC rappresentante il numero q. Similmente rappresenti DE il valore di nx^2, ed EF quello di px. Posto $x^3 + q = nx^2 + px$, prendasi la differenza $nx^2 - x^3 = DE - AB$, la qual sia $= GE$; la differenza $q - px = BC - EF$ sarà parimenti $= GE$: perchè essendo $AB + BC = DE + EF$, di quanto DE supera AB, di tanto reciprocamente BC è necessità, che superi EF. Dunque si avrà $nx^2 - x^3 = q - px$. Sia ora la linea h una delle radici reali di $x^3 + q = nx^2 + px$: come effettua questa equazione, così è necessaria conseguenza, che effettui quella delle differenze $nx^2 - x^3 = q - px$; cioè sostituendo h in luogo di x si effettueranno del pari $h^3 + q = nh^2 + ph$, e $nh^2 - h^3 = q - ph$. Ma questa equazione è una stessa, che l'equazione $n(-h)^2 + (-h)^3 = q + p \times -h$, e questa sostituito x alla falsa, o negativa quantità $-h$ veste la forma $x^3 + nx^2 = q + px$; dunque questa equazione si effettua con la radice vera h dell'equazione $x^3 + q = nx^2 + px$, cangiandola di vera in falsa. Vale istessamente il discorso, se al contrario suppongasi $-h$ la falsa radice di $x^3 + q = nx^2 + px$: si effettuerà in tal supposto in un con l'equazione $(-h)^3 + q = n(-h)^2 + p \times -h$ la equazione delle differenze $n(-h)^2 - (-h)^3 = q - p \times -h$, la quale termina nella forma $nh^2 + h^3 = q + ph$, e sostituito x ad h prende l'aspetto $x^3 + nx^2 = px + q$.

10.° Le equazioni $x^2 + q = p x$; $x^3 + p x = q$; $x^3 + p x = n x^2 + q$ non possono avere radice falsa. Non la prima, perchè il $-$ quadrato producendo $+$, il primo membro di essa $x^2 + q$ non conterrebbe che $+$, e dovrebbe uguagliarsi al $-$ nel secondo membro $p x$ contenuto; il che ripugna. Non le altre due, perchè riuscendo $-$ il cubo di $-$, il primo loro membro formato di soli $-$ uguagliar si dovrebbe al secondo formato di $+$, cosa assurda. La equazion prima $x^2 + q = p x$ ha due radici vere, o manca affatto di radice reale. La seconda $x^3 + p x = q$ non ha mai più, che una real radice, ed essa vera. La terza $x^3 + p x = n x^2 + q$ può avere tre radici vere. A queste equazioni ommette Cardano di contrapporre le rispettive reciproche, che sono $x + p x + q = o$; $x^3 + p x + q = o$; $x^3 + n x^2 + p x + q = o$ non capaci di radici reali, che false. Ma se, non essendo tali equazioni sofferte dal concetto allor comune di equazione, non le contrappose egli Cardano espressamente, fu per certo un contrapporle implicito la regola del falso porre, cioè di porre la cercata quantità $-x$, in vece di porla x, onde avere in luogo di queste equazioni le superiori $x^2 + q = p x$; $x^3 + p x = q$; $x^3 + p x = n x^2 + q$. Egli è questo manifestamente un riconoscere il tramutamento delle une nelle altre per il solo cambio di x in $-x$, e siccome nelle une la capacità di radici reali soltanto vere, così nelle altre di radici reali soltanto false.

11.° Quando le denominazioni estreme sono uguali alle estreme l'equazione ha sempre una radice reale vera, e sempre una sola. Vuol dire Cardano, che la scala ordinata dei gradi sia in un punto divisa, e la parte verso il supremo dei gradi, che è uno degli estremi della scala, sia uguale alla parte verso l'altro estremo, che è il termine noto. In moderno stile di letterali specie, in illimitato estendimento all'equazione di grado ω, in forma abbracciante le varietà tutte il caso da Cardano considerato si è $x^{\omega} + a x^{\omega - 1} + b x^{\omega - 2} \ldots + f x^{\omega - \mu} = g x^{\omega - \mu - 1} + h x^{\omega - \mu - 2} \ldots + p x^{\omega - (\omega - 1)} + q$. Asserisce dunque Cardano, che nelle equazioni di tal forma, cioè di un numero di termini ordinatamente discendenti dal supremo uguale al seguito di tutti gli altri, vi ha sempre una radice reale vera, ed una sola sempre. Vero si è già veduto il teorema nelle equazioni $x^2 = p x + q$; $x^2 + p x = q$, sotto il n. 1.°, nella equazione $x^3 = p x + q$ sotto i n.i 2.°, 3.°, 4.°; nella equazione $x^3 + n x^2 = q$ sotto i n.i 5.°, 6.°; nella equazione $x^3 + n x^2 + p x = q$ sotto il num. 7.°; nella $x^3 = n x^2 + p x + q$ sotto il n. 8.°; nella $x^3 + n x^2 = p x + q$ sotto il n. 9.°; nella $x^3 + p x = q$ sotto il n. 10.°. Cardano nel Capo XVIII dell'*Arte magna dell'Aritmetica* amplifica espressamente il teorema alle equazioni di 4.° grado $x^4 + m x^3 + n x^2 = q$; $x^4 + m x^3 + n x^2 = p x + q$. Se tale amplificamento sia in lui stato effetto di mera induzione, o più nobil frutto di sottile specolamento, e raziocinio, io nol dirò. Ma se lo fece ragionando, fu probabilmente così che lo fece. Nell'equazione $x^4 + m x^3 + n x^2 = q$, o meglio, $x^4 + m x^3 + n x^2 + p x = q$, supposto $x = 0$ il primo membro in vece di uguagliarsi a q diventa zero: cioè il supposto di $x = 0$ dà un risultato difettivo; ma se suppongasi $x = q$, il primo membro diviene $q^4 + m q^3 + n q^2 + p q > q$; cioè il supposto di $x = q$ dà un risultato eccedente. Dunque, argomentando al modo che pella indefinita approssimazione, tra zero, e q vi deve esser un valore all'equazione soddisfacente, cioè una radice di lei vera o sia positiva, siccome tra zero, e q positivo interposta. Che ella poi sia unica imparasi dividendo l'equazione $x^4 + m x^3 + n x^2 + p x - q = 0$ al modo nostro, od al modo di Cardano $x^4 - l^4 = - m x^3 - n x^2 + p x + q - l^4$ per $x - l$, intesa per l la vera radice, di cui si è dimostrato dover essere l'equazione fornita. Per quoziente della divisione si trova $x^3 + (m + l) x^2 + (l^2 + m l + n) x + l^3 + l^2 m + n l + p = 0$, equazione, che è incapace di radice reale vera, e con ciò manifesta, che l'equazione $x^4 + m x^3 + n x^2 + p x = q$ non può averne altra fuori di l. Il raziocinio è simile per la equazione $x^4 + m x^3 + n x^2 = p x + q$. Posto $x = 0$, si ha $0 > q$; posto $x = p + q$, si ha $(p + q)^4 + m (p + q)^3 + n (p + q)^2 > p (p + q) + q$: dunque tra zero che dà un risultato difettivo, e $p + q$ che dà un risultato eccedente, debbe esservi un valor positivo l dante $l^4 + m l^3 + n l^2 = p l + q$, cioè radice reale vera dell'equazione $x^4 + m x^3 + n x^2 = p x + q$. Divisa questa equazione per $x - l$ proviene a quoziente $x^3 + (l + m) x^2 + (l^2 + m l + n) x + l^3 + m l^2 + n l - p = 0$. Dall'essere $l^4 + m l^3 + n l^2 = p l + q$, ne segue esser $l^4 + m l^3 + n l^2 > p l$, o $l^3 + m l^2 + n l > p$: dunque $l^3 + m l^2 + n l - p$ è quantità positiva, e perciò la equazion cubica risultante a quoziente è di quelle destitute di radice real vera; donde rendesi palese, che nell'equazione $x^4 + m x^3 + n x^2 = p x + q$, quanto infallibilmente vi ha una real radice vera l, tanto irrefragabilmente è sola. Trasferendo il raziocinio all'equazione $x^4 + m x^3 = n x^2 + p x + q$, con porre $x = 0$, $x = n + p + q$, si conoscerà per il risultato difettivo della prima, e l'eccedente della seconda posizione dover esservi tra zero, ed $n + p + q$ un valore l radice vera di essa equazione. Dividendola per $x - l$ ne uscirà lo stesso quoziente cubico, che nel secondo caso, mutato solo n in $-n$, uscirà cioè $x^3 + (l + m) x^2 + (l^2 + m l - n) x + l^3 + m l^2 - n l - p = 0$. Dall' effettuarsi per l l'equazione $l^4 + m l^3 = n l^2 + p l + q$, seguendone $l^4 +$

$ml^3 > nl^2 + pl$, o sia $l^3 + ml^2 > nl + p$, e molto più $l^3 + ml^2 > nl$, ovvero $l^2 + ml > n$, si fa perspicuo tutti i termini di codesto quoziente cubico, non altrimenti che sopra, esser positivi, nè poter in lui cadere radice reale vera, nè altra in conseguenza oltre l nella equazione $x^4 + mx^3 = nx^2 + px + q$. Se trattisi della equazione $x^4 = mx^3 + nx^2 + px + q$ non si ha che a cangiare la seconda posizione $x = n + p + q$ in $x = m + n + p + q$, per avere con sicurezza ed universalità un risultato eccedente, dal quale, e dal contrario difettivo risultato della posizione $x = o$ inferire tra l'una, e l'altra posizione l'esistenza di un valore l necessariamente adempiente l'equazione, con dare $l^4 = ml^3 + nl^2 + pl + q$. E nel quoziente cubico non occorre cangiare che m in $-m$ e sarà cionulladimeno $x^3 + (l - m)x^2 + (l^2 - ml - n)x + l^3 - ml^2 - nl - p = o$ una equazione di termini tutti positivi; perchè, essendo $l^4 = ml^3 + nl^2 + pl + q$ è conseguentemente $l^4 > ml^3 + nl^2 + pl$, ovvero $l^3 > ml^2 + nl + p$, e molto più $l^3 > ml^2 + nl$, o sia $l^2 > ml + n$, e di nuovo molto più $l^2 > ml$, od $l > m$. Laonde anche in questo cubico quoziente apparisce chiara la impossibilità di qualunque radice reale vera e conseguentemente di più di una nell'equazione $x^4 = mx^3 + nx^2 + px + q$. Così per tutte e quattro le equazioni $x^4 + mx^3 + nx^2 + px = q$; $x^4 + mx^3 + nx^2 = px + q$; $x^4 + mx^3 = nx^2 + px + q$; $x^4 = mx^3 + nx^2 + px + q$ resta dimostrato il teorema di Cardano. Egli non recò esempj, che della prima mutilata del termine px, e della seconda; ma la sua asserzione è in termini ampissimi ed illimitati, ed al certo havvi ragione, se non anzi dovere, di credere, che Cardano abbia almeno considerati tutti i casi della equazione di 4.° grado. Senza, che più mi dilunghi, comprende il Leggitore intelligente come la dimostrazione, mercè il suo andamento generale, facilmente si dilati su la indefinita equazione $x^{\omega}+ax^{\omega-1}+bx^{\mu-2}\ldots+fx^{\omega-\mu}=gx^{\omega-\mu-1}$ $\ldots\ldots+px+q$.

Essendo ω numero pari, come essendo l'equazione di grado 4.°, per il teorema di non poter essere nelle equazioni di grado pari le radici reali, che in numero pari, all' unica radice vera sarà necessariamente congiunta almeno una reale radice falsa.

12.° Allorchè le denominazioni estreme sono uguali alle intermedie, può accadere, che nell'equazione vi sieno due radici vere, ma può anche accadere, che non ve ne abbia veruna. L'espressione generale del caso da Cardano supposto si è $x^{\omega}+ax^{\omega-1}+bx^{\omega-2}\ldots\ldots+f\omega^{\omega-\mu}\ldots\ldots+mx^{\omega-\mu-\pi-1}\ldots\ldots$ $+px+q=gx^{\omega-\mu-1}+hx^{\omega-\mu-2}\ldots+lx^{\omega-\mu-\pi}$. Si presenta in particolare la verità del teorema nella equazione $x^2+q=px$ sotto i num.ⁱ 2.°, 3.°, 4.°; nella $x^3+q=nx^2$ sotto i n.ⁱ 5.°, 6.°; nella $x^3+px+q=nx^2$ sotto il num. 7.°; nella $x^3+nx^2+q=px$ sotto il n. 8.°; nella $x^3+q=nx^2$ $+px$ sotto il n. 9.°; nella $x^3+q=px$ sotto il n. 10.°. A far conoscere, che il teorema non si limita alle equazioni di 2.°, e di 3.° grado lo applica Cardano all'equazione di 4.° $x^4+mx^3+q=nx^2+px$. Similmente vale per le equazioni $x^4+q=mx^3+nx^2+px$; $x^4+mx^3+nx^2+q=px$; $x^4+mx^3+px+q=nx^2$; $x^4+nx^2+px+q=mx^3$. E ben apertamente ci manifesta egli Cardano, che non fu su d'una mera induzione, che fondò il teorema, ma che accoppiovvi un raziocinio specolativo, con il quale penetrò a vedere come una equazione della forma assegnata aver può due reali radici vere. Sia l'equazione $x^3+q=px^2$. Suppone Cardano, che vi abbia numero, che diremo N, tale, che sostituito in luogo di x renda $N^3+q<pN^2$. Così nell'

equazione $x^3 + 72 = 11 x^2$ da me recata sotto il n. 5.° vi ha 4, che rende $4^3 + 72 < 11 \times 4^2$, cioè $64 + 72 < 176$; ma nell'equazione sotto il n. 6.° situata $x^3 + 20 = 3 x$ non vi ha numero N, che possa rendere $N^3 + 20 < 3 N^2$. Nel caso pertanto, che abbia luogo il supposto di un numero N, per cui si faccia $N^3 + q < p N^2$, dice Cardano avervi due modi, atti a togliere questa minoranza, ed indurre l'uguaglianza: l'uno con diminuire $p N^2$ più che N^3; l'altro con accrescere N^3 più che $p N^2$: essere il primo proprio di un numero minore di N, il secondo di un numero di esso N maggiore; per conseguenza dovervi essere due numeri, l'uno sotto, l'altro sopra N inducenti uguaglianza, o sia soddisfacenti all'equazione $x^3 + q = p x^2$, e reali radici vere, o positive di lei. Nell'addotto esempio dell'equazione $x^3 + 72 = 11 x^2$ si è veduto, che il numero 4 rende $4^3 + 72 < 11 \times 4^2$; or vi ha un numero di 4 minore, che è 3, per cui il prodotto del quadrato in 11 si diminuisce tanto di più, di quello diminuiscasi il cubo, quanto fa di bisogno a cangiar la minoranza nella uguaglianza $3^3 + 72 = 11 \times 3^2$, cioè $27 + 72 = 99$; e vi ha un numero di 4 maggiore, che è $4 + 2\sqrt{10}$, per cui il cubo si accresce tanto di più, di quello accrescasi il prodotto del quadrato in 11, quanto è di mestieri, perchè alla minoranza succeda l'uguaglianza $(4 + 2\sqrt{10})^3 + 72 = 11 \times (4 + 2\sqrt{10})^2$, cioè $616 + 176\sqrt{10} = 11 \times 56 + 11 \times 16\sqrt{10}$. Il raziocinio di Cardano ha bisogno di essere recato a maggior lume, forza, e precisione. Tutto io gli aggiungo brevemente. Fatto, nell'equazione $x^3 + q = p x^2$, l'$x = 0$ si ha $q > 0$, cioè si ha nel primo membro un risultato eccedente; facciasi $x = p + q$, e si avrà di nuovo nel primo membro un risultato eccedente, essendo evidentemente, e necessariamente $(p + q)^3 + q > p (p + q)^2$. Ora suppongasi esservi un numero N, che renda $N^3+q<pN^2$, cioè che dia nel primo membro un risultato difettivo. Questo numero non può essere un numero maggiore di $p+q$, quale $p+q+a$, ripugnando essere $(p+q)^3+3(p+q)^2a+3(p+q)^2a^2+a^3+q<p(p+q)^2+2p(p+q)a+pa^2$; poichè siccome $(p+q)^3+q>p(p+q)^2$, così eziandío $3(p+q)^2a+3(p+q)a^2+a^3>2p(p+q)a+pa^2$. È dunque N un numero $<p+q$. Laonde tra zero, e $p+q$, che danno due risultati eccedenti, vi ha un numero N, che dà risultato difettivo; conseguentemente si hanno due passaggj, il primo dal risultato eccedente di zero al risultato difettivo di N, il secondo da questo risultato difettivo al risultato eccedente di $p+q$, li quali due passaggj menano a conchiudere l'esistenza di due numeri, uno tra zero ed N, l'altro tra N, e $p+q$, atti a dare risultato giusto, cioè a verificare l'equazione $x^3+q=px^2$, e perciò reali radici vere o positive di lei. Cardano porta lo spirito del suo raziocinio ad una estensione illimitata, dicendo, che, siccome per una denominazione media sola, qual px^2, così vale per più, ancorchè fossero cento, facendo insieme tutte la figura di una sola, perchè mutato il numero sostituito ad x, tutte del pari si accrescono o diminuiscono. *Et pariter si fuerint denominationes mediae plures, etiam si centum fuerint, quia subeunt rationem unius, quoniam aestimatione mutata omnes pariter denominationes mediae augentur aut minuuntur.* Dicendo cento, volle dire un numero grosso qualunque; e con tale idea ben si vede quanto si spinse Cardano oltre le equazioni di 3.° e di 4.° grado. Nè contemplò il solo caso della somma dei due termini estremi, cioè del supremo ignoto, e del noto uguagliata al complesso di tutti gli intermedj, ma i casi ancora di due pezzi della scala ai due estremi presi, congiunti, ed

uguagliati al pezzo di mezzo, poichè nel Capo XVIII dell' *Arte magna dell'Aritmetica* di uno di sì fatti casi recò egli espresso esempio su la equazione $x^4 + m x^3 + q = n x^2 + p x$. Onde sembra potersi con giustizia dire, aver Cardano slanciati i suoi sguardi fino su la generale equazione al principio di questo numero da me estesa. A trasportare dal particolare della equazione $x^3 + q = p x^2$ ad essa generale equazione ciò, che io ho aggiunto, ad illustrazione, a finitezza, a corroboramento, al raziocinio di Cardano, basta cangiare la seconda posizione $x = p + q$ nella posizione $x = q +$ la somma di tutti i coefficienti g, $h \dots l$ dei termini medj, che formano il secondo membro dell'equazione; e si può anche porre $x = \infty$, cioè all'infinito, per la qual posizione il primo membro contenente il supremo termine x^ω conterrà l'infinito al supremo grado ω elevato, e sarà necessariamente maggiore del secondo, anzi tutti i termini scomparendo al confronto di ∞^ω, il risultato ultimo si potrà contare essere $\infty > 0$. Laonde avendosi nel primo membro due risultati eccedenti, uno per la posizione $x = 0$, l'altro per la posizione $x = \infty$, se vi sia poi un numero N, che dia risultato difettivo, si appaleserà esservi due radici reali vere dell'equazione, una tra zero ed N, l'altra tra N ed ∞, e più ristrettamente tra N, e la somma $q + g + h \dots + l$ collocata.

13.° Se le denominazioni alternano dall'uno all'altro membro dell'equazione, essa può avere un numero di radici vere uguale al suo grado, tre se è di 3.° grado, 4 se è di 4.°, e così vadasi proseguendo. La forma supposta dell' equazione si è in generale $x^\omega + b x^{\omega-2} + d x^{\omega-4} + f x^{\omega-6} \dots \pm p x = a x^{\omega-1} + c x^{\omega-3} + e x^{\omega-5} \dots \pm q$. Vale il segno $+$ pei termini $p x$, q, se il grado ω dell'equazione sia dispari, e significa, che debbono $p\,x$, q rispettivamente stare nel primo, e nel secondo membro dove son posti; vale il segno $-$, se il grado ω dell'equazione sia pari, e significa, che debbono $p\,x$, q essere scambievolmente trasportati, $p\,x$ dal primo nel secondo, q dal secondo nel primo membro. A dir vero, Cardano non enuncia questo teorema con il linguaggio di generalità usato nei due antecedenti, e non ho potuto trovare che applicato l'abbia più in là, che all'equazione di 3.° grado $x^3+p\,x=n\,x^2+q$. Prende bensì rispetto a questa a dimostrarlo specolativamente, e lo fa richiamando in parte questo caso al caso antecedente da lui dichiarato coll'esempio $x^3+q=p\,x^2$. Supposto nell'equazione $x^3+px=n\,x^2+q$ il coefficiente p grande, riflette potersi l'equazione verificare per un valore x assai piccolo, compensando il prodotto $p\,x$ la piccolezza del cubo x^3. Che se poi vi sia un numero N, che faccia $N^3+p\,N<n\,N^2+q$, applicando il raziocinio fatto su la equazione $x^3+q=p\,x^2$, si intenderà dovervi essere due numeri, uno minore, l'altro maggiore di N idonei a convertir la minoranza $N^3+p\,N<n\,N^2+q$ in uguaglianza, cioè a verificare l'equazione $x^3+p\,x=n\,x^2+q$; per conseguenza tre saranno i modi di verificamento, o tre le radici di tale equazione. A dilucidare questo ragionamento, si avverta, che posto $x=0$ risulta nel primo membro $0<q$, cioè difetto; che per la grandezza di p può esservi una piccola quantità, che noterò a, la quale dia $a^3+p\,a>n\,a^2+q$, cioè eccesso; che eccesso necessariamente proviene sostituendo in luogo di x la somma $n+p+q$, che cioè $(n+p+q)^3+p\,(n+p+q)>n\,(n+p+q)^2+q$. Per le quali cose, se vi sia un numero, che sarà necessariamente minore di $n+p+q$, il quale produca $N^3+p\,N<n\,N^2+q$, cioè difetto, si avrà questa alternativa: difetto–eccesso–difet-

to-eccesso: vale dire la serie di tre passaggj, indicanti tre interposti uguagliamenti per tre valori intermedj a zero, a, N, $n+p+q$.

Facciamoci ora a quell'epoca, quando lo stile introdotto fu di disporre tutti ad una parte ordinatamente i termini di una equazione, uguagliando il complesso loro a zero; e poniamo un analista, che penetrate le dottrine di Cardano, se le raccogliesse sott'occhio al nuovo stile ridotte, come nella seguente Tavola, con un asterisco od altro segno supplendo i termini nelle equazioni mancanti.

Ha due radici, una vera, una falsa

$$x^2 - px - q = 0.$$

Si cangia la vera in falsa, la falsa in vera nella

$$x^2 + px - q = 0.$$

Ha o solo una radice falsa, od una falsa e due vere

$$x^3 * - px + q = 0.$$

Si cangian la falsa in vera, le due vere in false nella

$$x^3 * - px - q = 0.$$

Ha o una radice vera solo, od una vera, due false

$$x^3 + nx^2 * - q = 0.$$

Si cangian la vera in falsa, le false in vere nella

$$x^3 - nx^2 * + q = 0.$$

Ha o una radice vera soltanto, od una vera, due false

$$x^3 + nx^2 + px - q = 0.$$

Si cangiano la vera in falsa, le false in vere nella

$$x^3 - nx^2 + px + q = 0.$$

Ha o una sola radice vera, od una vera due false

$$x^3 - nx^2 - px - q = 0.$$

Si cangiano la vera in falsa, le false in vere nella

$$x^3 + nx^2 - px + q = 0.$$

Ha o una radice vera solo, od una vera, due false

$$x^3 + nx^2 - px - q = 0 .$$

Si cangiano la vera in falsa, le due false in vere nella

$$x^3 - nx^2 - px + q = 0 .$$

Non possono avere radice falsa le tre equazioni

$$x^2 - px + q = 0 \ldots x^3 * + px - q = 0 \ldots x^3 - nx^2 + px - q = 0 .$$

Non possono all'incontro aver radice vera le tre

$$x^2 + px + q = 0 \ldots x^3 * + px + q = 0 \ldots x^3 + nx^2 + px + q = 0 .$$

Aver non può una radice vera, ma due, o niuna

$$x^2 - px + q = 0 .$$

Ha sempre una radice vera, ma non più

$$x^3 * + px - q = 0 .$$

Debbe avere una radice vera, e può tre averne, non due

$$x^3 - nx^2 + px - q = 0 .$$

Hanno sempre una radice vera, ed una falsa

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px - q = 0 \ldots\ldots x^4 + mx^3 + nx^2 - px - q = 0$$
$$x^4 + mx^3 - nx^2 - px - q = 0 \ldots\ldots x^4 - mx^3 - nx^2 - px - q = 0 .$$

Possono aver due radici vere, ed esserne prive

$$x^4 + mx^3 - nx^2 + px + q = 0 \ldots x^4 + mx^3 + nx^2 - px + q = 0 \ldots x^4 - mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$
$$x^4 + mx^3 - nx^2 - px + q = 0 \ldots\ldots x^4 - mx^3 - nx^2 - px + q = 0 .$$

Ha in genere una radice vera sempre, ed unica, l'equazione $x^\omega + a x^{\omega-1} + b x^{\omega-2} \ldots + f x^{\omega-\mu} - g x^{\omega-\mu-1} - h x^{\omega-\mu-2} \ldots - px - q = 0$, nella quale da cima a fondo divisa in due soli tratti, affetto il primo di segni $+$, il seguente di continui segni $-$, non vi ha che un cangiamento di $+$ in $-$.

In genere può avere due radici vere

$$x^\omega + a x^{\omega-1} + b x^{\omega-2} \ldots + f x^{\omega-\mu} - g x^{\omega-\mu-1} - h x^{\omega-\mu-2} - i x^{\omega-\mu-3} \ldots\ldots - l x^{\omega-\mu-\pi} + m x^{\omega-\mu-\pi-1} + \ldots + px + q = 0 .$$

nella quale i termini verso le due estremità essendo affetti del segno $+$, e gli intermedj del segno $-$, due sono perciò i cangiamenti, prima di $+$ in $-$, poi di $-$ in $+$.

Possono avere un numero di radici vere uguale al grado loro rispettivo le equazioni

$$x^2 - p\,x + q = 0 \ldots\ldots x^3 - n\,x^2 + p\,x - q = 0,$$

nelle quali i segni alternano, essendo nella prima due le alternazioni, nella seconda tre.

Un analista, che degli specolamenti di Cardano tessuta si avesse questa Tavola, mi si dica per fede, se in contemplarla non si sarebbe sentito metter le ale, per elevarsi al teorema del Descartes? Questi lo pronunziò così: *Il peut y avoir autant de racines vraies dans une équation, qu'il s'y trouve de variations de signes + et —; et autant de fausses, qu'on y trouve de fois les deux signes +, ou les deux signes —, qui se suivent l'un l'autre*. Nè contrasterò io già, siccome il Wallis, che quell'*il peut y avoir* in vece di *il y a*, lungi dall'essere stato nel Descartes una espressione di concetto oscuro, ed incerto, sia stato anzi un cenno di perspicace discernimento alla limitazione diretto, che alla regola impone la mescolanza delle radici immaginarie. Dirò bensì, che questa limitazione di una regola sì bella era tale, che meritava dal Descartes, che non si accontentasse di un implicito cenno, ma v'impiegasse uno studiato dichiaramento. E dirò, che Cardano rispetto alle equazioni di 2.° e 3.° grado nella sua *Arte magna*, uscita alla letteraria luce un mezzo secolo avanti, che Descartes alla luce del giorno, tolse il luogo ad ogni dubbio sul perfetto di lui conoscimento della limitazione della regola, distinguendo, e partitamente svolgendo i casi del poter libera adempiersi, e del restare dalla mescolanza delle immaginarie radici impedita.

ARTICOLO IV.

Radici uguali.

Montucla, per timore, che non si accordi a Cardano di troppo, si fa ad avvertire i suoi leggitori, che egli s'inganna riguardo a quelle equazioni, che hanno più radici uguali, ed affette del medesimo segno: *Il se trompe à l'égard des équations, qui ont plusieurs racines égales, et affectées du même signe. Ainsi*, prosegue Montucla, *dans l'équation cubique* $x^3 - 12x = 16$, *dont les racines sont* -2, -2 *et* $+4$, *il n'en compte que deux*, -2 *et* $+4$; *et dans celle-ci* $x^3 - 16 = 12x$ (correggiamo scrivendo $x^3 + 16 = 12x$, che così pone Cardano) *il ne compte que* 2 *et* -4; *ce qu'il fait dans d'autres cas d'équations plus rélevées, où la même chose arrive*. Ecco però, che Montucla stesso prende a scusare Cardano: *Cette erreur au reste*, soggiugne, *étoit fort excusable dans un tems, où l'on n'appliquoit l'Algebre qu'à la resolution des problémes numériques. Car supposons un probléme de ce genre, qui eût conduit à la derniere des équations ci-dessus: que pouvoit faire un analyste, qui auroit remarqué qu'elle donnoit* 2 *deux fois, et* -4? *Il ne pouvoit regarder ces deux solutions que comme la même, sans les distinguer l'une de l'autre. La simple arithmétique ne fournit aucune lumiere sur ce sujet; et c'est la seule application de l'algebre à la théorie des courbes, qui a pû apprendre à faire la distinction, dont nous parlons*. Cardano saprebbe a Montucla buon grado della studiata scusa, se ne abbisognasse; ma non ne abbisogna veramente; e quanto a giudizio di Montucla maggior cagione avevavi per Cardano di errare, a lode tanto maggiore gli torna il non avere errato, e l'avere le uguali radici distinto. Se Montucla, per fastidio forse dello stile di Cardano, e della fatica a rilevarne il senso, non avesse incominciato sin dalla terza pagina a saltare, avrebbe vedute le due recate equazioni seguite immediatamente da queste altre due, $x^3 = 12x + 9$; $x^3 + 9 = 12x$, ed esposte della seconda le due radici vere $+3$, $-1\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}}$ trovato avrebbe dirsi da Cardano della terza: *Testia ficta ex his aggregatur, et respondet aestimationi verae* $x^3 = 12x + 9$; indi soggiugnersi: *et ita reliqua ficta, de qua diximus in alio exemplo, aggregatur ex duabus veris, sed quia verae sunt invicem aequales, ideo ficta dupla est verae*. Mi pare, che sia questo un parlar chiaro, e rimovente qualunque dubbio, che abbia Cardano nell'equazione $x^3 = 12x + 16$, distinte le due radici uguali $+2$, $+2$; che anzi apparisce di più, come bene egli conobbe, dell'aggregato loro volto in negativo formarsi la radice terza falsa -4: ciò però, di che non è a maravigliarsi, dopo aver vedute le chiare cognizioni, che Cardano aveva sul coefficiente del quadrato x^2, e su la mancanza di esso, nascente solo dalla collisione delle radici vere, e false, tanto potendo l'una, quanto in contrario le altre due.

ARTICOLO V.

Trasformazioni delle equazioni.

Tra le sette insigni novità in analisi, che il Gua-de-Malves dice appartenere a Vieta, dopo quella della introduzione delle lettere dell'alfabeto per dinotare le quantità conosciute ben anche, su la quale ho io parlato nel Capo III del I volume, annovera per seconda l'avere Vieta escogitate presso che tutte le trasformazioni delle equazioni, *la seconde des sept découvertes qui appartiennent à Viete,* *c'est d'avoir imaginé presque toutes les trasformations des équations*. Quel *presque* è egli relativo al tempo anteriore, od al posteriore? Vuole il Gua-de-Malves concedere, che gli italiani analisti, che a Vieta precedettero, l'abbiano pure nel pensamento di alcune trasformazioni prevenuto; o vuol piuttosto, che avendo Vieta inventata l'arte, gli analisti di varie nazioni, che lo seguirono, dilatata l'abbian con accrescere delle trasformazioni il numero, e moltiplicarne i modi? Montucla in far eco al Gua-de-Malves intese la limitazione nel secondo rapporto e senso, spiegando, che egli fu per l'artificio delle trasformazioni, che Vieta fece sparire il secondo termine dalle equazioni, sciogliendo, ciò mercè, di un sol colpo le equazioni quadrate, e preparando le cubiche; laddove Cardano per mancanza di tal artificio fu obbligato a trattare con lungo e penoso studio ogni equazione cubica, quale gli si offeriva, e tante rintracciare particolari regole di scioglimento, quante sono le diverse forme, che l'equazione cubica può avere. Ma il Gua-de-Malves parlando di Cardano non lascia di contare tra i meriti di lui, e gli ingegnosi suoi ritrovati l'aver ridotto alla formola del secondo termine priva le altre cubiche formole. *Cardan réduit assez généralement à la formule où le second terme est évanoui les principales des autres formules, qu'on peut imaginer dans le 3.e degré*. E come operò Cardano tal riduzione? Io l'ho mostrato nella Parte II del Capo III, esponendo a disteso dalla pag. 159 alla pag. 166 la teoría di lui: per via di trasformazioni, e di quella massimamente da Montucla celebrata in Vieta, e che è la più generale a spogliare una equazione del secondo suo termine. Il Gua-de-Malves fu verso di Cardano avaro in non darle espressa lode delle trasformazioni, che conobbe essere state da lui usate; e Montucla apparisce tanto più disattento sul dire di esso, quanto minore attenzione bastava per dedurla. Tutti e due avrebbero fatto a Cardano un distinto, e solenne encomio per il trasformare delle equazioni, se con una diligente lettura delle opere di lui appreso avessero sin dove giunse in tale utilissima industria. Vediamolo noi, e ciò che da Cardano non fu raggiunto, tutto, se piace, resterà per Vieta. Due Capi trovansi nei libri di Cardano, ne' quali egli di proposito tratta del trasformare le equazioni: il Capo XXI dell'*Arte magna dell'Aritmetica* iscritto *De permutatione Capitulorum* (aequationum) *invicem*; ed il Capo VII dell'*Arte magna sive de regulis Algebraicis*, cui sta in fronte *De Capitulorum transmutatione*. Qualche cosa pur ne dice in due altri Capi recanti a comun titolo *De modo inveniendi capitula nova*, e sono del primo degli accennati libri il XXVIII, del secondo il VI. Alla materia delle trasformazioni spetta eziandio il Capo XXVII dell'*Arte magna*: *De transitu Capituli specialis in capitulum speciale*. Raccogliendo lo sparso per i cinque additati Capi, insegna egli Cardano le quattro seguenti specie di trasformazioni: 1.ª a radici accresciute, o diminuite in ragione aritmetica, cioè per addizione, o sottrazione di una certa quantità: 2.ª a radici variate in proporzione geometrica diretta, e comprende gli alteramenti per moltiplica, o per divisione: 3.ª a radici cangiate per geometrica proporzione reciproca: 4.ª a talune delle radici permanenti. Le specie 3.ª, e 4.ª sono quelle, nelle quali spicca maggiormente l'ingegno; ma la prima le vince in generalità, ed utilità: da essa incomincio.

Specie I. Trasformazione a radici in aritmetica ragione, o sia per addizione, o sottrazione accresciute, o diminuite.

Modo 1.° Trasformar l'equazione $x^3 = px + q$ in $y^3 + py = q$.

Regola. Si faccia $x = y + p$, e sostituendo nella prima, ne uscirà la seconda.

2.° Spogliare la equazione $x^3 \pm n x^2 \pm p x \pm q = 0$ del suo secondo termine, o sia trasformarla in altra, che ne sia priva.

Regola. Pongasi $x = y \mp \frac{1}{3} n$, e sostituzion fatta, proverrà $y^3 - \left(\frac{1}{3} n^2 \mp p\right) y \pm \frac{2}{27} n^3 \mp \frac{1}{3} n \times \pm p \pm q = 0$.

3.° Trasforma anche Cardano l'equazione $x^3 - n x^2 \pm p x \pm q = 0$ con porre $x = y + \frac{2}{3} n$, dal che ne nasce $y^3 + n y^2 \pm p y - \frac{4}{27} n^3 + \frac{2}{3} n \times \pm p \pm q = 0$. E questa trasformazione non ha utilità per lo scioglimento, ma serve ad appalesare una relazione tra la grandezza della radice, ed il segno del secondo termine, rimanendone lo stesso il coefficiente n, siccome pure il coefficiente p del terzo, e di questo anche il segno.

4.° E valesi Cardano eziandío della posizione $x = y \pm \sqrt{\frac{1}{3} p}$ per trasformare l'equazione $x^3 - p x + q = 0$ nella $y^3 \pm 3 y^2 \sqrt{\frac{1}{3} p} \mp \frac{2}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p} + q = 0$. Egli è questo un toglier da essa il terzo termine $p x$, ed apparisce che Cardano conosceva la sostituzione a ciò necessaria, e che con l'ajuto della feconda Regola del Modo, al fine del Capo III del I volume da me spiegata, si era posto generalmente in possesso della trasformazione nascente da radice per addizione accresciuta, o con sottrazione diminuita. In nostro stile, rappresentata per $x^3 \pm n x^2 \pm p x \pm q = 0$ una equazione cubica qualunque, se pongasi $x = y + a$, la formola della trasformazione nascente si è $y^3 + (3 a \pm n) y^2 + (3 a^2 \pm 2 n a \pm p) y + a^3 \pm n a^2 \pm p a \pm q = 0$. A fare svanire il terzo termine bisogna rendere $3a^2 \pm 2na \pm p = 0$, e se n sia $= 0$, è mestieri che sia $3a^2 \pm p = 0$. Nel caso di $+p$ ne verrebbe $3a^2 + p = 0$, $a = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}p}$, cioè a immaginaria; ma nel caso di $-p$ ne viene $a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}p}$ reale, e qual appunto Cardano l'assume.

Sembra, che Cardano abbia esteso la specie di trasformazione, di cui parliamo, alle equazioni di 4.° grado; poichè nel Capo VI dell'*Arte magna* sotto il num. 3.° dice, che con l'aumentar delle radici fabbricò le equazioni non universali fatte di quadrato-quadrato, vale dire di x^4, di cose, cioè di x, e di numero q, ed assegnonne lo scioglimento. Ma per iterar di ricerche nei diligenti faticosi estratti, che ho dovuto farmi delle sue matematiche opere, non mi è avvenuto di ritrovare il luogo, in cui esponga di tali equazioni l'accennata fabbrica.

Specie II. Trasformazione a radici alterate in geometrica proporzione. Mi spedisco da questa in due parole, consistendo in porre $\frac{a}{b}x = y$, donde $x = \frac{b}{a}y$. Se $b = 1$, la trasformazione acquista il concetto più semplice di trasformazione a radici moltiplicate ax; e se $a = 1$ quello di trasformazione a radici divise $\frac{x}{b}$.

Specie III. Trasformazione a radici per geometrica proporzione reciproca cangiate.

Modo 1.° Trasformare $x^3 = nx^2 + q$ in $y^3 + py = Q$?

Regola. Si prenda $p = \frac{q}{n}$, $Q = \frac{q^2}{n^3}$, sarà $x = \frac{p}{y} = \frac{q}{ny}$. Di fatto sostituendo nella prima $\frac{q}{ny}$ in luogo di x risulta $y^3 + \frac{q}{n}y = \frac{q^2}{n^3}$.

Ci appalesa Cardano, come pervenne a tale trasformazione: vi fu condotto dal problema di trovare tre continue proporzionali, delle due prime delle quali sia data la somma, e della seconda e della terza il prodotto. Sieno le tre continue proporzionali ordinatamente z, y, x, e sia $z+y=a$, $yx=b$. Da questa seconda condizione si tragga $y=\frac{b}{x}$; per la continua proporzionalità sarà $z=\left(\frac{b}{x}\right)^2$ diviso per x, $=\frac{b^2}{x^3}$, onde $z+y=\frac{b^2}{x^3}+\frac{b}{x}=a$, e quinci $x^3=\frac{b}{a}x^2+\frac{b^2}{a}$. Da $yx=b$ si tragga mo $x=\frac{b}{y}$; per la proporzionalità continua sarà $z=y^2$ diviso per $\frac{b}{y}$, $=\frac{y^3}{b}$, perciò $z+y=\frac{y^3}{b}+y=a$, laonde $y^3+by=ab$. Abbiamo dunque per lo stesso problema due equazioni $x^3=\frac{b}{a}x^2+\frac{b^2}{a}$; $y^3+by=ab$: la prima relativa alla terza delle tre continue proporzionali x, la seconda relativa alla seconda y, con la condizione, che sia insieme $x=\frac{b}{y}$ od $y=\frac{b}{x}$, cioè una in ragion reciproca dell'altra. Se pongasi $\frac{b}{a}=n$, $\frac{b^2}{a}=q$, si avrà $b=\frac{q}{n}$, $a=\frac{b}{n}=\frac{q}{n^2}$, $ab=\frac{q^2}{n^3}$: dalle quali cose raccogliesi la trasformazione di $x^3=nx^2+q$ in $y^3+\frac{q}{n}y=\frac{q^2}{n^3}$ per $x=\frac{q}{ny}$, o viceversa della seconda nella prima per $y=\frac{q}{nx}$.

2.° Trasformare $x^\pi+q=hx^\mu$ in $y^\pi+q=Hy^{\pi-\mu}$ supposta $\mu<\pi$.

Regola. Si faccia $H=hq^{\frac{2\mu-\pi}{\pi}}$, e sarà $y=\frac{\sqrt[\pi]{q^2}}{x}$. Per esempio essendo $\pi=3$, $\mu=2$ si faccia $H=hq^{\frac{1}{3}}=h\sqrt[3]{q}$, e sarà $y=\frac{\sqrt[3]{q^2}}{x}$.

Di tale esempio, cioè della trasformazione di $x^3+q=hx^2$ in $y^3+q=hy\sqrt[3]{q}$, se ne trovano in Cardano due dimostrazioni: una aritmetica nel Capo LI della *Pratica generale dell'Aritmetica*; l'altra geometrica nel Capo VII dell' *Arte magna*, ambedue ingegnose, e degne d'essere riferite. Ma convertirò l'aritmetica in letterale.

Dimostrazione algebraica. Se sieno quattro continue proporzionali $x : x R : x R^2 : x R^3$, sarà $(x + x R)(x + x R^3) = (x R)^2 \times \left(\frac{x + x R^3}{x R} + \frac{x + x R^3}{x R^2} \right)$: basta eseguir le moltipliche per vedere la verità di questo lemma. Ciò premesso, sia $x^3 + q = h x^2$, e suppongasi $\sqrt[3]{q} = x R$, $h = x + x R^3$, ed $x R^2 = y$, sarà $x R^3 = \frac{y^2}{\sqrt[3]{q}}$, $h = x + \frac{y^2}{\sqrt[3]{q}}$, $x = h - \frac{y^2}{\sqrt[3]{q}}$, e per il lemma $h\left(\sqrt[3]{q} + h - \frac{y^2}{\sqrt[3]{q}} \right) = \sqrt[3]{q^2} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt[3]{q}} + \frac{h}{y} \right)$, donde ricavasi $y^3 + q = h y \sqrt[3]{q}$, a condizion di essere $y = x R = x\left(\frac{\sqrt[3]{q}}{x} \right)^2 = \frac{\sqrt[3]{q^2}}{x}$.

Dimostrazione geometrica. Si supponga q uguale ad un parallelepipedo $x^2 A$, cioè della base quadrata x^2, e dell'altezza A, e quinci la somma $x^3 + q$ uguale ad un parallelepipedo $x^3 + x^2 A = x^2 \times (x + A)$, vale dir della base quadrata x^2, e dell'altezza $x + A$. Gli ignoti valori di x, A si rappresentino (*Fig.* 5) per le rette con tali lettere segnate; per concepire il parallelepipedo $x^2 A$ si concepisca sopra il quadrato x^2 eretta in centro la linea A, e per l'altezza di essa portato lo stesso quadrato x^2; ed a concepire il parallelepipedo $x^3 + x^2 A$, sopra di un ugual quadrato x^2 concepiscasi eretta la linea $x + A$, al lungo della quale esso quadrato cammini, e si alzi. Or essendo $x^3 + x^2 A = h x^2$, con dividere per x^2, ne verrà $x + A = h$. Tra le rette x, A si costituiscano due medie proporzionali t, y, così che sia $x : t : y : A$. Si formi il quadrato y^2, poi si prolunghi il lato y di una quantità k, a tal che risulti il rettangolo $y^2 + k y$ uguale ad un altro rettangolo formato delle rette t, h, o sia t, $x + A$, in una parola a tal che riesca $y^2 + k y = t h = t(x + A)$. Sopra l'uno, e l'altro dei due rettangoli y^2+ky, th, come basi, si fabbrichi un parallelepipedo dell'altezza y: saranno i due parallelepipedi uguali, cioè $y^3+ky^2=thy$. Sarà questa la equazione secondo la regola della trasformazione, sé dimostrisi essere: $ky^2=q=x^2A$; $t=\sqrt[3]{q}$; $y=\frac{\sqrt[3]{q^2}}{x}$. Essendo per costruzione $y^2+ky=t(x+A)$, ne segue essere $y+k:x+A::t:y.:y:A$ per la supposta continua proporzione $x:t:y:A$. Dall'essere $y+k:x+A::y:A$, od alternando $y+k:y::x+A:A$, ne viene $y+k-y:y::x+A-A:A$, cioè $k:y::x:A$, e permutando $k:x::y:A$. Entra dunque la quantità k a termine della supposta continua proporzione, di modo che si ha $k:x:t:y:A$. Laonde per la dottrina delle continue proporzionali $x^2:y^2::k:A$, e quinci $ky^2=Ax^2=q$, che era la prima cosa a dimostrarsi. In 2.° luogo $x^3:t^3::x:A$, $t^3x=x^3A$, $t^3=x^2A$, $t=\sqrt[3]{Ax^2}=\sqrt[3]{q}$. Per 3.° $x=\frac{t^2}{y}=\frac{\sqrt[3]{q^2}}{y}$.

Dopo aver Cardano con i raziocinj in queste dimostrazioni esposti ritrovata la regola relativamente alle equazioni trinomie cubiche, per analogía la estese egli alle trinomie quadrato-quadrate $x^4+q=hx^2$, alle trinomie *Relate prime*, o sia di grado 5.° $x^5+q=hx^4$; $x^5+q=hx^3$, ed in fine pronunciò la regola generale. Nè ingannollo l'analogía, poichè di fatto, se nell'equazione di grado indeterminato $x^\pi+q=hx^\mu$, in luogo di x sostituiscasi $\frac{\sqrt[\pi]{q^2}}{y}$, si ha $\frac{q^2}{y^\pi}+q=h\frac{q^{\frac{2\mu}{\pi}}}{y^\mu}$, $q^2+qy^\pi=hq^{\frac{2\mu}{\pi}}y^{\pi-\mu}$, e dividendo per q, riesce ultimamente $y^\pi+q=hq^{\frac{2\mu-\pi}{\pi}}y^{\pi-\mu}$.

La trasformazione ha ugualmente luogo nell'equazione $x^\pi=hx^\mu+q$, qualunque numero, o dispari, o pari sia π, poichè quanto a $\sqrt[\pi]{q^2}$, che entra in $x=\frac{\sqrt[\pi]{q^2}}{y}$, è chiarissimo esser cosa indifferente voltar q in $-q$; e quanto a $q^{\frac{2\mu-\pi}{\pi}}$, o sia $\sqrt[\pi]{q^{2\mu-\pi}}$, se π sia dispari, convertito q in $-q$ la potenza $q^{2\mu-\pi}$ divien negativa, e corrispondentemente negativa si fa la $\sqrt[\pi]{q^{2\mu-\pi}}$, ma reale. E se π sia pari, la differenza $2\mu-\pi$ viene ad esser pari, dunque la potenza $q^{2\mu-\pi}$ pari, e positiva, dunque $\sqrt[\pi]{q^{2\mu-\pi}}$ reale.

3.° Trasformare l'equazione $x^\pi+q=hx^\mu$ in $y^\pi+Q=hy^{\pi-\mu}$. Nel 2.° Modo si è conservato lo stesso termine noto q, cangiando il coefficiente h di x^μ; qui si tratta di salvare reciprocamente il cofficiente h, mutando il noto termine q.

Regola. Si ponga $x=\frac{\sqrt[\mu]{q}}{y}$: sostituendo, risulta $y^\pi+q^{\frac{\pi-\mu}{\mu}}=hy^{\pi-\mu}$, cioè $Q=q^{\frac{\pi-\mu}{\mu}}$. Da $x=\frac{\sqrt[\mu]{q}}{y}$ si tira $x^\mu y^\mu=q$, il qual valore di q surrogato nella equazione $x^\pi+q=hx^\mu$, proviene $x^\pi+x^\mu y^\mu=hx^\mu$, e quinci $\frac{x^\pi}{x^\mu}=h-y^\mu$, $x^{\pi-\mu}=h-y^\mu$, donde $x=(h-x^\mu)^{\frac{1}{\pi-\mu}}$. Esempio: sia $\pi=3$, $\mu=2$, suppongasi cioè l'equazione $x^3+q=hx^2$: fatto $x=\frac{\sqrt{q}}{y}$, l'equazione si trasforma in $y^3+\sqrt{q}=hy$, ed il valore di x riceve anche l'espressione $x=h-y^2$.

Egli è nella particolarità della equazione cubica $x^3+q=hx^2$ trasformata in $y^3+\sqrt{q}=hy$, e riguardo al rapporto tra x, y, espresso per l'equazione $x=h-y^2$, che Cardano dimostra geometricamente il teorema.

Dimostrazione geometrica. L'equazione $x^3+q=hx^2$ dà $q=(h-x)x^2$. Si rappresenti $\sqrt{q}$ (*Fig.* 6) per la retta AB, q per il quadrato AC, x per la retta KL, ed x^2 per il quadrato KM, e si prolunghi LK in H, così, che sia $LH=h$: e sarà quad. $AC=(HL-KL)\times$ quad. KM, o sia $AB^2=(HL-KL)KL^2$. Si prenda la retta DE, e si formi il rettangolo $DG = HL \times 1$; indi sopra il rettangolo DG si costruisca un parallelepipedo dell'altezza DE, la cui solidità sarà in conseguenza valutata per rettang. $DG \times DE =$ rettang. $1 \times HL \times DE$. Si supponga insieme il cubo $DE^3 + AB = 1 \times HL \times DE$. Dunque $DE^3 + AB =$ rettang. $DG \times DE = (DE^2 + DE \times EN) DE = DE^3 + DE \times EN \times DE$; dunque $AB = DE \times EN \times DE$. Ma dall'equazione $AB^2 = KL^2 (HL - KL)$ si tira $AB = \sqrt{KL^2 (HL - KL)} = KL \sqrt{(HL - KL)}$; dunque $DE \times EN \times DE = KL \sqrt{(HL - KL)}$. Per la qual cosa, se si supponga $DE \times EN = KL$, si avrà $DE = \sqrt{(HL - KL)}$, $DE^2 = HL - KL$, $KL = HL - DE^2$; dal supposto $DE \times EN = KL$ si cava eziandio $EN = \frac{KL}{DE}$, e sostituendo nell' equazione $AB = DE \times EN \times DE$, risulta $AB = DE \times KL$. Si chiami y la retta DE, e per le rette AB, KL, HL si rimettano i loro simboli $\sqrt{q}$, x, h, ed avremo per la geometrica equazione $KL = HL - DE$ la algebraica $x = h - y^2$; per la geometrica $AB = DE \times KL$ la algebraica $\sqrt{q} = yx$, e quinci $\frac{\sqrt{q}}{y} = x$; e per la geometrica $DE^3 + AB = 1 \times HL \times DE$ la algebraica $y^3 + \sqrt{q} = h\, y$.

Cardano non avvertì tra x ed y il rapporto $x = \frac{\sqrt{q}}{y}$, ma il solo $x = h - y^2$, il quale, generalizzando, si fa molto implicato, divenendo $x = (h - y^{\mu})^{\frac{1}{\pi - \mu}}$; laddove il primo anche in generale resta semplice, non cangiandosi che in $x = \frac{\sqrt[\mu]{q}}{y}$. Per mezzo di questo avrebbe data Cardano una regola generale di determinare x, determinato y, di gran lunga più facile e spedita di quella egli dà relativa alla formola $x = (h - y^{\mu})^{\frac{1}{\pi - \mu}}$. Se io avessi voluto a questa attenermi per base della trasformazione, anzi che un 3.° modo della spezie III, che sto spiegando, avrei potuto, o dovuto costituirne una specie distinta, e trasformazion dirla a radice mutata in ragione geometrica submultipla di aritmetica differenza di alto ordine.

Applicando la trasformazione all'equazione $x^\pi + h x^\mu = q$, con fare anche qui $x = \frac{\sqrt[\mu]{q}}{y}$, si trova $y^\pi = h y^{\pi-\mu} + q^{\frac{\pi-\mu}{\mu}}$. E nel caso di $x^3 + h x^2 = q$ si ha, per $x = \frac{\sqrt{q}}{y}$, $y^3 = h y + \sqrt{q}$. Da $x = \frac{\sqrt{q}}{y}$ venendone $x^2 y^2 = q$, se questo valore di q si sostituisca nell'equazione $x^3 + h x^2 = q$, si cangia questa in $x^3 + h x^2 = x^2 y^2$, onde, dividendo per x^2, $x + h = y^2$; $x = y^2 - h$. Ed ecco, siccome penso, l'origine della trasformazione inventata da Lodovico Ferrari, da me esposta nella pag. 163 sotto il num. 5.° delle *Risoluzioni generali* delle cubiche equazioni formanti il primo membro della *Dottrina di Girolamo Cardano*.

Non fu nelle equazioni sole trinomie, che Cardano adoperò la specie di trasformazione, della quale vado parlando; l'adoperò egli anche nell'equazione di 4.° grado quadrinomia $x^4 + n x^2 + q = m x^3$, che, con fare $x = \frac{\sqrt{q}}{y}$, trasformò in $y^4 + n y^2 + q = m y \sqrt{q}$. Guida a tale trasformazione in particolare, e dimostrazion di essa si fe' a Cardano il problema di trovare tre continue proporzionali x, y, z, la somma delle quali $x + y + z$ sia, a generalizzare, $= a$, il prodotto della prima nella seconda $x y$ sia $= b$. Cavando di qui $y = \frac{b}{x}$, si ha $z = \frac{b^2}{x^3}$, $x + y + z = x + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^3} = a$, $x^4 + b x^2 + b^2 = a x^3$, ed è questa l'equazione della prima delle tre continue proporzionali x. Ma da $x y = b$ traendo $x = \frac{b}{y}$, ne viene $z = \frac{y^3}{b}$, $x + y + z = \frac{b}{y} + y + \frac{y^3}{b} = a$, $y^4 + b y^2 + b^2 = a b y$, equazione della seconda delle tre continue proporzionali y. Il coefficiente ab di y in questa è fatto, come si vede, di a coefficiente di x^3, e di b radice quadrata del termine noto b^2 nella equazione prima $x^4 + b x^2 + b^2 = a x^3$; il coefficiente di x^2, ed il termine noto restano nelle due equazioni gli stessi; il passaggio da una equazione all'altra è per il rapporto $x = \frac{b}{y}$: così, che sostituito al quadrato b^2 il simbolo generale q, alla radice b la $\sqrt{q}$, alla specie a la specie m, si deduce, la equazione $x^4 + n x^2 + q = m x^3$ trasformarsi per $x = \frac{\sqrt{q}}{y}$ in $y^4 + n y^2 + q = m y \sqrt{q}$.

Del rimanente i Modi 2.°, e 3.°, che da Cardano s'insegnano in generale, ma non si dimostrano, che in particolare, si possono facilmente, e speditamente dimostrare in generale.

Dimostrazione generale, e spedita. Sia data l'equazione $x^\pi + q = h x^\mu$. Si ponga $x = \frac{a}{y}$: sostituendo, si ha $y^\pi + \frac{a^\pi}{q} = \frac{a^\mu}{q} h y^{\pi-\mu}$.

1.° Si voglia salvo, o nelle due equazioni lo stesso il termine noto: sarà dunque $\frac{a^\pi}{q} = q$, $a^\pi = q^2$, $a = \sqrt[\pi]{q^2}$, $x = \frac{\sqrt[\pi]{q^2}}{y}$.

2.° Vogliasi mantenuto il coefficiente di x^μ: sarà dunque $\frac{a^\mu}{q} h = h$, $\frac{a^\mu}{q} = 1$, $a = \sqrt[\mu]{q}$, $x = \frac{\sqrt[\mu]{q}}{y}$.

Sostituendo parimenti $\frac{a}{y}$ in luogo di x nella equazione quadrinomia di 4.° grado $x^4 + n x^2 + q = m x^3$, ne nasce $a^4 + n a^2 y^2 + q y^4 = m a^3 y$. Laonde, se prendasi $a^2 = q$, si otterrà $y^4 + n y^2 + q = m y \sqrt{q}$.

Che se piglisi $a = q$, risulterà $y^4 + n q y^2 + q^3 = m q^2 y$, che è la trasformazione di Bombelli, della quale ho detto al §. VIII della Parte I del capo IV. La trasformazione cardanica per $x = \frac{\sqrt{q}}{y}$ riesce utile, e comoda nel caso particolare di q numero quadrato; la bombelliana nel caso opposto incomparabilmente più esteso.

Sebbene queste dimostrazioni sieno di tanta semplicità e speditezza, che al confronto incontrino la taccia di superflui travagliosi lavori quelle di Cardano, cionondimeno giova averle recate a far conoscere la profondità del suo studio, e quanto costarono le invenzioni.

Specie IV. Trasformazione a taluna delle radici permanente. Curiosa è questa specie di trasformazione, che consiste in passare da una equazione in un'altra di termini o tutti, od alcuni diversi, rimanendo taluna delle radici senza il menomo cangiamento, ed in ambedue le equazioni la stessa.

Modo 1.° Conservando il numero de' termini, ma tutti mutandoli, tranne però il primo.

Regola. Supponi che l'equazione $x^3 + nx^2 + q = px$ abbia le due radici $f \pm \sqrt{g}$, la equazione $x^3 + Nx^2 + q + (N - n)(f^2 - g) = (2f(N - n) + p)x$ le avrà pure.

Esempio. Sia l'equazione $x^3 + 2x^2 + 56 = 41x$, che ha per due delle sue radici $3 \pm \sqrt{2}$; son queste parimente radici dell'equazione $x^3 + 7x^2 + 91 = 71x$, dove $91 = 56 + (7 - 2)(9 - 2)$, e $71 = 6(7 - 2) + 41$. Si vede che N è ad arbitrio, e che perciò la seconda equazione ammette infinita varietà. Non basta: siccome dalla prima alla seconda, così da essa seconda si può passare in altra, e così via via indefinitamente; onde per due vie si può fabbricare un numero immenso di equazioni cubiche aventi tutte le due radici $f \pm \sqrt{g}$. La terza radice sarà differente: nell'esempio recato la terza della equazion prima $x^3 + 2x^2 + 56 = 41x$ è -8, e della seconda $x^3 + 7x^2 + 91 = 71x$ è

— 13. Cardano non considera, che la radice $3+\sqrt{2}$, ed il conservamento di essa, ed in genere di $f+\sqrt{g}$, nè reca della regola dimostrazione, io la recherò dopo avere generalizzata la regola stessa.

Riflettasi che f^2-g è il prodotto delle due radici $f+\sqrt{g}$, $f-\sqrt{g}$, e che $2f$ è la somma loro. Dunque se in generale sieno a, b due radici dell'equazione $x^3+nx^2+q=px$, la formola delle infinite equazioni aventi le stesse due radici a, b sarà $x^3+Nx^2+q+(N-n)ab=((a+b)(N-n)+p)x$.

Dimostrazione. Delle due radici $x=a$, $x=b$ formasi la equazione di 2.° grado $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab=0$; se questa si moltiplichi per $x-c$, supponendo $x=c$ la terza radice, risulta $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$. Che se la terza radice suppongasi $x=d$, la moltiplica $(x-d)\left(x^2-(a+b)x+ab\right)$ produce $x^3-(a+b+d)x^2+(ab+ad+bd)x-abd=0$. Hanno dunque due radici comuni le due equazioni

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0;$$
$$x^3-(a+b+d)x^2+(ab+ad+bd)x-abd=0.$$

Si ponga $-(a+b+c)=n$, $ab+ac+bc=-p$, $-abc=q$, $-(a+b+d)=N$: si avrà immediatamente $d=c-(N-n)$, sostituendo il qual valore di d nel coefficiente $ab+ad+bd$ di x nella equazion seconda, si conseguirà $ab+(a+b)d=ab+ac+bc-(a+b)(N-n)=-p-(a+b)(N-n)$; e sostituendolo nel termine noto $-abd$ di essa seconda equazione, ottiensi $-abd=-abc+ab(N-n)=q+ab(N-n)$: così che ridotta la prima equazione al sembiante $x^3+nx^2-px+q=0$, la seconda riducesi al sembiante $x^3+Nx^2-\left(p+(a+b)(N-n)\right)x+q+ab(N-n)=0$.

Corollario. Segniamo per comodo (A) l'equazione $x^3 + n x^2 - p x + q = 0$, e (B) l'equazione $x^3 + N x^2 - (p + (a+b)(N-n))x + q + ab(N-n)$. Dalla struttura di questa un bel corollario ne segue. Comprende ella nei suoi termini la somma $a+b$, ed il prodotto ab delle due supposte comuni radici; dunque non potrà essere in tutti i suoi termini razionale, a meno che le due comuni radici tali non sieno, che e la somma, ed il prodotto loro riescano quantità razionali. Tanto manifestamente avverrà, se le due comuni radici sieno elleno razionali, nel qual caso anche la terza radice differente è chiaro dover essere razionale. E si avvereran pure ambedue le condizioni, se le comuni radici sieno delle due irrazionali forme $f + \sqrt{g}$, $f - \sqrt{g}$, purchè sieno f, g numeri razionali, essendo la somma di queste forme $= 2f$, ed il prodotto $= f^2 - g$. Or suppongasi c la terza radice particolare dell'equazione (A): dividendo questa per $x - c$, ne viene per quoziente $x^2 + (n+c)x + c(n+c) - p = 0$, donde si cavano le due radici $x = -\frac{n+c}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{n+c}{2}\right)^2 - c(n+c) + p\right)}$. Per la qual cosa, paragonando, si ha $f = -\frac{n+c}{2}$, $g = \left(\frac{n+c}{2}\right)^2 - c(n+c) + p$, $2f = -(n+c)$, $f^2 - g = c(n-c) - p$. Dal che apparisce manifestamente non poter la somma $2f$ di $f + \sqrt{g}$, $f - \sqrt{g}$, ed il prodotto loro $f^2 - g$ essere razionali, se non nel caso di essere la terza radice c dell'equazione (A) razionale, ed f, g separatamente razionali. Dunque data una equazione cubica $x^3 + n x^2 - p x + q = 0$, non si può fabbricarne un'altra, la quale abbia con lei comuni due radici, e sia ad un tempo in tutti i suoi termini razionale, se non a condizione, che la equazion data abbia almeno una radice razionale. Cardano ha intravveduto questa bella verità.

Corollario 2.° La terza radice dell'equazione (B) sarà $= -(N+2f) = -N-2f = -N+n+c$: dunque essendo N, n, c razionali, anche la terza radice dell'equazione (B) sarà necessariamente razionale. Conseguentemente non si può combinare, che due equazioni cubiche sieno in tutti i termini loro razionali, abbiano due radici comuni, e tutte e tre le radici loro sieno irrazionali.

Supposto che le due equazioni $x^3+nx^2+px+q=0$, $x^3+Nx^2+Px+Q=0$ abbiano due radici comuni, a ritrovarle basta sottrarre una equazione dall'altra; per esempio la prima dalla seconda, e sciogliere la equazione di secondo grado, che viene a residuo, $(N-n)x^2+(P-p)x+Q-q=0$, e lo scioglimento darà $x=-\frac{P-p}{2(N-n)} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{P-p}{2(N-n)}\right)^2-\frac{Q-q}{N-n}\right)}$. Così nell'esempio delle due equazioni $x^3+2x^2-41x+56=0$, $x^3+7x^2-71x+91=0$ trovasi $x=-\frac{-71+41}{2(7-2)} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{-71+41}{2(7-2)}\right)^2-\frac{91-56}{7-2}\right)} = 3 \pm \sqrt{2}$.

Avverte giustamente Cardano, che due equazioni cubiche del secondo termine mancanti, che rappresenterò in genere per $x^3+px+q=0$, $x^3+Px+Q=0$, aver non possono radice comune, che razionale, posti p, P, q, Q razionali. La ragione si è, che sottraendo la prima dalla seconda proviene a residuo $(P-p)x+Q-q=0$, donde risulta $x=\frac{q-Q}{P-p}$, valor razionale necessariamente, supposti i coefficienti p, P, ed i termini noti q, Q razionali.

Procede a riflettere in generale, che due equazioni di un grado qualunque fornite del solo primo termine, di un medio, e dell'ultimo, cioè in nostro stile le due equazioni $x^\pi+hx^{\pi-\mu}+q=0$; $x^\pi+Hx^{\pi-\mu}+Q=0$ aver non possono comune, che radice irrazionale del grado medio

$\pi - \mu$, ovvero razionale. Poichè sottratta la prima dalla seconda resta a residuo l'equazione $(M - m)\ x^{\pi-\mu} + Q - q = 0$, che dà $x = \left(\frac{q-Q}{M-m}\right)^{\frac{1}{\pi-\mu}}$, valore comunemente irrazionale di grado $\pi - \mu$, ma che può esser razionale, potendo essere $\frac{q-Q}{M-m}$ podestà di grado $\pi - \mu$. Se π sia $= 4$, $\pi - \mu = 3$ sarà $x = \sqrt[3]{\frac{q-Q}{M-m}}$.

Modo 2.° Aumentando da tre a quattro i termini, ossia rendendo compiuta la data scema equazione cubica, a condizione insieme di non mutare dei tre termini dati, che il noto.

Regola particolare. Cardano dà qual generale quella, che io dico, e veracemente è particolar regola soltanto. Asserisce egli, che se data l'equazione $x^3 + q = n\,x^2$ la si trasmuti in quest'altra $x^3 + \frac{1}{4} n^2 x = n\,x^2 + \frac{1}{8} q$, questa avrà con quella radice comune; e ne arreca due esempj: il 1.° nelle due equazioni $x^3 + 16 = 14\,x^2$; $x^3 + 49\,x = 14\,x^2 + 2$; il 2.° nelle due $x^3 + 40 = 8\,x^2$; $x^3 + 16\,x = 8\,x^2 + 5$; senza però far vedere nè rispetto alle prime, nè rispetto alle seconde qual sia la comun radice, e senza addurre della regola dimostrazione, tirandosene d'impaccio con dire non essere a quel luogo necessaria. Certamente Cardano è passato troppo leggiero su di questa cosa, ed avveduto sarebbesi della particolarità della regola, e della falsità degli esempj, se accinto si fosse alla dimostrazione di quella, all' esame di questi. A dimostrar particolare la regola, dall' una, e dall'altra parte della equazione $x^3 + \frac{1}{4} n^2 x = nx^2 + \frac{1}{8} q$ si aggiunga q, e ne verrà $x^3 + \frac{1}{4} n^2 x + q = n\,x^2 + \frac{9}{8} q$; laonde essendo per la prima data equazione $x^3 + q = n\,x^2$, sarà in conseguenza $\frac{1}{4} n^2 x = \frac{9}{8} q$, e quinci $x = \frac{9q}{2n^2}$. Sostituito questo valore di x nella equazione $x^3 + q = n x^2$ proviene $q^2 + \frac{2^3}{9^3} n^6 = \frac{2}{9} n^3 q$, donde si cava $q = \frac{3 \pm 1}{27} n^3$. Ecco il particolar rapporto richiesto tra il termine noto q, ed il coefficiente n di x^2, onde la regola abbia luogo. Se pertanto sia $x^3 + \frac{3 \pm 1}{27} n^3 = n x^2$, e si formi l'equazione $x^3 + \frac{1}{4} n^2 x = n x^2 + \frac{3 \pm 1}{8 \times 27} n^3$, le due equazioni avranno una radice comune, che sarà $x = \frac{9q}{2n^2} = \frac{9(3 \pm 1)}{2 \times 27} n = \frac{3 \pm 1}{6} n$. Si scorge, che per qualunque coefficiente n di x^2 due sono le copie delle equazioni di comune radice fornite, essendo libero il servirsi di $3 + 1$, e di $3 - 1$. Per esempio se prendasi $n = 6$, la 1.ª copia per l'uso di $3 + 1$ sarà: $x^3 + 32 = 6x^2$; $x^3 + 9x = 6x^2 + 4$, la comun radice delle quali $x = 4$; e la copia 2.ª per l'uso di $3 - 1$: $x^3 + 16 = 6x^2$; $x^3 + 9x = 6x^2 + 2$, e la comun radice $x = 2$. Gli esempj da Cardano addotti non hanno il noto termine q, ed il coefficiente n nel rapporto quì da me stabilito $q = \frac{3 \pm 1}{27} n^3$, e perciò son falsi. Vediamolo nel primo, che suppone data $x^3 + 16 = 14x^2$, e ne forma per trasmutazione giusta la regola, $x^3 + 49x = 14x^2 + 2$. Essendo $n = 14$ dovrebbe nella equazione data, in vece di 16, esservi $\frac{3 \pm 1}{27} 14^3$, cioè, o $406 \frac{14}{27}$, o $203 \frac{7}{27}$. Che falso sia aver le due equazioni una radice comune, appalesasi sottraendo la prima dalla seconda: il residuo ne è $49x - 16 = 2$, donde $x = \frac{18}{49}$: dovrebbe esser questa la radice alle due equazioni comune. Or sostituito questo valor di x nella equazion data $x^3 + 16 = 14x^2$ si trova $18^3 + 16 \times 49^3 = 14 \times 18^2 \times 49$, che si riduce a $9^3 + 2 \times 49^3 = 7^3 \times 9^2$, equazione falsissima.

È cosa agevole fabbricare le formole di due equazioni cubiche, che abbiano una radice comune. Si assumano due equazioni di 2.° grado di radici diverse fornite ad arbitrio, le quali sieno $x^2 - Ax + B = 0$, $x^2 - Fx + G = 0$; si moltiplichino per $x - r$, ed a prodotti si avranno le equazioni cubiche $x^3 - (A + r)x^2 + (B + Ar)x - Br = 0$; $x^3 - (F + r)x^2 + (G + Fr)x - Gr = 0$. Si ponga $-(A + r) = n$, $+(B + Ar) = p$, $-Br = q$, $-(F + r) = N$, $+(G + Fr) = P$, si dedurrà $-Gr = q - r(P - p) - r^2(N - n)$, e le formole delle due equazioni cubiche della comune radice $x = r$ fornite saranno

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0;\quad x^3 + Nx^2 + Px + q - r^2(N - n) - r(P - p) = 0.$$

Regola generale. Ad adempire del descritto Modo 2.° la prima condizione si faccia $p = 0$, e le due equazioni diverranno

$$x^3 + nx^2 + q = 0;\quad x^3 + Nx^2 + Px + q - r^2(N - n) - rP = 0.$$

Ad adempiere la condizione seconda ancora, si ponga $N = n$, e le due equazioni si ridurranno ad

$$x^3 + nx^2 + q = 0;\quad x^3 + nx^2 + Px + q - Pr = 0,$$

ed è evidente, che, se r sarà radice della equazione prima, lo sarà pur della seconda.

ARTICOLO VI.

Radici Irrazionali, Grado, Specie; Numero dei termini loro.

Se soggetto vi ha, su le varie parti del quale Cardano meditasse con sottilità d'ingegno, quello si è delle radici irrazionali delle equazioni. I Capi XVIII, XIX, XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXXIII, XXXV, XXXVII, XXXIX dell'*Arte magna di Aritmetica*, ed i Capi III, V, VIII, X, XI, XIII, XIV, XV, XVI, LIX del libro della

Regola Aliza, offrono una varia copia di specolamenti intorno ad esso. Io unendo i simili li distribuirò in alcune schiere.

SCHIERA I.

Teoremi su le sei specie di binomj e recisi euclidei in quanto abili ad esser radici delle equazioni.

Teorema I. Il binomio, o reciso di 3.ª, o di 6.ª specie, il cubo, e tutte le potenze dispari di esso hanno tra loro parti comunicanti; e così tra loro il quadrato, il quadrato-quadrato e tutte in genere le potenze pari; ma le potenze dispari, e le pari non hanno le une con le altre parti comunicanti. Raccogliamo nella formola $\sqrt{t} \pm \sqrt{u}$ le due formole dei binomj, e recisi di 3.ª, e di 6.ª specie poste nella pag. 253: sono

Le potenze dispari: 1.ª $\sqrt{t} \pm \sqrt{u}$; 3.ª $t\sqrt{t} \pm 3t\sqrt{u} + 3u\sqrt{t} \pm u\sqrt{u}$. 5.ª $t^2\sqrt{t} \pm 5t^2\sqrt{u} + 10ut\sqrt{t} \pm 10tu\sqrt{u} + 5u^2\sqrt{t} \pm u^2\sqrt{u}$; 7.ª . . . . .

Ogni parte contenendo, o $\sqrt{t}$, o $\sqrt{u}$ è evidente la comunione tra le parti delle potenze 1.ª, 3.ª, 5.ª; e lo stesso intendesi dover essere delle altre dispari potenze tutte.

Le potenze pari: 2.ª $t \pm 2\sqrt{t}\sqrt{u} + u$; 4.ª $t^2 \pm 4t\sqrt{t}\sqrt{u} + 6tu \pm 4u\sqrt{t}\sqrt{u} + u^2$; 6.ª $t^3 \pm 6t^2\sqrt{t}\sqrt{u} + 15t^2u \pm 20tu\sqrt{t}\sqrt{u} + 15tu^2 \pm 6u^2\sqrt{t}\sqrt{u} + u^3$; 8.ª . . . . .

O sono le parti razionali, o contengono $\sqrt{t}\sqrt{u}$, dunque hanno le potenze 2.ª, 4.ª, 6.ª, e generalmente tutte le pari comunicanti le parti loro.

Ma le parti delle potenze impari, e delle pari sono dissimili, e senza comunione veruna.

Teorema II. I binomj, e recisi di 3.ª, e di 6.ª specie compresi nella formola $\sqrt{t} \pm \sqrt{u}$ sono primieramente inetti ad essere radici di una equazione di 2.° grado fatta di x^2, x, e q numero, perchè non essendo comunicanti i radicali in x^2, ed i radicali in x non possono uguagliarsi. Non vagliono in secondo luogo a comporre alcuna radice di 3.° grado: non la completa contenente x^3, x^2, x, q, perchè il termine radicale di x^2 si troverebbe senza simile; non la incompleta fatta di x^3, x^2, q per la stessa ragione, e perchè altresì senza simili si troverebbero le due parti radicali diverse di x^3; non la incompleta finalmente costrutta di x^3, x, q, per non contenere, x^3, x termini razionali, che uguaglino q. Non possono in terzo luogo soddisfare alle equazioni di 4.° grado incomplete formate di x^4, x^3, x^2, q, o di x^4, x^2, x, q, perchè i radicali di x^3, o di x sarebbero senza simili e senza uguali conseguentemente. Ma e della equazione incompleta priva insieme di x^3, ed x, o sia composta soltanto di x^4, x^2, q, e della completa fabbricata di x^4, x^3, x^2, x, q sono eglino abili ad esser radici? Sembra ad evidenza che sì e riguardo all'una, e riguardo all'altra, purchè nella prima x^4, x^2, e nella seconda parimenti x^3, x sieno in contraria parte dell'equazione, avendo x^4, x^2, e similmente x^3, x parti irrazionali comunicanti che ammettono di essere uguagliate, e contenendo di più x^4, x^2 delle parti razionali, la differenza delle quali può essere a q uguagliata. Pure veniamo al fatto, ed incominciamo, giovando più, dalla equazione completa $x^4 + m x^3 \pm q = n x^2 + p x$. Posto $x = \sqrt{t} \pm \sqrt{u}$, e fatta la sostituzione, proviene $t^2 + 6 t u + u^2 \pm (4 t + 4 u) \sqrt{t} \sqrt{u} + m (t + 3 u) \sqrt{t} \pm m (u + 3 t) \sqrt{u} \pm q = n (t + u) \pm 2 n \sqrt{t} \sqrt{u} + p \sqrt{t} \pm p \sqrt{u}$.

Paragonando i termini simili abbiamo, tra le altre, le due equazioni $m(t+3u)=p$, $m(u+3t)=p$, dalle quali segue $(1-3)(t-u)=0$, che non può verificarsi che per $t-u=0$, o sia per $t=u$, che rende $\sqrt{t}+\sqrt{u}=2\sqrt{t}$, $\sqrt{t}-\sqrt{u}=0$. Fatti m, e $p=0$, avremo $t^2+6tu+u^2\pm(4t+4u)\sqrt{t}\sqrt{u}\pm q=n(t+u)\pm 2n\sqrt{t}\sqrt{u}$ per il provento di $\sqrt{t}\pm\sqrt{u}$ sostituito in luogo di x nell'equazione $x^4\pm q=nx^2$. Il confronto dei termini simili dà le due equazioni $t^2+6tu+u^2\pm q=n(t+u)$; $4t+4u=2n$. Cavando da questa il valore di $u=\frac{1}{2}n-t$, e nella prima sostituendolo, si trova $t^2-\frac{1}{2}nt+\frac{1}{4^2}n^2=\pm\frac{1}{4}q$, donde si deduce $t=\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}\sqrt{\pm q}$. A sfuggire l'immaginario bisogno prender q col segno $+$, cioè l'equazione debb'essere $x^4+q=nx^2$, e ad ottenere che t sia razionale come richiedesi nei binomj e recisi di 3.ª, e 6.ª specie, è di mestieri che q sia numero quadrato; ed essendo $u=\frac{1}{2}n-t$, per conseguenza $=\frac{1}{4}n-\frac{1}{2}\sqrt{q}$, ad essere $\sqrt{u}$ reale fa d'uopo, che sia $\frac{1}{4}n>\frac{1}{2}\sqrt{q}$, o sia $n^2>4q$. Dunque, a conchiudere, i binomj e recisi di 3.ª e 6.ª specie espressi per la formola $\sqrt{t}\pm\sqrt{u}$ possono essere radice dell'equazione $x^4+q=nx^2$, ma a queste due condizioni soltanto: 1.ª che q sia numero quadrato; 2.ª che sia $n^2>4q$. Cardano non toccò nel suo esame l'equazione $x^4+mx^3\pm q=nx^2+px$, nè riguardo all'equazione $x^4+q=nx^2$: pose mente alle due condizioni per me determinate. Cionondimeno pronunciò, che *in tertio, et sexto binomio, et reciso non verificatur aliquod Capitulum algebrae, nec de inventis, nec de non inventis in infinitum*. Ed obbiettandosi il verificamento della equazione $x^4+q=nx^2$, non contrappone già le particolarità in questa richieste, a fine che possa essere per $x = \sqrt{t} \pm \sqrt{u}$ verificata, ma risponde, che in tale equazione la quantità, che fa da *cosa*, e diremmo noi da incognita, non è propriamente x, ma x^2, e che $\sqrt{t} \pm \sqrt{u}$ elevato al quadrato cangia di specie, passando da binomio o reciso di 3.ª o 6.ª specie a binomio o reciso di specie 1.ª giusta la Specol. II pag. 270. Io però stimo meglio moderare così il teorema di Cardano.

La formola $\sqrt{t} \pm \sqrt{u}$ rappresentante i binomj, e recisi di 3.ª, e 6.ª specie non può tra tutte le equazioni di 2.°, di 3.°, di 4.° grado, nelle quali i coefficienti e l'ultimo termine sieno razionali, essere radice, che dell'equazione $x^4 + q = n x^2$, e non in genere, ma a due particolari condizioni: 1.ª che q sia numero quadrato; 2.ª che sia $n^2 > 4q$.

Teorema III. Li binomj, e recisi di 1.ª e 4.ª specie servono in ufficio di radici all'equazione di 2.° grado $x^2 + q = p x$, ma non alle due $x^2 = p x + q$; $x^2 + p x = q$: alla $x^2 = p x + q$ servono li binomj di 2.ª, e 5.ª specie, ed alla $x^2 + p x = q$ i recisi loro. Le risoluzioni di queste equazioni mettono in chiaro la verità di questo teorema. Sciogliendo $x^2 + q = p x$ si ha $x = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 - q\right)}$, che giusta le definizioni, e le formole poste nelle pag. 252, e 253 è binomio e reciso di 1.ª specie, se q sia numero quadrato, e di 4.ª se altrimenti. Lo scioglimento di $x^2 = px + q$ dà $x = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 + q\right)}$, dei quali due valori il $\frac{1}{2} p + \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 + q\right)}$ è giusta le citate definizioni e formole binomio di 2.ª, o 5.ª specie. La $x^2 + p x = q$ si scioglie in $x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 + q\right)}$, dove $-\frac{1}{2} p + \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 + q\right)}$ è reciso di 2.ª, o 5.ª specie. Cardano amò dimostrare il teorema per mezzo delle sue specolazioni da me illustrate dalla pag. 268 alla 278. Giova applicar l'intelletto a tal dimostrazione per disporlo sul più facile, e d'altronde noto ai raziocinj più composti e di nuova cognizione che seguiranno. Per le Specolaz. III e IV la razional parte del quadrato del binomio e reciso di 1.ª o di 4.ª specie sta alla razional parte di esso binomio, o reciso in minore ragione, che la parte irrazionale alla parte irrazionale; dunque se la parte irrazionale in x^2 si uguaglj alla parte irrazionale in x moltiplicata per p, la parte razionale in x^2 non giugnerà ad uguagliarsi alla parte razionale in x similmente moltiplicata per p, ma potrà giugnervi ajutata da q. Al contrario per le Specolaz. VI, VIII la parte razionale del quadrato del binomio di 2.ª o di 5.ª specie sta alla parte razionale di esso binomio in ragione maggiore che la parte irrazionale alla parte irrazionale; laonde uguagliandosi la parte irrazionale in x con la parte irrazionale in $p x$, la parte razionale in x^2 supererà la parte razionale in $p x$, onde ad ottenere uguagliamento dovrà questa essere ajutata da q; e così intendesi il binomio di 2.ª, o di 5.ª specie poter soddisfare all'equazione $x^2 = p x + q$. Nel reciso di 2.ª, o di 5.ª specie è la parte razionale, che è sottratta dalla irrazionale; per l'opposto nel suo quadrato è per la Specolaz. II la parte irrazionale, che è sottratta dalla razionale; vale dire, che confrontato il reciso di 2.ª o di 5.ª specie con il suo quadrato, le parti irrazionali sono con contrario segno, e similmente le razionali; per la qual cosa apparisce non poter il reciso di 2.ª, o di 5.ª specie unitamente al suo quadrato verificare l'equazione $x^2 = p x + q$; ma sì bene la equazione $x^2 + p x = q$, dove le parti irrazionali in x^2, ed in $p x$ potranno con la contrarietà dei segni distruggersi, e distrutta insieme una quantità uguale nella parte razionale di x^3, e nella parte razionale di px, l'eccesso della prima uguagliarsi al numero q. S'intende con facilità, che le cose dimostrate per $x^3 + q = px$; $x^3 = px + q$; $x^3 + px = q$ vagliono corrispondentemente per $nx^3 + q = px$; $nx^3 = px + q$; $nx^3 + px + q$. Mi è di bisogno di questa avvertenza per i teoremi inferiori.

Teorema IV. Servir possono all'equazione $x^3 + q = px$ i binomj ed i recisi di 1.ª e 4.ª specie, e parimenti i recisi di 2.ª specie, e di 5.ª; ed alla equazione $x^3 = px + q$ i binomj di 2.ª e 5.ª specie; l'equazione $x^3 + px = q$ non ha binomio o reciso che le serva. Per ciò che spetta l'abilità dei binomj e recisi di 1.ª, e 4.ª specie ad essere radici di $x^3 + q = px$ il raziocinio è lo stesso che rispetto alla abilità loro ad esser radici dell'equazione di 2.° grado $x^2 + q = px$, appartenendo le Specolaz. III e IV, siccome al quadrato, così al cubo. Riguardo ai recisi di 2.ª, e 5.ª specie, essendo per le Specolaz. VI, VIII la parte razionale del cubo alla parte razionale del reciso di 2.ª o 5.ª specie in maggiore ragione che la parte irrazionale alla parte irrazionale; essendo d'altro canto per la Specolaz. I le parti irrazionali nel reciso e nel cubo positive, e nell'uno e nell'altro negative le razionali: quinci potrà la parte irrazionale di x^3 uguagliarsi alla irrazionale di px; e posto questo uguagliamento, la parte razionale di x^3 prescindendo dai segni negativi supererà la parte razionale di px; ma attesi i negativi segni la parte razionale di x^3 abbisognerà dell'aggiunta $+q$ per uguagliarsi alla parte razionale di px. Dal che si conclude che li recisi di 2.ª e 5.ª specie servir possono anch'essi all'equazione $x^3 + q = px$, e che questa è l'unica delle tre distinte equazioni, alla quale servir possano. È per lo contrario evidente, che essendo nei binomj di 2.ª, e di 5.ª specie, e nei cubi loro positive le parti razionali, uguagliate le parti irrazionali di x^3, px, la parte razionale di x^3 rimarrà eccedente la razionale di px, e sarà questa che avrà bisogno dell'aggiunta $+q$ per uguagliarsi a quella, che per conseguenza l'equazione, a cui delle tre possono, ed unicamente possono servire i binomj di 2.ª, e 5.ª specie, si è l'equazione $x^3 = px + q$. Da tutto il dimostrato ne viene di necessaria illazione non esservi binomio, o reciso, che servir possa all'equazione $x^3 + px = q$: il che vedesi anche con una sola occhiata diretta, poichè sarebbe di mestieri, che la parte irrazionale del binomio, o reciso x, e la parte irrazionale del cubo di lui fossero di contrario segno, ciò che non accade, ed apertamente ripugna che sia in alcuno degli euclidei binomj e recisi. Questo teorema si trova in tutti i suoi membri d'accordo con i risultati delle analisi fatte sotto il num. 4.° del Manipolo I delle *Soluzioni speciali*, ed al fine di esso, avendoci quelle analisi appalesato, che l'equazione $x^3 + q = px$ può avere a sue radici $f \pm \sqrt{g}$, essendo $f > \sqrt{g}$, e $-f + \sqrt{g}$ essendo $f < \sqrt{g}$; e l'equazione $x^3 = px + q$ può a sua radice avere $f + \sqrt{g}$, essendo $f < \sqrt{g}$; che all'incontro ripugna essere $\pm f \pm \sqrt{g}$, in qualunque rapporto di f a $\sqrt{g}$, radice dell'equazione $x^3 + px = q$. Noterò qui, che avendo $x^3 + q = px$ a radice $-f + \sqrt{g}$, ha pure $-f - \sqrt{g}$; ed $x^3 = px + q$, avendo a radice $f + \sqrt{g}$ ha insieme $f - \sqrt{g}$; ma $-f - \sqrt{g}$ espressamente negativa, ed $f - \sqrt{g}$ negativa anch'essa per il supposto di $f < \sqrt{g}$ non sono del genere dei binomj o recisi euclidei.

Teorema V. Possono i binomj di 1.ª e 4.ª specie co' loro recisi, ed i binomj di 2.ª specie, e 5.ª esser radici dell' equazione $x^3+q=nx^2$; ed i recisi di specie 2.ª e 5.ª possono esser radici dell'equazione $x^3+nx^2=q$; ma niuno dei binomj o recisi può essere radice dell'equazione $x^3=nx^2+q$. Per le Specolaz. IV, e V rispetto ai binomj di 1.ª e 4.ª specie la parte razionale del cubo sta alla parte razionale del quadrato in ragione minore, che la parte irrazionale alla parte irrazionale; dunque uguagliandosi la parte irrazionale di x^3 alla parte irrazionale di nx^2, la parte razionale di x^3 resterà minore della parte razionale di nx^2; ma quella potrà giugnere ad uguagliamento con questa, ajutata che ella sia con l'aggiunta di q. Vale lo stesso raziocinio per i recisi delle medesime specie 1.ª e 4.ª, poichè il mutare i binomj di tali specie nei recisi altro non fa, che cangiare di positive in negative le parti irrazionali del cubo, e del quadrato. Il raziocinio medesimo vale eziandio per i binomj delle specie 2.ª e 5.ª, essendo anche riguardo ad essi giusta la Specolaz. VII, VIII la parte razionale del cubo alla parte razionale del quadrato in minore ragione, che la parte irrazionale alla parte irrazionale. Ma non vale per i recisi di esse specie 2.ª e 5.ª, perchè sì le razionali, che le irrazionali parti del quadrato e del cubo di tali recisi hanno contrario segno, onde non possono uguagliarsi, ma possono bensì distruggersi; e questo fa, che essi recisi servir possono all'equazione $x^3+nx^2=q$, ed a lei unicamente, siccome unicamente alla equazione $x^3+q=nx^2$ i binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie, ed i binomj di 2.ª e 5.ª. Laonde niun, nè binomio, nè reciso vi resta per la equazione $x^3=nx^2+q$. Si confrontino i due primi membri di questo teorema con i risultati sotto i num. 4.° e 5.° del Manipolo II delle *Soluzioni speciali*, e si vedranno in perfetto consenso: le due radici $\frac{1}{2}(n+h)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(n+h)(n-3h)}$, delle quali si provò capace l'equazione $x^3 + q = n x^2$, sono binomio e reciso di 1.ª o 4.ª specie, e la radice $\frac{1}{2}(n-h) + \frac{1}{2}\sqrt{(n-h)(n+3h)}$, che essa equazione trovossi poter pure ammettere, è binomio di 2.ª o 5.ª specie; e la radice poi $-c + \sqrt{2c(n-\frac{3}{2})}$, che si dimostrò poter avere l'equazione $x^3 + n x^2 = q$, qualora sia positiva, come è d'uopo per esser reciso euclideo, è reciso di 2.ª, o 5.ª specie. Restami da aggiugnere, che avendo l'equazione $x^3 + q = n x^2$ la radice $\frac{1}{2}(n-h) + \frac{1}{2}\sqrt{(n-h)(n+3h)}$, ha insieme la $\frac{1}{2}(n-h) - \frac{1}{2}\sqrt{(n-h)(n+3h)}$; e la equazione $x^3 + n x^2 = q$ avendo la radice $-c + \sqrt{2c(n-\frac{3}{2}c)}$, ha pure la $-c - \sqrt{2c(n-\frac{3}{2}c)}$; ma le negative quantità $\frac{1}{2}(n-h) - \frac{1}{2}\sqrt{(n-h)(n+3h)}$, $-c - \sqrt{2c(n-\frac{3}{2}c)}$ non sono del genere dei binomj, o recisi euclidei.

Teorema VI. La equazione in 1.° luogo $x^3 + n x^2 + q = p x$ può verificarsi nei binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie, e nei recisi pure di 2.ª e 5.ª. Poichè per le Specolaz. III, e V essendo la parte razionale sì del quadrato, sì del cubo alla parte razionale del semplice binomio o reciso di 1.ª o 4.ª specie in ragion minore, che la parte irrazionale sì del quadrato, sì del cubo alla parte irrazionale di esso binomio, o reciso, l'aggregato della parte razionale di x^3, e della parte razionale di $n x^2$ deve stare alla parte razionale di $p x$ in minore ragione, che l'aggregato della parte irrazionale di x^3, e della parte irrazionale di $n x^2$ alla parte irrazionale di $p x$: dunque uguagliandosi l'aggregato delle parti irrazionali di x^3, $n x^2$ alla parte irrazionale di $p x$, l'aggregato delle parti razionali di x^3, $n x^2$ resterà minore della parte razionale di $p x$, ma potrà uguagliarsi a questa ajutato da q. Quanto ai recisi di 2.ª e 5.ª specie, essendo per le Specolaz. VI, VIII la parte razionale sia del quadrato, sia del cubo alla parte razionale del reciso semplice in ragione maggiore che la parte irrazionale sia del quadrato, sia del cubo alla parte irrazionale di esso reciso; essendo d'altro canto per le Specolaz. I, II e per le formole sotto la Specolaz. VI, siccome nel semplice reciso, così nel cubo negativa la parte razionale, positiva la irrazionale, all'incontro nel quadrato positiva la razionale, negativa la irrazionale; ed essendo le parti o razionale o irrazionale del cubo rispettivamente maggiori delle parti razionale ed irrazionale del quadrato: per tutto ciò la differenza delle parti razionali di x^3, nx^2 sarà alla parte razionale di px in maggior ragione che la differenza delle parti irrazionali di x^3, nx^2 alla parte irrazionale di px, e potrà succedere, che la differenza delle parti irrazionali di x^3, nx^2 sia potitiva, e si uguagli alla parte positiva irrazionale di px, e che insieme la differenza delle parti razionali di x^3, nx^2 sia negativa, e vinca la parte razional negativa di px, ma a questa si uguaglj associata a $+q$, che ne scancelli una porzione. L'equazion pertanto $x^3+nx^2+q=px$ conviene con l'equazion $x^3+q=px$ in poter avere a sue radici sì i binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie, sì i recisi di 2.ª e 5.ª, perchè x^2, x^3 sono cospiranti rispettivamente ad x nella minoranza o maggioranza della ragione della razional parte loro alla razionale di lui in confronto della ragione della parte irrazionale alla irrazionale. Per la stessa cagione l'equazion $x^3+nx^2+q=px$ conviene eziandio con l'equazione $nx^2+q=px$ nel poter avere a radici i binomj e recisi di 1.ª, e 4.ª specie. Quinci a tessere per l'equazione $x^3+nx^2+q=px$ la piena dimostrazione della possibilità di avere a radici sì i binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie, sì i recisi di 2.ª e 5.ª altro non si ha a fare, che con la dimostrazione per l'equazione $x^3+q=px$ comporre la considerazione di nx^2; ed a dimostrare separatamente nell'equazione $x^3+nx^2+q=px$ la possibilità di avere a sue radici i binomj e recisi di 1.^{a}, e 4.^{a} specie, basta con la dimostrazione per l'equazione $nx^2+q=px$ comporre il computo di x^3. Sotto tali rispetti si può l'equazione $x^3+nx^2+q=px$ riguardare qual composta, o dell'equazione $x^3+q=px$, e del termine nx^2, o dell'equazione $nx^2+q=px$, e del termine x^3; e non è che in questo senso, che io intender possa ciò, che dice Cardano, comporsi l'equazione $x^3+nx^2+q=px$ dalle due $nx^2+q=px$; $x^3+q=px$, la prima delle quali si può verificare nei binomj e recisi di 1.^{a} e 4.^{a} specie, la seconda inoltre eziandio nei recisi di specie 2.^{a} e 5.^{a}, e perciò essa equazione $x^3+nx^2+q=px$ potersi in tutti questi modi verificare. Posto in piena luce il senso di tal parlare, troppo presso Cardano ristretto ed oscuro, e con un esempio già dato a divedere, come nella dimostrazione per una equazione trinomia inserire si debba il calcolo del termine insiem con essa componente l'equazion quadrinomia, onde a questa trasportare la dimostrazione medesima, sarammi lecito di scorrere velocemente su le altre cubiche equazioni quadrinomie.

In 2.^{o} luogo l'equazione $x^3+nx^2+px=q$ può adempiersi per li recisi di 2.^{a} e 5.^{a} specie. Poichè questa equazione può considerarsi siccome composta del termine x^3, e dell'equazione $nx^2+px=q$, che può avverarsi in tali recisi; o del termine px, e dell'equazione $x^3+nx^2=q$, che ammette parimenti di essere per essi verificata. A comporre nel calcolo x^3, px contro nx^2, si rifletta, che per la Specolaz. VI essendo la parte razionale del quadrato del reciso di 2.ª, o 5.ª specie alla parte razionale di lui in ragione maggiore, che la parte irrazionale alla parte irrazionale, viene ad essere inversamente la parte razionale del reciso alla parte razionale del suo quadrato in ragione minore, che la parte irrazionale alla parte irrazionale, non altrimenti che per la Specolaz. VII la parte razionale del cubo alla razionale del quadrato è in ragione minore, che la irrazionale del cubo alla irrazional del quadrato.

In 3.° luogo l'equazione $x^3 + px + q = nx^2$ può avere a sue radici i binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie, ed i binomj anche di specie 2.ª e 5.ª. Poichè si può riguardar come composta dal termine px, e dell'equazione $x^3 + q = nx^2$ che sì i binomj e recisi di 1.ª e 4.ª, sì i binomj di specie 2.ª e 5.ª ammette a radici; e può anche considerarsi composta del termine x^3, e dell'equazione $nx^2 = px + q$, che riceve a radici i binomj di 2.ª specie e 5.ª.

In 4.° luogo l'equazione $x^3 = nx^2 + px + q$ può essere verificata per i binomj di 2.ª e 5.ª specie; potendosi riguardare come composta del termine nx^2, e dell'equazione $x^3 = px + q$, che per essi binomj può ricevere avveramento. Cardano dice l'equazione $x^3 = nx^2 + px + q$ comporsi dall' equazione $x^3 = px + q$, e dall'equazione $x^3 = nx^2 + q$, e non ammettendo questa binomio o reciso, che la verifichi, ammettendo $x^3 = px + q$ i binomj di 2.ª e 5.ª specie, inferisce per questi medesimi, e per essi solamente, tra gli euclidei binomj e recisi, potersi verificare la equazione quadrinomia $x^3 = nx^2 + px + q$. Ma sebbene la equazion trinomia $x^3 = nx^2 + q$ non riconosca binomio o reciso atto a verificarla, non lice però dedurre, che la equazione $x^3 = nx^2 + px + q$ in quanto da essa composta non ammetta binomio, o reciso a suo verificamento, dovendosi aver riguardo al termine $p x$, che in un con la trinomia equazione $x^3 = n x^2 + q$ concorre a comporla, e che può togliere la causa della esclusione a questa inerente. Di fatto in tanto l'equazione $x^3 = n x^2 + q$ esclude da sè i binomj di 2.ª, o 5.ª specie, in quanto che la parte razionale di x^3 per la Specolaz. VI avrebbe alla parte razionale di x^2 minore ragione che la parte irrazionale alla parte irrazionale, e ciò nondimeno bisognerebbe, che, uguagliandosi la parte irrazionale di x^3 alla parte irrazionale di $n x^2$, la parte razionale di x^3 superasse di q la parte razionale di $n x^2$; ciò che ripugna. Ma inserito nel membro secondo dell' equazione $x^3 = n x^2 + q$ il termine $p x$, e fatto passaggio all' equazione $x^3 = n x^2 + p x + q$, essendo per la Specolaz. VI la parte razionale di x^3 alla razionale di x in ragione maggiore che la irrazionale alla irrazionale, al contrario che in x^3 rispetto ad x^2, può nella composizione nascere non solamente un compenso, ma un vantaggio a favore della parte razionale di x^3, di tal fatta, che, uguagliandosi la parte irrazionale di lui alla somma delle parti irrazionali di $n x^2$, $p x$, la parte razionale di x^3 superi della quantità q la somma delle parti razionali di $n x^2$, $p x$.

In 5.° luogo l'equazione $x^3 + q = n x^2 + p x$ può avverarsi pei binomj e recisi di tutte e quattro le specie 1.ª, 2.ª, 4.ª, 5.ª. La ragione si è, perchè essa può considerarsi, e come composta di $n x^2$ e dell'equazione $x^3 + q = p x$, che può verificarsi nei binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie, e nei recisi di 2.ª e 5.ª, e come composta di $p x$, e dell'equazione $x^3 + q = n x^2$, che può verificarsi nei binomj e recisi di 1.ª, e 4.ª, e nei binomj di 2.ª e 5.ª specie; onde raccogliendo ella in sè tutte queste possibilità, non vi ha binomio o reciso delle quattro specie, che non riceva a suo verificatore.

In 6.° luogo l'equazione $x^3 + px = nx^2 + q$ può ottener verificamento per i binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie, potendo esser considerata siccome composta di x^3 e dell' equazione $px = nx^2 + q$, che può per essi binomj e recisi essere verificata. Si può essa equazione considerar anche composta da px e dall'equazione $x^3 = nx^2 + q$, e quantunque questa per sè ricusi qualunque binomio o reciso a radice, tuttavia l'aggiunta del termine px ad x^3 può rintuzzare in parte almeno la ricusa, e creare in essa la disposizione ai binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie, in un modo simile a quello, che sotto il num. 4.° relativamente alla composizione della $x^3 = nx^2 + px + q$ per il px aggiunto al secondo membro di essa $x^3 = nx^2 + q$ si è spiegato.

In 7.° luogo l'equazione $x^3 + nx^2 = px + q$ può essere verificata pei binomj di 2.ª e 5.ª specie, potendosi considerare composta del termine nx^2, e dell'equazione $x^3 = px + q$, o del termine x^3 e dell'equazione $nx^2 = px + q$, e potendo l'una e l'altra delle due equazioni $x^3 = px + q$, $nx^2 = px + q$ essere per i detti binomj verificata.

Mi lusingo di aver penetrata la mente di Cardano, di avere supplito al difetto del suo esporre, e di aver veduto ciò, che egli non vide.

Teorema VII. I binomj e recisi di 1.ª e 4.ª specie servir possono di radici all'equazione di 4.° grado $x^4 + q = px$; i binomj di specie 2.ª, o 5.ª all'equazione $x^4 = px + q$, ed i recisi di queste specie all'equazione $x^4 + px = q$. Le dimostrazioni sono simili a quelle del Teorema III sostituito al quadrato x^2 il quadrato-quadrato x^4. E sostituendo anche ad x il quadrato x^2, si procederà a dimostrare poter i binomj e recisi di 1.ª, e 4.ª specie similmente servire all' equazione $x^4 + q = nx^2$, i binomj di 2.ª e 5.ª specie all' equazione $x^4 = n x^2 + q$, ed i recisi loro all'equazione $x^4 + n x^2 = q$.

Teorema VIII. Possono i binomj e recisi di 1.ª, e 4.ª specie soddisfare in qualità di radici all'equazione $x^4 + q = m x^3$, i binomj delle specie 2.ª, e 5.ª alla equazione $x^4 = m x^3 + q$, ed i recisi di esse specie 2.ª, e 5.ª all'equazione $x^4 + m x^3 = q$. Per la Specolaz. IV sta la parte razionale del quadrato-quadrato del binomio, o reciso di 1.ª, o 4.ª specie alla parte razionale del cubo in una ragione minore, che la parte irrazionale alla parte irrazionale; dunque, uguagliandosi la parte irrazionale di x^4 alla parte irrazionale di $m x^3$, la parte razionale di x^4 sarà minore della parte razionale di $m x^3$, ma potrà a questa anch'essa uguagliarsi ajutata dal numero q. All'incontro per la Specolaz. VII la parte razionale del quadrato-quadrato del binomio di 2.ª, o 5.ª specie sta alla parte razionale del cubo in ragione maggiore, che la parte irrazionale alla parte irrazionale; conseguentemente, uguagliandosi la parte irrazionale di x^4 alla irrazionale di $m x^3$, la parte razionale di x^4 superar può la parte razionale di $m x^3$ della quantità q. Ed essendo per la stessa Specolaz. VII rispetto pure ai recisi di 2.ª, e 5.ª specie la parte razionale del quadrato-quadrato alla parte razionale del cubo in ragione maggiore, che la parte irrazionale alla parte irrazionale; essendo d'altro lato le parti razionali del quadrato-quadrato e del cubo per le Specolaz. I, II di contrarj segni affette, e similmente le irrazionali, potranno perciò distruggersi la irrazionale parte negativa di x^4 e la irrazional positiva di $m x^3$, ed intanto la razional positiva di x^4 superare la negativa razional parte di $m x^3$ del numero q. Cardano erra in affermare che i binomj e recisi di 1.ª, e 4.ª specie, ed i binomj pure di 2.ª e

5.ª servono per l'equazione $x^4 = m x^2 + q$, ed i recisi delle specie 2.ª, e 5.ª per l'equazione $x^4 + m x^2 = q$, e che l'equazione $x^4 + q = m x^2$ non ha binomio, o reciso, che le serva. Di questa affermazione non vi è, che il punto risguardante l'equazione $x^4 + m x^2 = q$, che sia vero, gli altri due sono falsi; e questi errori di Cardano sono conseguenze dell'errore, in cui cade, stimando nei binomj, e recisi di 1.ª, e 4.ª specie, parimente, che in quelli di 2.ª, e 5.ª, la parte razionale del quadrato-quadrato alla razionale del cubo in ragione maggiore, che la parte irrazionale alla irrazionale; errore già da me avvertito, e nel numerico esempio, che gli diede l'origine, confutato sotto la Specolaz. v.

Teorema IX. Una equazione qualunque di 4.° grado quadrinomia si può considerare composta di una trinomia di 4.°, di 3.°, di 2.°, e di un termine, ed ogni equazione di 4.° grado quinomia si può considerare composta di una quadrinomia di 4.°, e di 3.°, e di un termine. Dimostrati pertanto i teoremi su le equazioni di 2.° grado, su le trinomie, e quadrinomie di 3.°, e su le trinomie di 4.°, ecco aperta l'ampia via a procedere alle quadrinomie, e da esse alle quinomie, o complete di 4.°. Ma lungo troppo sarebbe il percorrere questo vastissimo campo. Cardano stesso in un tempo di tanto amore per le cose euclidee non fece che toccarlo. Se però taluno di esse appassionato volesse proseguire ad esercitare su l'abilità dei tali, o tali altri euclidei binomj, e recisi rispetto alle varie equazioni quadrinomie o quinomie di 4.° grado la specolazione; io sarò contento d'avergli nel teorema antecedente rettificato, e da inciampo renduto sicuro il cammino.

SCHIERA II.

Su le altre linee euclidee rispetto alle equazioni.

Teorema I. Nell'equazione composta solo di x^4, x^2 e del numero q, cioè, in nostro stile, nella equazione $x^4 \pm n x^2 \pm q = 0$ può x essere Binomiale 1.°, o Irrazionale maggiore, o Potente in razionale e mediale, o alcuno dei corrispondenti recisi. Essendo x alcuna di queste linee, sarà x^2 per i corollarj dei teoremi II, IV, V alla pag. 261 e seg. binomio di 2.ª, 4.ª, 5.ª specie, o reciso di queste stesse specie, e per il teorema I pag. 260 sarà x^4 binomio o reciso di 1.ª specie con il radicale medesimo, che x^2; onde non comprendendo x^2, x^4, che parti razionali, e parti irrazionali fra loro comunicanti, possono comporre l'equazione $x^4 \pm n x^2 \pm q = 0$; e conseguentemente x può essere alcuna delle nominate linee.

Teorema II. Ma non può x in essa equazione essere nè Bimediale 2.°, nè Potente in due mediali, nè di queste due linee reciso. Poichè se lo fosse, sarebbe x^2 binomio o reciso di 3.ª, o 6.ª specie per i corollarj dei teoremi III, VI pag. 262, 263, ed x^4 sarebbe per il teorema I, pag. 260 binomio o reciso di 1.ª specie, cioè x^2 sarebbe della forma $\sqrt{t} \pm \sqrt{u}$, ed x^4 suo quadrato della forma $t + u \pm 2\sqrt{t}\sqrt{u}$: le quali forme nulla avendo di comunicante fra loro, è impossibile che unitamente al numero q costituiscano l'equazione $x^4 \pm p x^2 \pm q = 0$.

Teorema III. La forma di x non può essere nè tampoco Bimediale 1.°, Irrazionale maggiore, Potente in razionale, e mediale, od alcuno dei corrispondenti recisi nelle equazioni $x^3 \pm n x^2 \pm q = 0$; $x^4 \pm m x^3 \pm q = 0$. Se lo fosse, x^2 nella prima sarebbe binomio, o reciso di 2.ª, 4.ª, 5.ª specie, ed x^4 nella seconda binomio, o reciso di 1.ª; ma ma x^2 sarebbe della natura di x, cioè o Bimediale 1.°, o Irrazionale maggiore, o Potente in razionale, e mediale, od alcuno dei corrispondenti recisi. Ora tali linee sono per le formole da pag. 252 a pag. 258 incomunicanti co' binomj, e recisi, e perciò non possono insieme collegarsi a fabbrica delle esposte equazioni; resta dunque dimostrato non poter esse avere alcuna delle mentovate linee per radice.

SCHIERA III.

Teoremi speciali riguardanti l'equazione $x^3 = px \pm q$.

Teorema I. Di tutte le quantità irrazionali monomie, o binomie di 2.°, e di 3.° grado non vi hanno, che le due $t \pm \sqrt{u}$, $\sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}$, che possano soddisfare all'equazione $x^3 = px \pm q$.

Dimostrazione. Le forme irrazionali monomie, e binomie di 2.°, e 3.° grado sono:

$$\sqrt{t},\ \sqrt[3]{t},\ t \pm \sqrt{u},\ \sqrt{t} \pm \sqrt{u},\ t \pm \sqrt[3]{u},\ \sqrt{t} \pm \sqrt[3]{u},\ \sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}.$$

In 1.° luogo nell'equazione $x^3 = px \pm q$ non può essere $x = \sqrt{t}$, perchè sostituendo ne verrebbe $t\sqrt{t} = p\sqrt{t} \pm q$, onde $\pm q$ sarebbe unico termine razionale senza paragone, e possibilità d'uguaglianza.

Per opposta ragione in 2.° luogo non può essere $x = \sqrt[3]{t}$, perchè risultando, sostituzion fatta, $t = p\sqrt[3]{t} \pm q$ rimane senza simile ed uguale il termine irrazionale $p\sqrt[3]{t}$.

Non può in 3.° luogo essere $x = \sqrt{t} \pm \sqrt{u}$. Si è già specolativamente dimostrato nel 2.° dei teoremi della Schiera I. Ma apparirà ocularmente, facendo la sostituzione, per provenirne $(t+3u)\sqrt{t}\pm(3t+u)\sqrt{u}=p\sqrt{t}\pm p\sqrt{u}\pm q$, dove il termine razionale $\pm q$ resta di simile privo.

In 4.° luogo non può essere $x=t\pm\sqrt[3]{u}$, perchè sostituendo ne nasce $t^3\pm 3t^2\sqrt[3]{u}+3t\sqrt[3]{u^2}\pm u=pt\pm p\sqrt[3]{u}\pm q$, equazione impossibile, mancando il termine irrazionale $3t\sqrt[3]{u^2}$ di simile.

Per la stessa ragione non può essere $x=\sqrt{t}\pm\sqrt[3]{u}$, dando la sostituzione $t\sqrt{t}\pm 3t\sqrt[3]{u}+3\sqrt{t}\sqrt[3]{u^2}\pm u=p\sqrt{t}$ $\pm p\sqrt[3]{u}\pm q$, ove il termine irrazionale $3\sqrt{t}\sqrt[3]{u^2}$ trovasi solo, e fuori del poter essere uguagliato.

Che all'equazione $x^3=px\pm q$ soddisfacciano le forme irrazionali $x=t\pm\sqrt{u}$, $x=\sqrt[3]{t}\pm\sqrt[3]{u}$ consta, rispetto alla seconda dalla tartagliana soluzione pag. 156, e rispetto alla prima dal num. 4.° del Manipolo I delle *Soluzioni speciali* pag. 170.

Teorema II. La forma irrazionale $t\pm\sqrt{u}$ non soddisfa all'equazione $x^3=px\pm q$, che a condizione, che essa equazione abbia una radice razionale.

Dimostrazione. Sostituita la forma irrazionale $t\pm\sqrt{u}$ in luogo di x nell'equazione $x^3=px\pm q$, si ha $t^3\pm 3t^2\sqrt{u}+3tu\pm u\sqrt{u}=pt\pm p\sqrt{u}\pm q$; il verificamento di questa equazione richiede $p=3t^2+u$, $\pm q=t^3+3tu-pt=2t(p-4t^2)$: si trasporti questo valore di q nell'equazione $x^3=px\pm q$, e dovrà essere $x^3=px+2t(p-4t^2)$, ovvero $x^3=px+2pt-8t^3$; ma un po' di riflessione basta ad accorgersi, che questa equazione si adempie posto $x=-2t$, che è un valore di x razionale, negativo se nella forma irrazionale $t\pm\sqrt{u}$ sia t positivo, e reciprocamente positivo, se in essa forma irrazionale t sia negativo. Dunque la forma irrazionale $t\pm\sqrt{u}$ non cade in qualità di radice nell' equazione $x^3 = px \pm q$ fuorchè a condizione, che questa equazione medesima abbia una radice razionale.

Teorema III. Nè il trinomio quadratico $\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{u}$, nè il cubico $\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$ esser possono radice dell'equazione $x^3 = px \pm q$.

Dimostrazione. Sostituito nell'equazione $x^3 = px \pm q$ in luogo di x il trinomio $\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{u}$, risulta $s\sqrt{s} + t\sqrt{t} + u\sqrt{u} + 3s(\sqrt{t} + \sqrt{u}) + 3t(\sqrt{s} + \sqrt{u}) + 3u(\sqrt{s} + \sqrt{t}) + 6\sqrt{s}\sqrt{t}\sqrt{u} = p(\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{u}) \pm q$, dove il termine irrazionale $6\sqrt{s}\sqrt{t}\sqrt{u}$ è contro la natura dell'equazione senza simile. Resta uno stesso assurdo se in vece di $\sqrt{s}$ si ponga s, cioè il trinomio $\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{u}$ si cangi in $s + \sqrt{t} + \sqrt{u}$; onde neppur questo può esser radice dell'equazione $x^3 = px \pm q$.

Si sostituisca ora in essa equazione in luogo di x il trinomio cubico $\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$, e si avrà $s + t + u + 3(\sqrt[3]{st^2} + \sqrt[3]{s^2u} + \sqrt[3]{tu^2}) + 3(\sqrt[3]{s^2t} + \sqrt[3]{su^2} + \sqrt[3]{t^2u}) + 6\sqrt[3]{stu} = p(\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}) \pm q$: è all'occhio evidente la ripugnanza di questa equazione, che contiene dieci radicali tutti dissimili fra di loro. Ma e non si potrebbe con certi rapporti tra s, t, u rendere alcuni dei radicali ad altri simili, e comunicanti? Si suppongano s, t, u in continua proporzione geometrica, così che sia $u = \frac{t^2}{s}$, e ne verrà tostamente $\sqrt[3]{stu} = \sqrt[3]{t^3} = t$; inoltre $\sqrt[3]{st^2} + \sqrt[3]{s^2u} + \sqrt[3]{tu^2} = \left(2 + \frac{t}{s}\right)\sqrt[3]{st^2}$, e $\sqrt[3]{s^2t} + \sqrt{su^2} + \sqrt{t^2u} = \left(1 + 2\frac{t}{s}\right)\sqrt[3]{s^2t}$, per le quali riduzioni il risultato dapprima avutosi si restrigne ad $s + t + \frac{t^2}{s} + 3\left(2 + \frac{t}{s}\right)\sqrt[3]{st^2} + 3\left(1 + 2\frac{t}{s}\right)\sqrt[3]{s^2t} + 6t = p\left(\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{\frac{t^2}{s}}\right) \pm q$, equazione ancora impossibile, siccome fornita nel primo membro di due radicali, nel secondo di tre, e tutti dissimili, ed incomunicanti. Sin qui con Cardano. Proseguiamo noi supponendo st un cubo, il quale sia r^3, per lo che $t = \frac{r^3}{s}$, $u = \frac{t^2}{s} = \frac{r^6}{s^3}$: laonde il trinomio da principio assunto $\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$, e per l'ipotesi della continua proporzione $s:t:u$ ridotto già a $\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{\frac{t^2}{s}}$ si riduce secondamente a $\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{\frac{r^3}{s}} + \sqrt[3]{\frac{r^6}{s^3}}$, o sia $\sqrt[3]{s} + r\sqrt[3]{\frac{1}{s}} + \frac{r^2}{s}$, cioè ad un trinomio cubico di due soli termini irrazionali cubici, e di uno razionale composto; e l'equazione corrispondentemente in seconda sua riduzione riceve la forma $s + \frac{r^3}{s} + \frac{r^6}{s^3} + 3r^2\left(2 + \frac{r^3}{s^2}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{s}} + 3r\left(1 + 2\frac{r^3}{s^2}\right)\sqrt[3]{s} + 6\frac{r^3}{s}$ $= p\sqrt[3]{s} + pr\sqrt[3]{\frac{1}{s}} + p\frac{r^2}{s} \pm q$, nella quale al certo la ripugnanza per il diverso numero, e la dissimilitudine dei radicali di qua e di là del segno di ugualità vedesi cessata; ma una nuova ne sorge nei due paragoni $3r^2\left(2 + \frac{r^3}{s^2}\right) = pr$, e $3r\left(1 + 2\frac{r^3}{s^2}\right) = p$, dài quali segue $s^2 = r^3$, $s = r^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{s} = \sqrt{r}$, $r\sqrt[3]{\frac{1}{s}} = \frac{r}{\sqrt[3]{s}} = \sqrt{r}$, $\frac{r^2}{s} = r^{2-\frac{3}{2}} = \sqrt{r}$, quinci $\sqrt[3]{s} + r\sqrt[3]{\frac{1}{s}} + \frac{r^2}{s} = 3\sqrt{r}$, e per terza riduzion dell'equazione la forma $27r\sqrt{r} = 3p\sqrt{r} \pm q$: vale dire il trinomio cubico trasmutato e compenetrato in un monomio quadratico, l'equazione impossibile per più termini irrazionali dissimili travolta in una equazione impossibile per termine razionale senza simile, in una parola ritornato il caso rigettato nel 1.° luogo del teorema I.

Teorema IV. Non possono all'equazione $x^3 = px \pm q$ servir di radice i trinomj $s + \sqrt{t} + \sqrt[3]{u}$, $\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt[3]{u}$, $\sqrt{s} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$.

Dimostrazione. Il trinomio $s+\sqrt{t}+\sqrt[3]{u}$ nell'equazione sostituito ad x produce $s^3+t\sqrt{t}+u+3st+3s\sqrt[3]{u^2}+3s^2\sqrt{t}+3s^2\sqrt[3]{u}+3t\sqrt[3]{u}+3\sqrt{t}\sqrt[3]{u^2}+6s\sqrt{t}\sqrt[3]{u}=ps+p\sqrt{t}+p\sqrt[3]{u}\pm q$, equazione, nella quale i termini irrazionali $3s\sqrt[3]{u^2}$, $3\sqrt{t}\sqrt[3]{u^2}$, $6s\sqrt{t}\sqrt[3]{u}$ mancano di simili, conseguentemente impossibile. Cangiato s in $\sqrt{s}$ l'equazione diviene $s\sqrt{s}+t\sqrt{t}+u+3t\sqrt{s}+3\sqrt{s}\sqrt[3]{u^2}+3s\sqrt{t}+3s\sqrt[3]{u}+3t\sqrt[3]{u}+3\sqrt{t}\sqrt[3]{u^2}+6\sqrt{s}\sqrt{t}\sqrt[3]{u}=p\sqrt{s}+p\sqrt{t}+p\sqrt[3]{u}\pm q$, che ritiene tre termini senza simili, $3\sqrt{s}\sqrt[3]{u}$, $3\sqrt{t}\sqrt[3]{u^2}$, $6\sqrt{s}\sqrt{t}\sqrt[3]{u}$. Che se mutisi inoltre $\sqrt{t}$ in $\sqrt[3]{t}$ l'equazione prende la forma $s\sqrt{s}+t+u+3\sqrt[3]{t^2}\sqrt{s}+3\sqrt{s}\sqrt[3]{u^2}+3s\sqrt[3]{t}+3s\sqrt[3]{u}+3\sqrt[3]{t^2}\sqrt[3]{u}+3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u^2}+6\sqrt{s}\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}=p\sqrt{s}+p\sqrt[3]{t}+p\sqrt[3]{u}\pm q$, dove il numero dei termini irrazionali senza simili è cresciuto da tre a cinque, $3\sqrt{s}\sqrt[3]{t^2}$, $3\sqrt{s}\sqrt[3]{u^2}$, $3\sqrt[3]{t^2}\sqrt{u}$, $3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u^2}$, $6\sqrt{s}\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}$.

Teorema V. Non può l'equazione $x^3=px\pm q$ avere a sua radice un quadrinomio cubico $\sqrt[3]{r}+\sqrt[3]{s}+\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{u}$, neppure se, supposte in continua proporzione le quattro quantità r, s, t, u, abbia la forma $\sqrt[3]{r}+\sqrt[3]{s}+\sqrt[3]{\frac{s^2}{r}}+\sqrt[3]{\frac{s^3}{r^2}}$, e nemmeno se una delle quattro quantità r, s, $\frac{s^2}{r}$, $\frac{s^3}{r^2}$ essendo perfetto cubo, uno dei termini del quadrinomio passi ad essere razionale.

La dimostrazione è facile su l'esempio delle precedenti, ed è superfluo, che io mi vi dilunghi.

Teorema VI. Niuna irrazionale monomia, di qualunque grado si sia, può essere radice dell'equazione $x^3 = px \pm q$.

Dimostrazione. Sia in genere la irrazionale monomia $\sqrt[\lambda]{t}$: sostituita nell'equazione dà $\sqrt[\lambda]{t^3} = p\sqrt[\lambda]{t} \pm q$, equazione per due capi impossibile, e per la dissimiglianza dei due termini irrazionali, e per l'unicità del razionale.

Teorema VII. Niun binomio di una parte razionale, e di altra irrazionale composto fuori del binomio quadratico $t \pm \sqrt{u}$ può all'equazione $x^3 = px \pm q$ servir di radice.

Dimostrazione. Preso in universale il binomio $t \pm \sqrt[\lambda]{u}$, nell'equazione $x^3 = px \pm q$ sostituiscasi, e ne verrà $t^3 \pm 3t^2\sqrt[\lambda]{u} + 3t\sqrt[\lambda]{u^2} \pm \sqrt[\lambda]{u^3} = pt \pm p\sqrt[\lambda]{u} \pm q$. Si è già dimostrato in particolare, che, se $\lambda = 3$, l'equazione è impossibile, quantunque il termine $\pm\sqrt[\lambda]{u^3}$ divenga razionale, per restarvi il termine $3t\sqrt[\lambda]{u^2}$ senza simile; che se λ sia da 3 diverso sarà anche $\pm\sqrt[\lambda]{u^3}$ un termine irrazionale di simile mancante, e quinci l'equazione per duplicata causa impossibile.

Teorema VIII. Niun binomio di due parti irrazionali composto fuori di $\sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}$ può all'equazione $x^3 = px \pm q$ soddisfare.

Dimostraz. Si assuma in generale il binomio $\sqrt[\lambda]{t} + \sqrt[\pi]{u}$: sostituendolo nell'equazione $x^3 = px \pm q$ ne risulta $\sqrt[\lambda]{t^3} \pm 3\sqrt[\lambda]{t^2}\sqrt[\pi]{u} + 3\sqrt[\lambda]{t}\sqrt[\pi]{u^2} \pm \sqrt[\pi]{u^3} = p\sqrt[\lambda]{t} \pm p\sqrt[\pi]{u} \pm q$. Si è già dimostrata impossibile questa equazione posto $\lambda = \pi = 2$, ovvero posto $\lambda = 2$, $\pi = 3$; se sia $\lambda = 2$, e π un numero, maggiore di 3 sarà il termine irrazionale $\pm\sqrt[\pi]{u^3}$ senza simile, e se in universale sieno λ, π due numeri di 3 maggiori, sarà senza simile il termine razionale $\pm q$, e senza simili pur saranno i termini irrazionali $\sqrt[\lambda]{t^1}$, $\pm\sqrt[\pi]{u^2}$.

Teorema IX. Non vi ha trinomio, molto meno quadrinomio, e molto ancor meno polinomio di maggior numero di termini, cui l'equazione $x^3 = p\,x \pm q$ soffra a sua radice.

Dimostrazione. Se non soffre il trinomio quadratico, se non tollera tampoco il trinomio cubico, è evidente dover molto più ricusare un trinomio qualunque di radicali di esponente più alto, e molto ancora più un qualunque quadrinomio, e vie maggiormente un polinomio di maggior numero di termini a cagione della moltitudine via via crescente di termini irrazionali senza simili, e della mancanza insieme di un termine razionale simile al noto q.

Teorema X. Nel caso, che l'equazione $x^3 = p\,x \pm q$ non abbia alcuna radice razionale, non vi è altra radical forma, che $\sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}$, che servir le possa.

Dimostrazione. Le due forme $t \pm \sqrt{u}$, $\sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}$ sono le sole radicali forme idonee ad essere radice dell'equazione $x^3 = p\,x \pm q$; la forma $t \pm \sqrt{u}$ suppone, che l'equazione abbia una radice razionale, e non ha luogo fuori di tal supposto; dunque per il caso contrario, che l'equazione fornita non sia di radice razionale, non resta delle radicali forme altra, che servir le possa, che la $\sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}$.

I teoremi pertanto di questa III Schiera compongono la dimostrazione *per esclusione* dell'esser $\sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}$ di tutte le immaginabili radicali forme l'unica, che l'equazione $x^3 = p\,x \pm q$ ammetta, non avendo radice alcuna razionale. Ella è negli esami, nelle esclusioni, nelle precipue ragioni di esse la dimostrazione stessa, che il Venini l'anno 1770 produsse nella sua profonda Appendice su la teoría delle equazioni, onde corona il 1.° volumetto degli *Elementi di Matematica ad uso delle Regie Scuole di Parma*. Sarebbesi egli il moderno analista affaticato in tal disamina, se Wallis, se Gua-de-Malves, se Montucla nelle storie loro avvisato lo avessero, che era già stata fatta dall'antico suo compatriotta Cardano? Ma dall'essere la forma $\sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}$ l'unica delle radicali, che dall'equazione sia ammessa nel caso di non aver alcuna radice razionale, ne segue egli, che sia la necessaria forma della radice, e sempre buona, qualunque sia il rapporto tra p, e q? E se lo è, dando la risoluzione tartagliana alle quantità t, u una struttura, che, qualora sia $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, diventa immaginaria, è ella questa struttura unica e necessaria, ovvero, cangiando via, in altra mutabile, al rapporto $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ adatta, e per esso reale? Ecco due ulteriori indagini di Cardano. Il Venini senza queste discussioni conchiude tosto, esser la forma implicata di immaginarj la unica e necessaria forma della radice nel caso di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, e perciò il caso detto irreducibile essere veramente tale. Non è questo il luogo di entrare di proposito nell'argomento, ed i soli tentativi di Cardano richiederebbero una troppo lunga digressione: meglio è riservare tutto il soggetto ad altro tempo.

SCHIERA IV.

Teoremi spettanti le equazioni cubiche trinomie di secondo termine fornite, e le quadrinomie.

Teorema generale. Tutte le equazioni cubiche trinomie di secondo termine fornite $x^3 \pm n x^2 \pm q = 0$, e le quadrinomie $x^3 \pm n x^2 \pm p x \pm q = 0$ ammettono a radice loro il trinomio cubico $\mp \frac{1}{3} n + \sqrt[3]{t} \pm \sqrt[3]{u}$. La cosa è chiara dal metodo di spogliarle del secondo termine.

Teorema speciale. L'equazione $x^3 + n x^2 + p x = q$ se sia $p = \frac{1}{4} n^2$ riceve a sua radice il trinomio cubico $\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{u^2} + 2\sqrt[3]{t u} = (\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u})^2$. Poichè facciasi $x = y^2$, e sostituendo si avrà $y^6 + n y^4 + \frac{1}{4} n^2 y^2 = q$, donde, estraendo la radice quadrata, viene $y^3 + \frac{1}{2} n y = \sqrt{q}$. Ma questa equazione giusta il tartagliano scioglimento ha per radice $y = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$; dunque essendo $x = y^2$, sarà $x = (\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u})^2 = \sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{u^2} + 2\sqrt[3]{t u}$, cioè questo trinomio cubico sarà radice dell'equazione $x^3 + n x^2 + \frac{1}{4} n^2 x = q$. Confessa Cardano questa osservazione essere di Lodovico Ferrari. Ed io osserverò il termine $2\sqrt[3]{t u}$ esser generalmente razionale per essere sempre giusta la tartagliana formola t, u tali, che il prodotto $t u$ riesce un cubo.

Gli altri teoremi speciali vedili al num. 7.° del Manipolo II, ed ai num. 3.°, 4.° del Manipolo III delle *Soluzioni speciali* pag. 179, e pag. 181.

ARTICOLO VII.

Specolazioni, e viste varie.

1.° Si moltiplichi l'equazione $x^3 = p x + q$ per $z^2 x + 1$, onde ne venga, $z^2 x^4 + x^3 = (z^2 x + 1)(p x + q)$, e dall'una e l'altra parte si aggiunga $\frac{1}{4 z^2} x^2$, sì che ne risulti $z^2 x^4 + x^3 + \frac{1}{4 z^2} x^2 = (z^2 x + 1)(p x + q) + \frac{1}{4 z^2} x^2$. Estraendo da ambe le parti la radice quadrata, si ha $z x^2 + \frac{1}{2 z} x = \sqrt{\left(\left(p z^2 + \frac{1}{4 z^2}\right) x^2 + (q z^2 + p) x + q\right)}$, equazione di 2.° gra-

do, qualora la quantità sotto il segno radicale sia un quadrato; e lo sarà, se sia $2\sqrt{\left(pz^2+\frac{1}{4z^2}\right)}\sqrt{q}=qz^2+p$, e quadrando $\frac{q}{z^2}=q^2z^4-2pqz+p^2$, ed estraendo la radice quadrata $\frac{\sqrt{q}}{z}=qz^2-p$, o sia $z^3=\frac{p}{q}z+\frac{1}{\sqrt{q}}$. Si supponga trovato il valore di z, e per esso recata la quantità $\left(pz^2+\frac{1}{4z^2}\right)x^2+(qz^2+p)x+q$ ad essere un quadrato, il quale sia $(hx+l)^2$; dunque $zx^2+\frac{1}{2z}x=hx+l$, $x^2+\left(\frac{1}{2z^2}-\frac{h}{z}\right)x=\frac{l}{z}$, $x=-\frac{1}{4z^2}+\frac{h}{2z}\pm$
$\sqrt{\left(\left(-\frac{1}{4z^2}+\frac{h}{2z}\right)^2+\frac{l}{z}\right)}$.

Esempio: $x^3=6x+9$. Formando $z^3=\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}$, si vede tosto essere $z=1$; onde $\left(pz^2+\frac{1}{4z^2}\right)x^2+(qz^2+p)x+q=6\frac{1}{4}x^2+15x+9=\left(2\frac{1}{2}x+3\right)^2$, e perciò $x^2+\frac{1}{2}x=2\frac{1}{2}x+3$, $x^2=2x+3$, $x=1+\sqrt{(1+3)}=3$.

2.ª L'equazione $x^3=q+(q+1)x$ ha per radice $x=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}\right)}$. È chiaro che la verifica, od è radice sua razionale $x=-1$, onde per la 3.ª soluzione speciale del Manipolo I pag. 167 fatto $p=q+1$, ne segue a radice irrazional positiva $x=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(q+\frac{1}{4}\right)}$. Similmente l'equazione $x^3=2q+(q+4)x$, verificandosi per il valore razionale $x=-2$, ha per radice irrazional positiva $x=1+\sqrt{(q+1)}$; e l'equazione $x^3=3q+(q+9)x$, avendo a radice razionale $x=-3$, ha per sua irrazional radice positiva $x=1\frac{1}{2}+\sqrt{\left(q+2\frac{1}{4}\right)}$; e l'equazione $x^3=4q+(q+16)x$, a razional radice avente $x=-4$, ha per radice positiva irrazionale $x=2+\sqrt{(q+4)}$. Cardano ponendo successivamente in ciascheduna delle equazioni q uguale ad 1, 2, 3, 4, 5..... stende quattro tavole. Con un po' di riflesso su le quattro equazioni, e su le corrispondenti positive radici irrazionali è facile costruirne le formole generiche: dunque l'equazione $x^3 = hq + (q + h^2)x$ ha per sua razional radice $x = -h$, e per sue radici irrazionali $x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\left(q + \frac{1}{4}h^2\right)}$.

3.ª Nell'equazione $x^3 + q = nx^2$ è $x < n$; all'incontro nell' equazione $x^3 = nx^2 + q$ è $x > n$. Nell'equazione $x^3 = px + q$ può essere $x > p$, $= p$, $< p$: sarà $x > p$, se $p^3 < p^2 + q$; sarà $x = p$, se $p^3 = p^2 + q$; sarà $x < p$, se $p^3 > p^2 + q$. Similmente nell'equazione medesima può esser $x > q$, $= q$, $< q$, e sarà $x > q$, se $q^3 < pq + q$; sarà $x = q$, se $q^3 = pq + q$; sarà $x < q$, se $q^3 > pq + q$.

4.ª Se sieno le due equazioni $x^3 = nx^2 + q$, $y^3 + ny^2 = q'$, e sia $y = x - n$, sarà $q : q' :: x : y$. Poichè $q = x^3 - nx^2 = (x - n)x^2 = yx^2$; $q' = (y + n)y^2 = (x - n + n)y^2 = xy^2$: onde $q : q' :: yx^2 : xy^2 :: x : y$;

se $x^3 = nx^2 + q$, $y^3 + n'y^2 = q$, sarà $x - n : y + n' :: y^2 : x^2$.

Poichè $q = (x - n)x^2 = (y + n')y^2$;

se $x^3 = nx^2 + q$, ed $y^3 + q = ny^2$, si ha $x - n : n - y :: y^2 : x^2$; perchè $q = (x - n)x^2 = (n - y)y^2$. Tra $x - n$, $n - y$ si costituisca una media proporzionale ω, così che sia $x - n : \omega : n - y$, sarà quinci $x - n : \omega :: y : x$, onde $y = \frac{(x-n)x}{\omega}$, e sostituendo nell'equazione $y^3 + q = ny^2$, risulterà $\frac{(x-n)^3 x^3}{\omega^3} + q = n\frac{(x-n)^2 x^2}{\omega^2}$; e poichè per l'equazione $x^3 = nx^2 + q$ è $q = (x - n)x^2$, sarà $\frac{(x-n)^3 x^3}{\omega^3} + (x - n)x^2 = n\frac{(x-n)^2 x^2}{\omega^2}$, conseguentemente $\omega^3 + (x - n)^2 x = n(x - n)\omega$: per le quali cose lo scioglimento dell'equazione $y^3 + q = ny^2$ si è renduto dipendente dagli scioglimenti delle due $x^3 = n x^2 + q$, $\omega^3 + (x - n)^2 x = n(x - n)\,\omega$. Cardano opera, e dimostra geometricamente: ne è ingegnoso il tenore; ma può ognuno immaginarsi quanto aggirato, prolisso, e faticoso. La differenza tra l'equazione $x^3 = n x^2 + q$, e la $y^3 + q = n y^2$ si è, che giusta la general formola stabilita al fine della pag. 165 l'espression di y della seconda è soggetta alla implicazione immaginaria, non l'espression di x della prima. L'equazione $\omega^3 + (x - n)^2 x = n(x - n)\,\omega$ ha tra il coefficiente della semplice incognita ω, ed il termine supposto noto la special relazione, che il coefficiente di ω è il prodotto delle due parti n, $x - n$ della quantità già supposta determinata x, ed il termine noto è il prodotto dal quadrato di una delle parti $x - n$ nella intera x. Se facciasi $x = g + h$, e la speciale incognita ω si cangi nella generale x, sarà la formola di simili equazioni $x^3 + h^2(h + g) = h g x$.

5.ª L'equazione $x^3 + q = p x$ si può generalmente ridurre alla forma $x^3 + h^2(h + g) = h g x$. Ponendo $p = h g$, $q = h^2(h + g)$, se ne ha $h^3 + p h = q$, equazione alla immaginaria implicazion non soggetta; dunque il riducimento accennato non incontra ostacolo, ed è universalmente conceduto: laonde trovato il modo di sciogliere in forma esente da immaginarj l'equazione $x^3 + h^2(h + g) = h g x$, data sarebbe in genere la soluzione in simil forma dell'equazione $x^3 + q = p x$.

6.ª L'equazione $x^3 = p x + q$ si scioglie in $q =$

$$\left(\tfrac{1}{2}x + \sqrt{\left(p - \tfrac{3}{4}x^2\right)}\right)^2 \times \left(\tfrac{1}{2}x - \sqrt{\left(p - \tfrac{3}{4}x^2\right)}\right) +$$

$$\left(\tfrac{1}{2}x - \sqrt{\left(p - \tfrac{3}{4}x^2\right)}\right)^2 \times \left(\tfrac{1}{2}x + \sqrt{\left(p - \tfrac{3}{4}x^2\right)}\right);$$ ed

eziandio in $\tfrac{1}{2}q = \left(\tfrac{1}{2}x + \sqrt{\left(p + \tfrac{q}{2x} - \tfrac{3}{4}x^2\right)}\right)^2 \times \left(\tfrac{1}{2}x -\right.$

$\sqrt{\left(p+\frac{q}{2x}=\frac{3}{4}x^2\right)}\Big)+\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{\left(p+\frac{q}{2x}-\frac{3}{4}x^2\right)}\right)^2\times$ $\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\left(p+\frac{q}{2x}-\frac{3}{4}x^2\right)}\right)$. Poichè dall'equazione si ha $q=(x^2-p)\,x=\left(\frac{1}{4}x^2-\left(p-\frac{3}{4}x^2\right)\right)x$, ed anche $\frac{1}{2}q=$ $(x^2-p)\,x-\frac{1}{2}q=\left(x^2-p-\frac{q}{2x}\right)x=\left(\frac{1}{4}x^2-\left(p+\frac{q}{2x}-\frac{3}{4}x^2\right)\right)x$. E generalmente poi si ha $\left(\frac{1}{4}a^2-b\right)a=$ $\left(\frac{1}{2}a+\sqrt{b}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}a-\sqrt{b}\right)+\left(\frac{1}{2}a-\sqrt{b}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}a+\sqrt{b}\right)$.

7.ª Nell'equazione $x^3+q=px$ si può p, o piuttosto $1\times p$ considerare come una superficie, e ad essa formarne una uguale fx, e si può q, o piuttosto $1^2\times q$ considerar come un parallelepipedo, ed a lui costruirne un uguale gx^2, e così trasformar l'equazione in $x^3+gx^2=fx\,.\,x$. E similmente si può trasformar l'equazione $y^3+py=q$ in $y^3+hy\,.\,y=ky^2$. Supposti pertanto p, q gli stessi nelle due equazioni $x^3+q=px$, $y^3+py=q$, sarà $p=fx=hy$, $q=gx^2=ky^2$, e quinci $f:h::y:x$; $g:k::y^2:x^2$, conseguentemente $g:k::f^2:h^2$.

8.ª Dall'equazione $x^3+q=px$ venendone $q=(p-x^2)\,x$, si può considerar $p-x^2$ come la differenza di due spazj quadrati $\sqrt{p}\times\sqrt{p}$, ed x^2, o sia come il gnomone tra l'uno e l'altro. Sia $p>x^2$, ed al gnomone $p-x^2$ costruiscasi uguale un rettangolo hl, facciasi cioè $p-x^2=hl$, sarà $q=hlx$, e quinci, se riesca di dividere p in t^2+hl, sia t razionale, od irrazionale, ma sì fatto, che si avveri $q=hlt$, sarà $x=t$. Se all'incontro sia $p<x^2$, sarà $p-x^2=-hl$, e per supporsi q positivo, ed $=-hlx$ dovrà x essere negativo; laonde se trovisi un valor negativo $-t$, tale, che dia $t^2=$ $p+hl$, $q=-hl\times -t$, sarà $-t$ il valore di x.

9.^{a} Avendosi dall'equazione $x^3 = px + q$ il termine noto $q = x(x^2 - p)$, si consideri $x^2 - p$ come il gnomone di differenza tra i due quadrati x^2, e $\sqrt{p} \times \sqrt{p}$, al qual gnomone intendasi costruito uguale il quadrato k^2. Distinguendo anche qui i due casi di $x^2 > p$, ed $x^2 < p$, sarà nel primo $q = k^2 x$, nel secondo $q = -k^2 \times -x$, conseguentemente $x^3 = px \pm k^2 \times \pm x$, e dividendo per $\pm x$, $x^2 = p + k^2$, e quinci $x = \pm \sqrt{(p + k^2)}$; e vale di qualunque natura, o razionale, od irrazionale sia x.

Le specolazioni di questo, e dell'antecedente numero non permettono più di dubitare, che Cardano abbia con perspicuità, e con ampiezza al razionale, all'irrazionale, al positivo, al negativo estesa, veduto, che il termine noto q contiene a suo fattore il valor di x; ed io prego chi legge ad aggiugnerle a quei lampi, che grado grado più vivi nella mente di Cardano succeduti mostrai alla pag. 329; e così l'intero progresso avrà da essi lampi ai chiari lumi.

10.^{a} Una equazione qualunque si può considerare come un problema su di un certo numero di continue proporzionali. Imperciocchè 1, x, x^2, x^3, x^4.... costituiscono una progressione di continue proporzionali, i diversi numeri, co' quali si moltiplicano, i diversi congiungimenti di alcune, ed uguagliamenti ad altra, o ad altre congiunte del pari fra loro compongono i diversi problemi su di esse. Per esempio $x^3 + nx^2 + px = q$ significa trovare quattro quantità continuamente proporzionali 1, x, x^2, x^3, tali, che la somma della suprema x^3 moltiplicata per 1, della terza moltiplica per n, e della seconda moltiplicata per p si uguagli alla prima 1 moltiplicata per q. Ed $x^4 + mx^3 + q = nx^2 + px$ vuol dire ritrovare cinque continue proporzionali 1, x,

x^2, x^3, x^4 di tal sorte, che la suprema moltiplicata per 1, la quarta moltiplicata per m, e la infima moltiplicata per q si uguaglino alla terza moltiplicata per n più la seconda moltiplicata per p.

ARTICOLO VIII.

Modi di promovere l'Analisi.

Modo 1.° Derivazione. Dallo scioglimento delle equazioni di 2.° grado $x^2 \mp p x \mp q = 0$ si deriva lo scioglimento di tutte le equazioni della forma $x^{2h} \mp p x^h \mp q = 0$; e dallo scioglimento delle equazioni di 3.° grado $x^3 \mp p x \mp q = 0$ si deriva lo scioglimento di tutte le comprese nella forma $x^{3h} \mp p x^h \mp q = 0$; ed in genere dallo scioglimento di $x^3 \mp n x^2 \mp p x \mp q = 0$ lo scioglimento di $x^{3h} \mp n x^{2h} \mp p x^h \mp q = 0$. Cardano nel capo II dell'*Arte magna* enumera sino a 44 le equazioni derivative.

Modo 2.° Trasmutazione, od al dir nostro trasformazione delle equazioni. Veduti si sono nell'analisi delle equazioni di 3.° grado, ed in quella delle equazioni di 4.° gli esempj dell'arte di trasportare per mezzo dei trasformamenti dalle equazioni prive di secondo termine a quelle di esso fornite lo scioglimento.

Modo 3.° Conversione. Alla pag. 162 il problema di sciogliere l'equazione $x^3 + q = p x$ si è convertito nel problema di sciogliere l'equazione $z^3 = p z + q$, e si è dimostrato potersi fare il convertimento reciproco a cagione della vicendevole dipendenza degli scioglimenti.

Modo 4.° Supposto. Consiste in supporre l'incognita di una equazione di una certa forma irrazionale, e determinare le condizioni, onde il supposto abbia luogo. Sia per esempio l'equazione $x^4+q=px$, e si supponga $x=t\pm\sqrt{u}$. Sostituendo proviene $t^4\pm4t^3\sqrt{u}+6t^2u\pm4tu\sqrt{u}+u^2+q=pt\pm p\sqrt{u}$, nella quale dovendo i termini razionali uguagliare i razionali, gli irrazionali gli irrazionali, ne nascono le due equazioni condizionali $t^4+6t^2u+u^2+q=pt$; $4t^3+4tu=p$: così che s'impara, che una equazione di 4.° grado della struttura $x^4+4t^4-\frac{p^2}{16t^2}=px$ ha le irrazionali radici $x=t\pm\sqrt{\left(\frac{p}{4t}-t^2\right)}$. Ma ecco un teorema generale.

Teorema generale. Del binomio o reciso $t\pm\sqrt{u}$ si può senza confine di altezza fabbricare l'equazione $x^\pi+q=px$. Basta che sia p uguale alla ragione della parte irrazionale di $(t\pm\sqrt{u})^\pi$ alla parte irrazionale di $t\pm\sqrt{u}$, e q uguale alla differenza della parte razionale di $(t\pm\sqrt{u})^\pi$, e del prodotto razionale pt.

Ai supposti di forme irrazionali rispetto alle radici di una equazione di dato grado vi ha egli un limite? Sì certamente, ed è qual segue:

Teorema generale II. Nella radice irrazionale di una equazione di dato grado π il grado del radicale può tutto al più uguagliare il grado dell'equazione. Altrimenti, se la forma della irrazionale radice comprenda il radicale $\sqrt[\pi+\omega]{u}$, questo nel supremo termine dell'equazione x^π darà $\sqrt[\pi+\omega]{u^\pi}$, che sarà nella equazione senza simile.

Modo 5.° Trattare un problema per due vie. Sia per esempio dato il problema espresso per le due equazioni $zy=a$, $z^3+y^3+z^2y+zy^2=b$. Cavando dalla prima $y=\frac{a}{z}$, e sostituendo nella seconda si trova $z^6+az^4+a^2z^2+a^3=bz^3$, equazione di 6.° grado. Ma se l'equazion prima si moltiplichi per $2(z+y)$, e poi con la seconda si sommi, si ha $(z+y)^3 = 2a(z+y)+b$, che, ponendo $z+y=x$, si riduce ad $x^3 = 2ax+b$, equazione di grado 3.°. Data dunque una equazione di 6.° grado della struttura $z^6+az^4+a^2z^2+a^3=bz^3$, si può ottenere il valore di z per mezzo delle due $x^3=2ax+b$; $z^2+a=xz$. E più ampiamente, perchè dalle due equazioni $zy=a$, $z^3+y^3+(3-h)z^2y+(3-h)zy^2=b$, con sostituire nella seconda il valore $y=\frac{a}{z}$ dato dalla prima, risulta $z^6+(3-h)az^4+(3-h)a^2z^2+a^3=bz^3$, ma con moltiplicare la prima per $h(z+y)$ e poi sommarla con la seconda, proviene $(z+y)^3=ah(z+y)+b$: o sia $x^3=ahx+b$; perciò data l'equazione di 6.° grado $z^6+(3-h)az^4+(3-h)a^2z^2+a^3=bz^3$, la sua risoluzione, od il ritrovamento del valore di z non esigerà, che gli scioglimenti delle due $x^3=ahx+b$; $z^2+a=xz$.

Si avanzò dunque Cardano alla soluzione di qualche equazione di 6.° grado fornita del terzo, del quarto, e del quinto termine, cosa, che dagli storici Wallis, Gua-de-Malves, Montucla non doveva essere ommessa, e che a cagione del silenzio loro riuscirà nuova, ma ognuno può riscontrare nel capo XLVI del libro *De Regula Aliza*. E bello si è ivi stesso il riflettere di Cardano, che l'equazione $z^6+az^4+a^2z^2+a^3=bz^3$ contiene non solo il valore di z, ma del pari quello di y. La ragione si è, perchè nelle due equazioni $zy=a$, $z^3+y^3+z^2y+zy^2=b$, z, y vi stanno negli stessi modi, e cavando dalla prima, in vece dell' espressione di $y=\frac{a}{z}$, la espressione inversamente di $z=\frac{a}{y}$, e nella seconda sostituendola, ne nasce l'equazione $y^6+ay^4+a^2y^2+a^3=by^3$, la stessa, cangiata y in z, che l'equazione $z^6+az^4+a^2z^2+a^3=bz^3$. Andando avanti in questo riflesso s'intende eziandío, perchè l'equazione sorga a 6.° grado; poichè a cagione dell'equazione $z^3 + y^3 + z^2 y + z y^2 = b$, che è di 3.° grado, z, y debbono ciascuna aver tre valori; dunque l'equazione, che tutti li comprende, deve al grado 6.° montare. Ho offerto agli analisti una simile riflessione sul grado 6.° dell'equazione, a cui porta il sostituire nell' equazione $x^3 = px + q$ la somma $z + y$ in luogo di x, e lo spezzarla poi alla maniera di Tartaglia, scrivendo l'anno 1783 le mie Lettere apologetiche dell'analisi contro i vizj stranamente imputatigli dall'Ab. Nicolai.

Si accinse anche Cardano al problema compreso nelle due equazioni $z + y = 2A$, $z\sqrt{y} + y\sqrt{z} = B$, che posto $z = A - x$, $y = A + x$ conduce all'equazione $2A^3 - 2Ax^2 + 2\sqrt{(A^6 - 3A^4x^2 + 3A^2x^4 - x^6)} = B^2$. Ma qui l'operare in numeri lo fece venir meno, togliendogli d'accorgersi, che la quantità sotto il radicale è un perfetto cubo di $A^2 - x^2$, lo che non avvertendo, con lasciare esso radicale solo nel primo membro, mercè il trasporto di $2A^3 - 2Ax^2$ nel secondo, e con quadrar poscia ambedue i membri, salì ad una equazione di 6.° grado, cui dichiarò d'ignota sfera; laddove realmente, fatto $A^2 - x^2 = t^2$, si abbassa a $t^3 = \frac{1}{2}B^2 - At$. Apparisce pertanto che per questa, e per $x^2 = A^2 - t^2$ si scioglie una equazione di 6.° grado della struttura $x^6 + (A^4 + AB^2)x^2 = 2A^2x^4 + A^3B^2 - \frac{1}{4}B^4$.

Modo 6.° Soccorso della Geometría. Al soccorso di essa nota Cardano doversi lo scioglimento delle equazioni di 2.° grado, e lo scioglimento di quelle di 3.°, e conseguentemente a lei medesima si debbe lo scioglimento pur anche delle equazioni di 4.°. Di qui eccoci avviati al seguente Capo.

CAPO VIII.

Congiungimento, e vantaggio mutuo dell'Algebra, e della Geometría.

§. I. Leonardo Pisano, il maestro dell'algebra all'Italia, ed all'Europa intera, egli scrisse con grave sentenza esser l'Aritmetica, della quale presso di lui era l'Algebra la più nobil parte, e la Geometría per natura congiunte, e mutuo suffragio prestarsi: *Arithmetica, et Geometriae scientia sunt connexae et suffragatoriae sibi ad invicem*. Così nella dedica del suo *Abacco* a Michele Scotto. Frate Luca va avanti e sul liminare della distinzione 3.ª del *Trattato di Geometría* si apre la strada all'uso delle regole dell'Algebra nei problemi di essa con dire: *Le quali regole principalmente furon trovate e fabricate per rispetto alla quantità continua cioè geometria, perchè in lei sono a le volte quantità sorde che per forza numerale discretamente non si possan dare ma conviense respondere e operare per radici e per linee e quadrati e cubi: commo praticando te auirra neli sequenti casi e molti altri. E sonno tutte fondate nel secondo de Euclide mediante la forza e virtu del quinto cioe dele proportioni e proportionalita*. Il sentimento insomma del Pacioli in più nobil forma si è, che, sebben l'Algebra sia all'Aritmetica eziandío utilissima, avendolo egli stesso con mille esempj antecedentemente dimostrato, egli è però dal seno della Geometría, che essa Algebra trasse i natali, e l'esigenza della Geometría medesima si fu, che determinolla a procrearla: fu a corto dire la Geometría una madre, che partorì nell'Algebra una figlia precipuamente a suo vantaggio. Il Capo 1.° della citata Distinzione del Trattato di Geometria di Frate Luca è in fronte adorno del titolo *Modus solvendi varios casus figurarum quadrilaterarum rectangularum per viam algebrae.* Si offre in esso una schiera di problemi vertenti su le relazioni tra i lati, le diagonali, l'area delle quadrilatere rettangole figure. Le regole algebraiche vi sono maneggiate, ora in espresse forme algebraiche di quel tempo, ora sotto l'ombra delle linee, così che si può dire avervisi una bella società dell'analisi algebraica giovinetta in Italia, e dell' analisi geometrica antica della platonica scuola in Grecia. Simile è il Capo 2.° della Distinzione medesima. E più campeggia in suo abito l'algebra nella Distinzione 8.ª ricca di ben 34 geometrici problemi con aperto giro di formali equazioni trattati e sciolti. Lungo troppo sarebbe il recarli qui tutti con gli scioglimenti loro; ma conveniente stimo il darne un saggio nel modo più spedito, che permetta il grado di chiarezza bastante per chi possegga gli Elementi di Euclide. È bene premettere il

Lemma. In un triangolo, la cui base sia b, ed i lati sieno l, λ, la perpendicolare dal vertice su la base b, o sia l'altezza, è $=\sqrt{\left(l^2-\left(\frac{1}{2}b+\frac{l^2-\lambda^2}{2b}\right)^2\right)}$. Quinci se il triangolo sia isoscele, per esser $l=\lambda$, la sua altezza si fa $=\sqrt{\left(l^2-\frac{1}{4}b^2\right)}$; e se il triangolo sia equilatero, per essere ancora $l=b$, l'altezza diviene $=\frac{1}{2}l\sqrt{3}$.

Problema 1.° Presso Frate Luca 52.° della Distinzione 8.ª. In un triangolo isoscele ABC (*Fig.* 7), la cui BC è maggiore dei lati AB, AC collocare tre circoli uguali, e maggiori che si possa. Si suppongano collocati, e sieno inoltre tirate le rette tutte, che nella figura si veggono. Si faccia la base $BC = b$, e ciascuno dei lati AB, $AC = l$, donde ne segue la perpendicolare $AH = \sqrt{(l^2 - \frac{1}{4} b^2)}$. Si ponga il diametro dei tre circoli da iscriversi $= 2x$: saranno in conseguenza anche le due rette MO, ON ciascuna $= 2x$; ed essendo esse MO, ON, e la MN rispettivamente equidistanti ai lati, ed alla base AB, AC, BC, conseguentemente essendo il triangolo MON simile al triangolo BAC, sarà $MN = 2x \frac{b}{l}$, e l'altezza del triangolo $MON = \sqrt{(4x^2 - \frac{b^2}{l^2} x^2)} = x \sqrt{(4 - \frac{b^2}{l^2})}$. Saranno di più uguali fra loro le quattro rette QC, CS, BP, BU, e ciascheduna $= \frac{1}{2} b - \frac{b}{l} x$; e similmente tra loro uguali le due RA, AT, e ciascuna $= l - 2x - (\frac{1}{2} b - \frac{b}{l} x) = l - \frac{1}{2} b - 2x + \frac{b}{l} x$. Quinci

l'area intera del triang. $ABC = \frac{1}{2} b \sqrt{(l^2 - \frac{1}{4} b^2)}$,

la somma dei due rettang. $UMOT + NORS = 4x^2$,

il rettangolo $MPQN = 2x^2 \frac{b}{l}$.

la somma dei 4. triang. $QNC + NCS + PMB + MBU = bx - 2x^2 \frac{b}{l}$,

la somma dei 2. triang. $ORA + OAT = lx - \frac{1}{2} bx - 2x^2 + x^2 \frac{b}{l}$,

il triangolo $MON = x^2 \frac{b}{l} \sqrt{(4 - \frac{b^2}{l^2})}$,

E perciò l'equazione del problema

$$\left(2 + \frac{b}{l} + \frac{b}{l} \sqrt{\left(4 - \frac{b^2}{l^2}\right)}\right) x^2 + \left(\frac{1}{2} b + l\right) x = \frac{1}{2} b \sqrt{\left(l^2 - \frac{1}{4} b^2\right)}.$$

Se sieno $l = 10$, $b = 12$, che è il particolare problema di Frate Luca, trovasi $5 \frac{3}{25} x^2 + 16x = 48$, che dà $x = 3 \frac{3}{4}$.

Se il triangolo dato fosse equilatero, l'equazione si ridurrebbe a $(3 + \sqrt{3}) x^2 + \frac{3}{2} lx = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$.

Problema 2.° Presso Frate Luca 53.° In un circolo dato (*Fig.* 8) iscrivere tre circoli uguali, e maggiori che sia possibile. Il triangolo DCE sarà un triangolo equilatero, ciascun lato del quale sarà $= 2x$, cioè alla somma di due raggi di due dei tre circoli da iscriversi; perciò la perpendicolare DF di esso triangolo equilatero sarà $= x\sqrt{3}$. Si concepisca al triangolo medesimo circoscritto un cerchio: il punto R, centro del cerchio grande dato, sarà insieme centro di tale cerchio al triangolo equilatero circoscritto; poichè essendo uguali i raggi AR, FR, GR, ed uguali parimente i raggi AD, FE, GC, sono di necessità uguali le residue rette DR, ER, CR. Ma il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero è uguale a $\frac{2}{3}$ della sua perpendicolare; dunque $RD = \frac{2}{3} FD = \frac{2}{3} x\sqrt{3}$, ed $RA = x + \frac{2}{3} x\sqrt{3}$: onde, chiamando r il raggio RA del cerchio dato, si ha $r = x + \frac{2}{3} x\sqrt{3}$, e quindi $x = \frac{r}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}$.

Volendo iscrivere quattro cerchj, si troverà $r = x + x\sqrt{2}$, essendo $x\sqrt{2}$ il raggio del cerchio circoscritto ad un quadrato del lato $2x$, il qual raggio è lo stesso che la metà della diagonale di esso quadrato. È questo il problema 54.° di Frate Luca.

Se i cerchj da iscrivere sieno cinque, che è il problema di Frate Luca 55.°, sarà $r = x + \frac{2x}{\sqrt{(2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})}}$, essendo $\frac{2x}{\sqrt{(2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})}}$ per i teoremi 9.° e 10.° del libro 13.° degli *Elementi di Euclide*, il raggio del cerchio circoscritto al pentagono regolare del lato $2x$.

Chiedendosi d'iscrivere sei cerchj, che è il problema 56.° di Frate Luca, sarà $r = x + 2x$, essendo $2x$ il raggio di un cerchio circoscritto all'esagono del lato $2x$. Ma nel mezzo del dato cerchio, tra i sei cerchj uguali iscritti, vi resterà (*Fig.* 9) il luogo per un altro cerchio uguale ai sei.

Problema 3.° Presso Frate Luca 61.°. Del triangolo ABC (*Fig.* 10) è data l'area, ed è h^2, ed i lati AB, BC, AC sono ordinatamente minori di una unità: si cercano questi lati. Si ponga $BC = x$, $AB = x + 1$, $AC = x - 1$. Sarà l'area del triangolo $= \frac{1}{2} x \sqrt{\left((x+1)^2 - \left(\frac{1}{2} x - \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{2x} \right) \right)} = h^2$, o sia $\frac{1}{2} x \sqrt{\left((x+1)^2 - \left(\frac{1}{2} x + 2 \right) \right)} = h^2$; onde, elevando al quadrato, e riducendo, si ha $x^4 - 4x^2 = \frac{16}{3} h^2$.

Problema 4.° Presso Frate Luca 68.°. Dato il triangolo ABC (*Fig.* 11), dall'angolo B sia condotta la retta BO tagliante il lato AC in data distanza GA dal vertice A, e reciprocamente dall'angolo C condotta sia la retta CN segante il lato AB in assegnata distanza MA da esso vertice A, e tali rette BO, CN s'incontrino, e taglino nel punto H: si cerca l'altezza HE del punto H sopra la base BC, e la distanza del punto E dall'angolo B, o dall'angolo C. Per i lati dati del triangolo ABC si danno la perpendicolare AD, ed i segmenti DB, DC della base BC. Per le date distanze GA, MA delle intersezioni sono date le residue rette GC, MB. Per i triangoli simili ACD, GCF si trovano le rette FG, FC, e da FC la BF; e per i triangoli simili ABD, MBK si trovano MK, BK, e da BK la CK. Si faccia $DE = x$, onde $BE = BD + x$, $CE = CD - x$. I triangoli simili BGF, BHE danno $HE = \frac{FG}{BF}(BD + x)$, ed i due simili triangoli CMK, CHE danno $HE = \frac{MK}{CK}(CD - x)$. Dunque

$\frac{FG}{BG}(BD+x)=\frac{MK}{CK}(CD-x)$, dalla qual equazione è facile ricavare il valore di x, e per esso i valori delle rette HE, BE, CE.

Problema 5.° Presso Frate Luca 70.°. Iscrivere in un quadrato $ABCD$ (*Fig.* 12) il maggior triangolo equilatero. Un angolo di questo deve stare in un angolo del quadrato, essendo il lato suo maggiore del lato del quadrato. Si ponga $EB=FC=x$, sarà $EA=FA=AB-x$, onde $FE^2=2(AB-x)^2$; e sarà $ED^2=x^2+BD^2$. Ma $FE=ED$, $AB=BD$; dunque $2(AB-x)^2=x^2+AB^2$, cioè $x^2+AB^2=4ABx$, $x=2AB-AB\sqrt{3}$.

Problema 6.° Presso Frate Luca 71.°. Iscrivere in un triangolo equilatero ABC (*Fig.* 13) il maggior quadrato. Alzandosi questo sopra la base BC dai punti P, Q, il lato di lui superiore MN parallelo ad essa base taglierà dal triangolo intero un triangolo simile, e per conseguenza equilatero AMN, onde $AN=PQ$. Si faccia $PQ=x$, e sarà $QC=DC-\frac{1}{2}x$, $NC^2=x^2+(DC-\frac{1}{2}x)^2=(AC-AN)^2$ $=(AC-x)^2$, conseguentemente $\frac{1}{4}x^2+(2AC-DC)x=$ AC^2-DC^2.

Problema 7.° Presso Frate Luca 75.°. Iscrivere in un triangolo il maggiore semicerchio possibile (*Fig.* 14). Essendo E il centro del semicerchio, ed M, N i punti di contatto, saranno EM, EN raggi perpendicolari ai lati AB, AC, e tirata EA, e fatto il raggio $EM=EN=x$, saranno le aree dei due triangoli ABE, ACE congiuntamente $=\frac{1}{2}ABx+\frac{1}{2}ACx=$ all'area ABC.

Problema 8.° Presso Frate Luca 74.°. Allungare, od accorciare un lato di un triangolo salva l'area, e salve le lunghezze degli altri due lati, e trovare qual dei tre lati a queste condizioni si può allungare, od accorciare di più. Curioso si è questo problema; ma Frate Luca non ne dà che lo scioglimento pratico, lasciando, non so il perchè, desiderare la dimostrazione, cui io supplirò. Sia (*Fig.* 15) ABC il triangolo, e prima si voglia alle dette condizioni allungare il lato CB in B', od accorciarlo in B''. Dividasi il lato CB per metà in E, e dal vertice A si tiri la retta AE, della quale si troverà il valore per la perpendicolare AD, ed il segmento CD, essendo $AE = \sqrt{(AD^2 + (CE - CD)^2)} = \sqrt{(AD^2 + (\frac{1}{2}CB - CD)^2)}$. Se $2AE > CB$, si allunghi CB in B', sicchè sia $CB' = 2AE$; e se $2AE < CB$, si accorci CB in B'', sicchè divenga $CB'' = 2AE$: nell'un caso, e nell'altro si avrà l'intento, il triangolo ACB', ovvero ACB'' non differirà dal triangolo dato ACB che nel prolungamento, od accorciamento del lato BC, salve le lunghezze negli altri due lati, e salva la grandezza dell'area. Operando similmente rispetto agli altri due lati, e confrontando gli allungamenti, e gli accorciamenti, si farà manifesto qual dei tre lati soffra alle imposte condizioni maggiore mutazione di allungamento, od accorciamento. Ma e come ritrovasi egli, che variata in $2AE$ la base BC, ritenuti i lati AB, AC, resti la stessa area? Questo è ciò, che Frate Luca ommise di spiegare, ed a che io vado succintamente a supplire. Denominata b la base BC, ed l, λ i lati AB, AC, l'area del triangolo ABC è $= \frac{1}{2} b \sqrt{(l^2 - (\frac{1}{2} b + \frac{l^2 - \lambda^2}{2b})^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{(2(l^2 + \lambda^2) b^2 - (l^2 - \lambda^2)^2 - b^4)}$. Si cangi b in y, conservando l, λ, e dovrà essere $\frac{1}{4} \sqrt{(2(l^2 + \lambda^2) y^2 - (l^2 - \lambda^2)^2 - y^4} = \frac{1}{4} \sqrt{(2(l^2 + \lambda^2) b^2 - (l^2 - \lambda)^2 - b^4)}$. Per conseguenza si avrà $y^4 - 2(l^2 + \lambda^2) y^2 = -2(l^2 + \lambda^2) b^2 + b^4$, e risolvendo, $y^2 = l^2 + \lambda^2 \pm$

$\sqrt{((l^2+\lambda^2)^2-2(l^2+\lambda^2)b^2+b^4)}=l^2+\lambda^2\pm(l^2+\lambda^2)\mp b^2$. Presi i segni inferiori, ne segue $y^2=b^2$, $y=b$, che nulla di nuovo ci porge; ma prendendo i segni superiori si ha $y^2=2(l^2+\lambda^2)-b^2$, $y=\sqrt{(2(l^2+\lambda^2)-b^2)}$. Or la retta AE per il lemma, e per la 13.ª del II di Euclide $=\sqrt{(l^2-(\frac{1}{2}b+\frac{l^2-\lambda^2}{2b})^2+(-\frac{l^2-\lambda^2}{2b})^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{(2(l^2+\lambda^2)-b^2)}$; dunque $y=2\,AE$, come doveasi dimostrare.

§. II. Un annuncio nel titolo sì chiaro di problemi geometrici presi a risolvere *per viam algebrae*, una serie di foglj pieni di algebraico calcolo, si può contenersi dalle più alte maraviglie, che sieno state piccolezze invisibili all'occhio di Montucla? *Nous devons*, scrive egli nella Parte III, lib. III, art. VIII, *nous devons faire honneur à Viete de l'application de l'Algebre à la Géométrie, invention si utile, et dont l'analyse même n'a pas tiré des moindres avantages que la Géométrie. On voit à la vérité dès le milieu du XV siecle des traces de cette application dans Regiomontanus, qui se servit de l'Algebre pour resoudre quelques problêmes sur les triangles. On trouve aussi dans Tartalea et d'autres analystes du XVI siecle l'Algebre employée à la solution de diverses problêmes de Géométrie; mais il faut bien distinguer cette espece d'application de l'Algebre à la Géométrie de celle, que M. Viete a introduite. Car tous ces Mathématiciens assignoient des valeurs numériques aux lignes données du problême, et se contentoient de trouver celle, qu'on cherchoit de la même maniere. Il ne me paroît pas qu'aucun d'eux ait songé à construire géométriquement cette valeur trouvé.* Non si tardò in Italia al secolo XVI ad impiegar l'algebra nello scioglimento de' problemi geometrici; nè può la Franconia vantare, che il suo Regiomontano fosse nel secolo XV il solo ad ajutare, e promovere la geometria con l'algebra;

l'Italia aveva il suo Frate Luca: la differenza si è, che Regiomontano non si valse dell'arte algebraica, che in due problemi su i triangoli rettilinei, che stanno sotto i num. xiI, e xxiiI del libro iI; laddove il Pacioli con molte decine di problemi l'applicò ad ogni specie di figura rettilinea, ed al cerchio. E ben lo so, che Montucla, oltre il luogo qui sopra trascritto, ne ha nell'art. iv del lib. iI della medesima Parte iiI un altro, in cui dice: *Regiomontanus se propose dans son v^e livre divers problêmes sur les triangles rectilignes, et il en résoud quelques-uns à l'aide de l'Algebre.* Ma Regiomontano non tratta nel suo libro v, che di triangoli sferali, o, come noi usiam di dire, sferici, ed uno non ve ne ha, in cui vi sia ombra di algebra. Si direbbe, che Montucla fu cieco rispetto a Frate Luca, e che rispetto a Regiomontano per lo contrario ebbe all'occhio uno di quei vetri a molte facciette le une alle altre inclinate, ed in ragione del numero loro moltiplicanti l'oggetto. La verità si è, che in Italia, primo domicilio dell'algebra venuta d'Oriente, assai più che nella Franconia godeva ella, come ragionevol era che godesse, nel secolo xv del bel fregio di assistere alla geometría, e retribuirle ajuto, e vantaggio. E tanto più cresce ad Italia la ragione di gloria sopra la Franconia, quanto, che Frate Luca vinse il Regiomontano non solo nel numero, e nella varietà dei problemi geometrici algebraicamente trattati, ma eziandío nel grado, essendosi Regiomontano ne' due suoi arrestato all'analisi precisa di 2.° grado, ed essendo Frate Luca nella vaga, e ricca schiera de' suoi salito all'analisi quinci derivativa di 4.° grado, come attesta il problema da me riferito sotto il numero 3.°. E ciò, che devesi in fine imparzialmente considerare, si è, che il Regiomontano fu due volte in Italia, e la prima volta per alcuni anni vi si trattenne, nella stagione appunto, in cui fioriva Frate Luca; e siccome dai vocaboli e dai modi degli algebristi italiani, che Regiomontano adopera, apparisce, che da essi imparò egli l'arte algebraica, giusta ciò, che nel I volume, Capo I, §. VI ho dimostrato; così si ha tutta ragion di credere, che da essi medesimi apparato pur abbia l'applicarla alla geometría; massimamente, che, non dando Frate Luca di tale applicazione a sè vanto, nè facendone pompa come di cosa nuova, pare essere da inferire, che fosse già metodo usitato, ed ampiamente tra gli italiani matematici esteso.

§. III. Nel secolo XVI, promossa l'arte algebraica, natural cosa si era, che progresso del pari ricevesse l'applicazion sua alla geometría, con essere a più sottili, più estesi e più alti problemi recata, ed in più perfetti modi adempita. Per esempio, avendo Frate Luca trattato il problema d'iscrivere il maggior quadrato possibile in un triangolo equilatero, Tartaglia dilata il problema al triangolo diversilatero. Sono al numero di 30 i problemi geometrici assai eleganti, e con molta destrezza algebraicamente sciolti, che metton corona al *General Trattato di Numeri e Misure* di Nicolò Tartaglia. Gli scioglimenti contengono belle equazioni tra i lati di una figura e la sua area, tra i lati di una figura ed i lati di altra ad essa iscritta, o circoscritta, e tra i lati di due figure di specie diversa uguali in superficie. I problemi però non superano il 2.° grado, perchè, come fu da me notato nel §. IX della *Parte Storica* del Capo II, Tartaglia, essendo da morte sorpreso, impedito venne di pubblicare, e di perfezionare pur anche di quel suo General Trattato la 6.ª Parte all'algebra riservata, onde uscì mancante di ciò, che doveva formarne il massimo pregio, della teoría cioè dell'analisi delle equazioni di 3.° grado, la quale non avrebbe certamente l'autore ommesso di applicare alla sua cara geometría; e par che ce lo dica egli stesso nel problema 54.° in quelle parole: *procedendo per via retta, cioè per la regola dell'Algebra, il problema condurrebbe a Capitolo tanto alto, che poi non si potrebbe per le cose sinora dette trarlo in luce.*

§. IV. Ma sebbene non abbiamo di Tartaglia in algebra alla geometría applicata, siccome nè tampoco in algebra pura, tutto ciò che senza dubbio egli dato ci avrebbe; in ciò però, che ne abbiamo, vi è quello, che Montucla scrive non essere a sua cognizione, che egli, od alcun altro degli analisti del XVI secolo abbia fatto, nè sognato siasi di fare, ed è di costruire geometricamente il valore del problema per l'analisi algebraica trovato. *Il ne me paroît pas, qu'aucun d'eux ait songé à construire géométriquement la valeur trouvé.* Mostra con ciò Montucla di non aver neppur con occhio fuggitivo scorsi i fogli dei 30 geometrici problemi algebraicamente sciolti da Tartaglia, poichè dalla prima facciata della carta 37 alla seconda della 38, spazio occupato tutto dal 47.° dell'intera schiera di 100 problemi, e 21.° dei geometrici, il solo aspetto della seconda figura alla prima aggiunta fermato l'avrebbe, ed avvertito della costruzione geometrica all'algebraico scioglimento accoppiata. Ecco ogni cosa in succinto

Problema. Dall'angolo *A* del quadrato *ABCD* (*Fig.* 16) si vuol tirare a traverso del lato *B D* la retta *A E* concorrente fuori del quadrato in *E* con il lato *C D* prolungato, così che ne nasca il triangolo *D O E* uguale al quadrato stesso *A B C D*: si cerca il punto *O*, e la grandezza di ciascun dei lati del triangolo *D O E*, e di tutta ancor la *A E*.

Risoluzione algebraica. Dicasi l il lato del quadrato, e pongasi $= x$ l'altezza DO del punto O sopra D: sarà in conseguenza $BO = l - x$; e per essere simili i triangoli ABO, ODE sarà $l - x : x :: AB : DE :: l : DE = \frac{lx}{l-x}$; $OE = \sqrt{\left(x^2 + \left(\frac{lx}{l-x}\right)^2\right)}$; $AO = \sqrt{(l^2 + (l-x)^2)}$; $AE = \sqrt{(l^2 + (l-x)^2)} + \sqrt{\left(x^2 + \left(\frac{lx}{l-x}\right)^2\right)}$. Attesa poi la condizione del problema si ha $\frac{1}{2} x \times \frac{lx}{l-x} = l^2$, donde $x^2 + 2lx = 2l^2$, $x = -l + \sqrt{3l^2} = -l + l\sqrt{3}$, e quinci $DE = \frac{l(-l+l\sqrt{3})}{2l - l\sqrt{3}} = l + l\sqrt{3}$; $OE = 2l\sqrt{2}$; $AO = l\sqrt{(8 - 4\sqrt{3})}$; $AE = 2l\sqrt{2} + l\sqrt{(8 - 4\sqrt{3})}$.

Costruzione geometrica. Si costruisca (*Fig.* 17) il quadrato $DUMQ$ triplo in area del $BACD$ dato nella Figura 16. Si delinei questo stesso nel $DUMQ$ tagliando dal lato DU la retta BD, e dal lato DQ la retta DC, e dai punti B, C tirando le rette BA, CT rispettivamente parallele alle DQ, DU. Si tagli anche, partendo dal punto U, la $UO =$ al lato del quadrato $BACD$; il punto O caderà necessariamente sotto B, perchè non essendo il quadrato $DUMQ$ che triplo del quadrato $BACD$, deve il lato DU esser meno, che doppio del lato DB; per conseguenza, preso $UO = DB$, il punto O deve cadere sotto di B. Dall'angolo A del quadrato $DBAC$ per il punto O si conduca la retta AO, e dal punto D si prolunghi la retta CD in E, sì che il prolungamento DE sia $= DU + BD$: congiungendo i punti O, E, la retta OE sarà nella direzione di AO, e costituirà con essa una sola retta, che sarà la retta del problema. Poichè essendo il quadrato $DUMQ$ triplo del quadrato $BACD$, sarà il lato $DU = AB\sqrt{3} = l\sqrt{3}$, $DO = DU - UO = DU - AB = -l + l\sqrt{3}$,

$DE = AB + DU = l + l\sqrt{3}$. L'unica cosa, che rimane a dimostrare si è, che le due linee AO, OE non formino che una sola retta da A ad E. Or si prolunghi OD in L, di modo che sia $DL = BO = BD - OD = l - (-l + l\sqrt{3} = 2l - l\sqrt{3}$, e dal punto L, condotta da LY parallela alla DE, si compia il parallelogrammo $DLYE$. Questo parallelogrammo è $= DL \times DE = (2l - l\sqrt{3})(l + l\sqrt{3}) = l^2\sqrt{3} - l^2$. Ma anche il rettangolo $OSCD = DUTC - OUTS = DU \times UT - AB^2 = l\sqrt{3} \times l - l^2 = l^2\sqrt{3} - l^2$; dunque il parallelogrammo $DLYE =$ al parallelogrammo $OSCD$; per conseguenza $DL : DO :: CD : DE$; e perchè $DL = BO$, $CD = BA$, perciò $BO : OD :: AB : DE$; conseguentemente i triangoli ABO, ODE sono simili, l'angolo DOE è $=$ all'angolo AOB, ed essendo quinci la somma $AOU + UOE =$ a due retti, le due linee AO, OE per la 15.ª del I di Euclide sono in direzione l'una dell'altra, e compongono una stessa retta. Tartaglia forma sotto la retta DE il quadrato di lei, e lo divide in due rettangoli dividendo essa DE nelle due sue parti, l'una $= DU$, l'altra $= AB$, per il quale quadrato e per i quali rettangoli passando, avanti di venire al calcolo del rettangolo $DLYE$, fa un giro di dimostrazione più lungo.

§. V. Dei geometri algebristi del secolo XVI non meno di Tartaglia meritava di essere distintamente nominato il Cardano. Nel Capo XXXVIII dell'*Arte magna* sotto la quistione XIII scioglie il problema, che vo' ad esporre.

Probl. I. Nel triangolo ABC rettangolo in A (*Fig.* 18) calata su l'ipotenusa BC la perpendicolare AD, per cui essa ipotenusa resti tagliata nei due segmenti BD, DC, sieno note le due somme del lato AB coll'aggiacente segmento BD, e del lato AC coll'aggiacente segmento DC:

si cerca l'area. Sia $AB+BD=f$, $AC+DC=g$, e si ponga $BC=x$, sarà $AB+BD+AC+DC=AB+AC+BC=AB+AC+x=f+g$, onde $AB+AC=f+g-x$. Suppongasi $AB=\frac{1}{2}(f+g-x)+y$, $AC=\frac{1}{2}(f+g-x)-y$. Per essere, attesa la natura del triangolo rettangolo, $AB^2+AC^2=BC^2$, si troverà $\frac{1}{2}(f+g-x)^2+2y^2=x^2$, e perciò $y=\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(f+g-x)^2\right)}$, e quinci $AB=\frac{1}{2}(f+g-x)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(f+g-x)^2\right)}$; $AC=\frac{1}{2}(f+g-x)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(f+g-x)^2\right)}$; $BD=f-\frac{1}{2}(f+g-x)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(f+g-x)^2\right)}$; $DC=g-\frac{1}{2}(f+g-x)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}(f+g-x)^2\right)}$. Ora è $AD^2=AB^2-BD^2=AC^2-DC^2$, conseguentemente $AB^2-AC^2=BD^2-DC^2$: sostituendo in questa equazione i valori delle rette AB, AC, BD, DC, si ricava $4fgx^2+2(f+g)^3x=(f+g)^4$, sciogliendo la qual equazione sarà sciolto il problema. Il numerico problema di Cardano è di $f=36$, $g=24$, nei quali particolari supposti si trova $x=\frac{25}{2}(-5\pm7)$. Preso il segno $+$, come l'autor prende, si ha $x=BC=25$, $y=\frac{5}{2}$, $AB=20$, $AC=15$, $BD=16$, $DC=9$, l'area del triangolo $=\frac{1}{2}AB\times AC=150$.

Sciolto questo problema affronta Cardano il seguente

Probl. II. Nel triangolo rettangolo stesso ABC date le somme del lato AB con il segmento alterno DC, e del lato AC con il segmento alterno BD trovar l'area. Posto, che sia la somma $AB+DC=h$, la somma $AC+BD=k$ si faccia, siccome sopra $BC=x$, e si operi similmente, e proverrà ad equazion del problema

$$4x^4+4(h+k)x^3-\left(11(h+k)^2+h-k\right)x^2+6(h+k)^3x-(h+k)^4=0.$$

Ecco un'equazione completa di 4.° grado, alla quale Cardano sollevò l'applicazion dell'Algebra alla Geometría. Lungi però, che io nasconda, che, propostosi da Cardano il problema nel capo antecedente quello, in cui insegna l'arte da Lodovico Ferrari inventata di sciogliere le equazioni quadrinomie di 4.° grado, dice non essere noto il modo di trarre dall'esposta equazione quinomia del problema il valore di x; e presa la somma $AB + DC = h = 29$, la somma $AC + BD = k = 31$ accontentasi di osservare, che per il problema precedente debbe essere $x = 25$; nè più vi torna sopra, non estendendosi nella dottrina, e negli esempj del seguente Capo intorno alla risoluzione delle equazioni di 4.° grado, che alle quadrinomie.

Non è così di molti problemi su la divisione di una linea con rapporti tra le parti recanti ad equazioni di 3.° grado, della qual sorte di problemi, siccome in sè ubertosa, e di grande varietà capace, forma il soggetto dei Capi XX, XXXIX, XLIV del libro *De Regula Aliza*: Cardano li tratta in modo compiuto, e con ammirevole industria. Il più importante, e cui mi restringo a scegliere, si è:

Probl. III. Dividere la linea H in due parti tali, che la differenza dei mutui parallelepipedi, cioè dei prodotti del quadrato dell'una nell'altra, sia uguale ad un dato numero N. Supposte le parti $\frac{1}{2}H + x$, $\frac{1}{2}H - x$, debb'essere $\left(\frac{1}{2}H + x\right)^2\left(\frac{1}{2}H - x\right) + \left(\frac{1}{2}H + x\right)\left(\frac{1}{2}H - x\right)^2 = N$, che si riduce ad $\left(\frac{1}{2}H + x\right)\left(\frac{1}{2}H - x\right).2x = N$, ed eseguite le moltipliche, ed ordinati i termini, mette ad $x^3 + \frac{1}{2}N = \frac{1}{4}H^2x$. Investiga per sino Cardano il massimo valore, che aver può N, e per qual valore di x: ma di ciò più sotto.

Intanto debbo chiamare il Leggitore a gettar l'occhio, e fissar la sua attenzione sul Capo XII dello stesso libro *De Regula Aliza* iscritto in fronte così *De modo demonstrandi Geometrice aestimationem cubi, et numeri aequalium quadratis*. Ella è una vera costruzione geometrica dell'equazione $x^3 + q = n x^2$ per mezzo della parabola, e della iperbola. E a tanto giunse il Cardano? Sì. E non la vide il Montucla? No. Merita ella di essere in compendio, in intera però sostanza, riferita.

Probl. IV. Costruire geometricamente l'equazione $x^3 + q = n x^2$, o determinarne geometricamente la radice.

Bisogna previamente osservare, che qualora sia $q < \frac{4}{27} n^3$, la risoluzione algebraica comune dà il valore di x implicato d'immaginarj, come apparisce dalla formola generale a piè della pag. 165 fatto $p = 0$, e voltato q in $-q$, divenendo così il radicale quadrato, $\sqrt{\left(\left(\frac{1}{27} n^3 - \frac{1}{2} q\right)^2 - \frac{1}{27^2} n^6\right)}$, che riesce immaginario ogni qual volta sia $q < \frac{4}{27} n^3$, od $\frac{1}{2} q < \frac{2}{27} n^3$. E bisogna osservar per secondo, che posto $q = \frac{4}{27} n^3$, il maggiore valore di x nell'equazione $x^3 + q = n x^2$ si è $x = \frac{2}{3} n$. La citata formola generale somministra $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27} n^3 - \frac{2}{27} n^3\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27} n^3 - \frac{2}{27} n^3\right)} + \frac{1}{3} n = \sqrt[3]{-\frac{1}{27} n^3} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27} n^3} + \frac{1}{3} n = -\frac{1}{3} n - \frac{1}{3} n + \frac{1}{3} n = -\frac{1}{3} n$; ma dividendo poi $x^3 - n x^2 + \frac{4}{27} n^3 = 0$, per $x + \frac{1}{3} n$, si ha per quoziente $x^2 - \frac{4}{3} n x + \frac{4}{9} n^2 = 0$, vale dire $\left(x - \frac{2}{3} n\right)^2 = 0$, che ci porge due valori di x, ciascuno $= \frac{2}{3} n$. Egli è pertanto per il caso di $q < \frac{4}{27} n^3$, nel quale la risoluzione algebraica presenta x sotto aspetto immaginario, e con il confine al caso di $q = \frac{4}{27} n^3$, nel quale il maggior valore di x è $= \frac{2}{3} n$, che Cardano prende a costruire per la parabola, e per l'iperbola la equazione $x^3 + q = n x^2$, o sia per la intersezione di queste due curve determinarne una delle radici.

Si metta pertanto l'equazione sotto la forma $q = (n - x) x^2$, e concepiscasi q come un parallelepipedo $DQTZ$ (*Fig.* 19) formato della base quadrata QT, e dell'altezza DZ. Nella Fig. 20 sia $AB = n$, e sia divisa in modo, che sia $BE = \frac{2}{3} n$, $AE = \frac{1}{3} n$. Alle rette BE, DQ sottendasi (*Fig.* 19) la terza proporzionale u, onde sia in proporzione continua $EB : Dq : u$; si faccia di più $EB : u :: DZ : AC$; sarà $EB^2 : DQ^2 :: EB : u :: DZ : AC$; dunque $EB^2 \times AC = DQ^2 \times DZ$. Per la qual cosa se riescasi a dividere AB in un punto O talmente, che sia $OB^2 \times AO = EB^2 \times AC$, sarà $OB^2 \times AO = DQ^2 \times DZ = q$, ed OB sarà il cercato valore di x. Compiasi il rettangolo $ABCF$, e si conduca da C per E la retta CEG, prolungando insieme FB sino alla concorrenza in G, e chiuso il rettangolo $GFCH$ tirisi per E la LEK parallela a CA. Poscia alle due rette AB, EB si sottenda in continua proporzione FN, che verrà ad essere $= \frac{4}{9} n$. Presa FN per parametro, ed FG per asse, si descriva dal punto F qual vertice la parabola FTM, e dentro gli assintoti HC, CF si descriva dal punto B la iperbola BK avente a rettangolo assintotico $ACFB$, la quale taglierà la parabola nel punto T. Per questo punto conducansi la retta RTS parallela ad HG, e la TP parallela ad HC: il punto O, in cui TP taglia AB, è il punto desiderato, ed OB è il valore di x radice dell'equazione $x^3 + q = n x^2$.

Dimostrazione. Per la costruzione sono uguali i triangoli CHG, CFG, e parimenti i due EKG, EBG; per conseguenza, levati questi da quelli, sono uguali i due trapezj $HCEK$, $CEBF$, ed aggiunti i due uguali triangoli CLE, CAE riescono uguali i due rettangoli $CHLK$, $ACFB$; ma $ACFB$ è rettangolo assintotico dell'iperbola, dunque eziandío $CHLK$, dunque il punto K è all'iperbola. Supposto T parimenti all'iperbola il rettangolo $RTCP$ è anch'esso $= ABCF$, e detraendo il comune $AOPC$ restano uguali $RTOA$, $OBFP$, ed essendo supplementi, debbono essere intorno alla stessa diagonale, conseguentemente CO cade in S. Di qui ne viene essere $CP : PO : CF : FS :: CF \times FN : FS \times FN$. Ma per costruzione $CF \times FN = AB \times FN = EB^2$, e supposto T punto della parabola $FS \times FN = ST^2 = OB^2$; dunque $CP : PO :: EB^2 : OB^2$; finalmente $CP = AO$, $PO = AC$; dunque per ultimo $AO : AC :: EB^2 : OB^2$, e quinci $AO \times OB^2 = AC \times EB^2$, come doveasi fare. Nella costruzione, e nella dimostrazione, quali leggonsi in Cardano, vi sono dei difetti, vagando egli tra i casi $q = \frac{4}{27} n^3$, e $q < \frac{4}{27} n^3$, e d'uno in altro saltando.

Confessa poi egli stesso di aver preso il modo di verificare geometricamente l'equazione $OB^2 \times AO = EB^2 \times AC$ da Eutocio Ascalonita nel Comento al libro II di Archimede su la sfera, e sul cilindro. Di Cardano fu dunque propiamente solo l'avere a tale equazione condotta la geometrica ricerca della radice dell'equazione $x^3 + q = n x^2$ nel caso, che nella formola di algebraica risoluzione presentasi da immaginario implicamento svisata. Ma negar per questo non si può gloria a Cardano; chè gli analitici progressi tutti sono bei tratti di un infinito filo, che da industre mano si va svolgendo coll'ajuto dei teoremi, e degli artificj già svolti. Nè lascierò io di riflettere, che l'antichissimo problema di raddoppiare il cubo, o di trovare due medie proporzionali sciolto da Menechmo con la intersezione sì di due parabole, sì d'una parabola, e di una iperbola, e da Apollonio più semplicemente con l'intersecamento di una iperbola, e di un circolo, in fondo si è la geometrica costruzione di una equazione di 3.° grado pura $x^3 = q$. Ma vanto di Cardano si è l'avere il primo col taglio di due sezioni coniche costrutta una cubica equazione composta, quale la $x^3 + q = n x^2$, e dato così l'esempio della costruzione delle più composte in genere. Falso pertanto, che niuno degli analisti del secolo XVI abbia pensato a costruire geometricamente una equazione, falso che a Vieta spetti l'onore di avere inventate le costruzioni geometriche, come Montucla soggiugne nel luogo §. II citato *M. Viete ayant donné à l'Algebre une nouvelle forme en introduisant l'usage des lettres pour représenter les grandeurs même connues, fut naturellement conduit à l'invention des constructions géométriques*. E riguardo segnatamente alla costruzione delle equazioni cubiche ecco l'entusiasmo, onde Montucla esalta il suo Vieta: *Viete à donné une marque de génie plus éclatante, en enseignant la maniere de construire les équations du troisieme degré, celles-là même vû entre sous-le signe radical une quantité imaginaire*. Appunto rispetto a questo caso insegnò Cardano a costruire l'equazione $x^3 + q = n x^2$. Io non pretendo per questo di dire, che arrivasse Cardano, dove Vieta arrivò, o di confondere ciò che l'un fece con ciò che fece l'altro; ma la prima determinazione geometrica di una radice di equazion cubica dall'algebra esibita con involgimento immaginario appartiene fuori di dubbio a Cardano.

Massimi da Cardano dimostrati, ed usati.

Ho detto rispetto al problema cardanico da me riferito per terzo, che Cardano prese anche ad investigare la massima grandezza, che nell'equazione di esso problema $x^3 + \frac{1}{2} N = \frac{1}{4} H^2 x$ aver può N, e per qual valore di x. E non è questa la sola occasione, e la sola volta, che s'immerge in indagine di Massimo e felicemente il determina. Raccorrò pertanto qui tre Massimi, dei quali ho trovato darsi da lui le dimostrazioni, e farsi uso.

Massimo 1.° Se da una superficie rettangola $ABCD$ (*Fig.* 21) si tagli una terza di lei parte $EDCP$, ed a questa costrutto un quadrato uguale, del lato di esso, e della rimanente superficie $EABP$ formisi un parallelepipedo, sarà tal solido il massimo di quanti similmente formare si possano.

La dimostrazione richiede la serie di tre lemmi.

Lemma 1.° Se ad una linea a si aggiunga la linea b, poi un'altra volta la stessa b, sarà $a + b : a > a + 2b : a + b$. Perchè $b : a > b : a + b$, e componendo $a + b : a > a + 2b : a + b$.

Lemma 2.° Se sieno due rette l'una dell'altra doppia, c, $2c$, e che all'una, ed all'altra si aggiunga la retta b, sarà $c + b : c < (2c + b)^2 : (2c)^2$. Ma alla retta $2c$ aggiugnendo $2b$, sarà $c + b : c > (2c + 2b)^2 : (2c)^2$. Poichè $\frac{c+b}{c} = \frac{2c+2b}{2c} = \frac{2c+2b}{2c+b} \times \frac{2c+b}{2c}$; ma per il lemma 1.°, cangiando a in $2c$, $\frac{2c+b}{2c} > \frac{2c+2b}{2c+b}$; dunque $\frac{2c+2b}{2c+b} \times \frac{2c+b}{2c} < \left(\frac{2c+b}{2c}\right)^2$, e $> \left(\frac{2c+2b}{2c+b}\right)^2$, conseguentemente anche $\frac{c+b}{c} < \left(\frac{2c+b}{2c}\right)^2$, e

$>\left(\frac{2c+2b}{2c+b}\right)^2$, ed in stile di ragioni, $c+b:c<(2c+b)^2:(2c)^2$, ma $>(2c+2b)^2:(2c+b)^2$.

Lemma 3.° Se date due rette l'una dell'altra doppia, d, $2d$, e dalla minore d si sottragga, alla doppia $2d$ si aggiunga la stessa retta b, sarà $d:d-b>(2d+b)^2:(2d)^2$. Imperciocchè, essendo per il lemma 2.° $c+b:c>(2c+2b)^2:(2c+b)^2$, si cangi $c+b$ in d, ovvero facciasi $c+b=d$; quindi $c=d-b$, $2c+2b=2d$, $2c+b=2d-b$; dunque per esso lemma $d:d-b>(2d)^2:(2d-b)^2$. Ma per il lemma 1.°, fatto $a+b=2d$, $2d:2d-b>2d+b:2d$, e per conseguenza $(2d)^2:(2d-b)^2>(2d+b)^2:(2d)^2$. Dunque molto più $d:d-b>(2d+b)^2:(2d)^2$.

Se all'incontro alla minore retta d si aggiunga, e dalla doppia $2d$ si sottragga la medesima retta b, sarà $d+b:d<(2d)^2:(2d-b)^2$. Attesocchè per la prima parte del lemma 2.° è $d+b:d<(2d+b)^2:(2d)^2$; e per il lemma 1.°, come poco fa si è dedotto, $2d:2d-b>2d+b:2d$; dunque a più forte ragione $d+b:d<(2d)^2:(2d-b)^2$.

Dimostrazione del Massimo. Se non è vero, che tagliata la superficie rettangola $ABCD$ (*Fig.* 21) per EP in modo, che sia la superficie $EDCP=\frac{1}{3}ABCD$, nel parallelepipedo $ABPE\sqrt{EDCP}$ abbiasi il massimo di quanti similmente formare si possono; abbiasi dunque con altro taglio, o sopra, o sotto, e primieramente tagliando la superficie rettangola per la retta FK. Sarà $ED:DF::EDCP:FDCK$, ed $FA:EA::FKBA:ABPE$. Ma per il supposto di $EDCP=\frac{1}{3}ABCD$ si è $EA=2ED$, e per la prima parte del lemma 3.° $ED:DF>AF^2:AE^2$; dunque $EDCP:FDCK>AF^2:AE^2$, $\sqrt{EDCP}:\sqrt{FDCK}>AF:AE$, per conseguenza $>FKBA:ABPE$, e quinci il parallelepipedo $ABPE\sqrt{EDCP} >$ del parallelepipedo $FKBA\sqrt{FDCK}$ contro l'ipotesi. Si tagli secondariamente la superficie rettangola $ABCD$ al di sotto di EP per la retta GR. Sarà per la parte seconda del lemma 3.° $GD : ED < AE^2 : AG^2$; dunque $GDCR : EDCP < AE^2 : AG^2$, $\sqrt{GDCR} : \sqrt{EDCP} < AE : AG$, conseguentemente $< ABPE : AGRB$, e perciò il parallelepipedo $AGRB\sqrt{GDCR}$ $<$ del parallelepipedo $ABPE\sqrt{EDCP}$ contro l'ipotesi parimenti. Dunque la divisione della superficie rettangola $ABCD$ per la retta EP, che ne taglia $EDCP = \frac{1}{3}ABCD$, è quella che dà il parallelepipedo della superficie residua nel lato quadrato della tagliata maggiore di qualunque altro, o sia massimo.

Corollario. Sia ora $ABCD$ un quadrato $= \frac{1}{4}H^2$, e la terza di lui parte $EDCP = \frac{1}{12}H^2$ sia $= x^2$, sarà la residua superficie $ABPE = \frac{1}{4}H^2 - x^2 = \frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{12}H^2 = \frac{2}{12}H^2$, e sarà $x = \sqrt{\frac{1}{12}H^2}$, e di tutti i parallelepipedi $\left(\frac{1}{4}H^2 - x^2\right)x$, il massimo sarà $= \frac{2}{12}H^2\sqrt{\frac{1}{12}H^2}$, e tal sarà il massimo valore di $\frac{1}{2}N$ nell'equazione $x^3 + \frac{1}{2}N = \frac{1}{4}H^2x$ del problema cardanico da me sotto num. 111 collocato.

Massimo 2.° Se la retta AB (*Fig.* 22) dividasi in C talmente, che sia $CB = \frac{1}{3}AB$, $CA = \frac{2}{3}AB$, sarà il parallelepipedo di CB nel quadrato di AB il massimo, che formar si possa di una parte di AB nel quadrato dell'altra.

Dimostrazione. Si tagli AB in altro punto F sopra C, e sarà per la prima parte del lemma 3.° $CB : FB > AF^2 : AC^2$; dunque $CB \times AC^2 > FB \times AF^2$. Che se taglisi AB sotto al punto C in G, sarà per la seconda parte del lemma 3.° medesimo $GB : CB < AC^2 : AG^2$; dunque $GB \times$

$AG^2 < CB \times AC^2$. Essendo pertanto il parallelepipedo $CB \times AC^2 = \frac{1}{3} AB \times \left(\frac{2}{3} AB\right)^2 = \frac{4}{27} AB^3$ maggiore di qualunque altro possa formarsi per divisione, o superiore, od inferiore, egli è il massimo.

Massimo 3.° Se y, z sieno le parti di una linea x, la massima grandezza che aver possa la somma $y^2 z + y z^2$ dei mutui parallelepipedi del quadrato di una parte nell'altra si è $\frac{1}{4} x^3$, ed accade allor che $y = z$, $y^2 z = y z^2$; in ogni altro caso $y^2 z + y z^2 < \frac{1}{4} x^3$. Si faccia $y = \frac{1}{2} x + t$, $z = \frac{1}{2} x - t$: per la 5.ª del II di Euclide è $\left(\frac{1}{2} x + t\right)\left(\frac{1}{2} x - t\right) = \frac{1}{4} x^2 - t^2$. Si moltiplichi a sinistra per $\frac{1}{2} x + t + \frac{1}{2} x - t$, ed a destra per x, e sarà $\left(\frac{1}{2} x + t\right)\left(\frac{1}{2} x - t\right)\left(\frac{1}{2} x + t + \frac{1}{2} x - t\right) = \left(\frac{1}{2} x + t\right)^2\left(\frac{1}{2} x - t\right) + \left(\frac{1}{2} x + t\right)\left(\frac{1}{2} x - t\right)^2 = y^2 z + y z^2 = \frac{1}{4} x^3 - x t^2$. Dunque $y^2 z + y z^2 < \frac{1}{4} x^3$, eccetto, che nel caso di $t = 0$, e per conseguenza di $y = z = \frac{1}{2} x$, nel qual caso giugne esso aggregato $y^2 z + y z^2$ ad esser $= \frac{1}{4} x^3$, avvicinandovisi negli altri tanto più, quanto è minore t.

Corollario 1.° Dunque $3 y^2 z + 3 y z^2$ sempre $< \frac{3}{4} x^3$, se y, z sieno parti di x disuguali, $= \frac{3}{4} x^3$ se uguali, nè mai $3 y^2 z + 3 y z^2 > \frac{3}{4} x^3$.

Corollario 2.° Supposto $y + z = x$, essendo $y^3 + 3 y^2 z + 3 y z^2 + z^3 = x^3$, e non potendo essere $3 y^2 z + 3 y z^2 > \frac{3}{4} x^3$, ma $=$, o $<$, ne viene di conseguenza non poter essere la somma dei cubi $y^3 + z^3 < \frac{1}{4} x^3$; ma od $=$, essendo y, z uguali; o $>$, essendo y, z disuguali. Accenna Cardano nel Capo I *De Regula Aliza* una dimostrazione di ciò diretta per la 9.ª del II di Euclide, e per la regola Dialettica. Vado ad indovinarla. Per la 9.ª del II di Euclide $\left(\frac{1}{2}x+t\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-t\right)^2=\frac{1}{2}x^2+2t^2$. Si sottragga, ed a sinistra, ed a destra il rettangolo $\left(\frac{1}{2}x+t\right)\left(\frac{1}{2}x-t\right)$, e sarà $\left(\frac{1}{2}x+t\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-t\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+t\right)\left(\frac{1}{2}x-t\right)=\frac{1}{4}x^2+3t^2$. Moltiplichisi a sinistra per $\frac{1}{2}x+t+\frac{1}{2}x-t$, ed a destra per x, e ne proverrà $\left(\left(\frac{1}{2}x+t\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-t\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+t\right)\left(\frac{1}{2}x-t\right)\right)\times\left(\frac{1}{2}x+t+\frac{1}{2}x-t\right)=\left(\frac{1}{2}x+t\right)^3+\left(\frac{1}{2}x-t\right)^3=y^3+z^3=\frac{1}{4}x^3+3xt^2$. Dunque $y^3+z^3>\frac{1}{4}x^3$, fuori del caso di $t=0$, di $y=z=\frac{1}{2}x$, nel qual caso $y^3+z^3=\frac{1}{4}x^3$.

CAPO IX.

Indagini di Cardano e Bombelli sul caso irreducibile.

§. I. Le prove più chiare dell'analitico talento di Cardano, e che il più luminoso diritto gli conferiscono alla immortalità presso gli analisti sono le meditazioni profonde, e le sottili indagini, ed i bei discoprimenti sul caso Irreducibile. Egli fu il primo, siccome, giusta il narrato alla pag. 121, ad osservare, così ad affrontar questo analitico paradosso, ad esercitare sopra di esso l'ingegno, e sforzarsi di superarlo, e scioglierlo. E quanti, e quanto industri tentativi! Eppure, chi il crederebbe, Montucla non cita nè tampoco il libro di essi ricco, ed in fronte distinto col titolo *De Regula Aliza*, cioè *De Regula Irresolubili*. Io cominciai sin dall'anno 1779 in un Opuscolo dedicato all'inclito Ammiraglio Veneto Angelo Emo ad illustrare questo libro di Cardano, ed il mio piccolo saggio destò nel Frisi tale curiosità di tutto leggerlo, che tostamente lo si procurò dalla Ambrosiana Biblioteca ad imprestito; ma tanto fu lungi, che intero lo meditasse, e comprendesse, che dopo avere per buon numero di giorni combattuto tra il gettarlo, ed il ritornarvi sopra, finalmente stanco ed infastidito di un linguaggio tanto dall'odierno analitico linguaggio diverso, ed all'intelletto tanto grave, ed a seguirsi difficile, si risolse ad allontanarlo da sè, e restituirlo, per non perdervi più tempo, accontentandosi d'inserire nella sua Algebra, di cui aveva allora per le mani il lavoro, il pezzo da me illustrato. Alla tenebría di quel libro rispetto a noi cagionata dalla diversità del linguaggio se ne accoppia un'altra prodotta da una infinita perversissima folla di errori, e di numeri ne' calcoli, e di lettere sì nelle figure, sì nelle relative dimostrazioni; e bisogna eziandío confessare aggiugnersene altra assoluta, ed intrinseca proveniente da mancanza di ordine, per la quale riesce cosa faticosissima, e malagevolissima l'unire le fila, vedere il risultato, valutare il discoprimento: si scorge Cardano, che tenta, che si apre delle nuove strade, che ritorna su le battute, che si volge or da un lato, or dall'altro seguendo i suggerimenti varj dell'ingegno; in una parola il libro è l'atto del tentare, non un ordine delle scoperte. Io non saprei, che a queste tante tenebre attribuire la obblivione, in cui sono rimasti gli importanti teoremi, ed i bei tentativi sul caso Irreducibile sparsi per il libro *De Regula Aliza*. Io ho già posta in chiara luce una parte di essi teoremi nel Capo VII, formandone la Schiera III sotto l'articolo VI. E nel Capo VIII ho recato il tentativo felice di determinare la radice dell' equazione $x^3+q=nx^2$ nel caso irreducibile per mezzo dell' intersecamento geometrico della parabola, e della iperbola. Mi rimane di esporre, ed illustrare gli altri teoremi, e tentativi.

§. II. La contemplazione del caso irreducibile si può ristrignere all'equazione $x^3=px\pm q$, o più semplicemente ad $x^3=px+q$, intendendo per q il simbolo di una quantità sì negativa, che positiva; perchè ogni altra equazione cubica, la quale contenga il termine nx^2, e sia nel caso irreducibile, si può di esso termine spogliare, e trasformare in $x^3=px+q$. Questa equazione per la bella proprietà di tutte quelle di grado dispari, pag. 339, ha almeno una reale radice, ed è appunto nel caso di $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$, in cui la formola della risoluzione tartagliana riesce contaminata d'immaginarj, che ne ha tre, pag. 340. E qual è la ragione di tale inconveniente? È forse l'essere il metodo tartagliano mancante di generalità? Così Cardano addomandò a sè stesso, e si pose all'esame. Intendasi la linea x divisa nelle due parti y, z, sostituendo nell'equazione $x^3 = px + q$ la somma $y + z$ per x, ed effettuando il cubo $(y + z)^3$, proviene l'equazione

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = p(y + z) + q \ldots\ldots$, che segno (A). Giusta il metodo di Tartaglia questa equazione si spezza nelle due $y^3 + z^3 = q$; $3y^2z + 3yz^2 = p(y + z)$. È egli di generale natura questo spezzamento? È egli l'unico? E qui stendendo Cardano lo sguardo su le varie combinazioni de' termini, moltissimi gli si presentarono alla mente i supposti possibili a farsi, o i modi di spezzare l'equazione (A). Sul riflesso però, che se non è dato lo scioglimento nei più facili, molto meno è da sperarsi nei più difficili, si limitò a trasceglierne, e sottomettere a disamina sette, i quali furono

1.° $y^3 + z^3 = q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3y^2z + 3yz^2 = p(y + z)$

Lo diremo il supposto, lo spezzamento tartagliano.

2.° $3y^2z + 3yz^2 = q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y^3 + z^3 = p(y + z)$

È contrario al 1.°, e però sarà acconcio il dirlo antitartaleano.

3.° $2y^2z + 2yz^2 = q \ldots\ldots y^3 + z^3 + y^2z + yz^2 = p(y + z)$

4.° $y^2z + yz^2 = q \ldots\ldots y^3 + z^3 + 2y^2z + 2yz^2 = p(y + z)$

5.° $y^3 = q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z^3 + 3y^2z + 3yz^2 = p(y + z)$

6.° $y^3 + 3yz^2 = q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z^3 + 3y^2z = p(y + z)$

7.° $y^3 + 2y^2z + yz^2 = q \ldots\ldots\ldots z^3 + y^2z + 2yz^2 = p(y + z)$

Di questi spezzamenti prende Cardano a contemplare la natura, e misurar l'estensione con la scorta del 3.° Massimo, e connesso minimo, de' quali ho recate al fine dell'antecedente Capo le dimostrazioni.

Applicandole in 1.° luogo al tartagliano spezzamento, apparisce poter esso aver uso se sia $q > \frac{1}{4}(y+z)^2$, e $p(z+y) < \frac{3}{4}(y+z)^2$; ma non potere averlo, se suppor convenga inversamente $q < \frac{1}{4}(y+z)^2$, $p(y+z) > \frac{3}{4}(y+z)^2$; ed il limite dell'uso essere $q = \frac{1}{4}(y+z)^2$, $p(y+z) = \frac{3}{4}(y+z)^2$, che è il caso $y = z$. Dunque il tartagliano spezzamento non è generale, o sia non può generalmente soddisfare ad avere in forme reali, quali si desiderano, le parti y, z di x.

Rendesi in 2.° luogo manifesto esser per lo contrario idoneo il secondo anti-tartagliano spezzamento, allora quando $q < \frac{3}{4}(y+z)^2$, $p(y+z) > \frac{1}{4}(y+z)^2$; perder la sua attitudine, e venire escluso, subito, che sia $q > \frac{3}{4}(y+z)^2$, $p(y+z) < \frac{1}{4}(y+z)^2$, ed avere per confine $q = \frac{3}{4}(y+z)$, $p(y+z)^2 = \frac{1}{4}(y+z)^2$ nel caso $y = z$. Laonde eziandío l'anti-tartagliano spezzamento manca di generalità.

Componendo però insieme i due esaminati spezzamenti, tartagliano, ed anti-tartagliano, scorgesi, che l'uno supplisce alla mancanza dell'altro, sì che fra tutti e due comprendono l'estensione indefinita, e generale: serve il primo allorchè non sia $q < \frac{1}{4}(y+z)^2$, e serve il secondo qualora non sia $q > \frac{3}{4}(y+z)^2$. Donde anche si comprende, che, essendo q tra $\frac{1}{4}$, e $\frac{3}{4}$ di $(y+z)^2$, spazio non piccolo, anzi ampio, ed $= \frac{1}{2}(y+z)^2$, servono l'uno e l'altro spezzamento, e per due vie può trovarsi la stessa radice. Così Cardano, ma debbesi intendere, per quanto dipende dalle nature dei due spezzamenti, prescindendo dall'altezza dell' equazione, a cui, eliminando una delle incognite, fa salire il secondo spezzamento, e dalla imperfezione dell'arte analitica.

Gli spezzamenti 3.°, 4.°, 5.° non sono al dire di Cardano sì eleganti, come i due primi; il 3.° però, ed il 4.° stimali degni di considerazione. Osserva Cardano rispetto al 3.° essere $q = 2y^2z + 2yz^2 = 2yz(y+z)$, e $p(y+z) = y^3 + z^3 + y^2z + yz^2 = (y^2 + z^2)(y+z)$, conseguentemente per esso spezzamento supporsi $q : p(y+z) :: 2yz : y^2 + z^2$; il che gli toglie la generalità. Se piaccia scorgere i limiti, entro i quali dalla natura di lui n'è circoscritto l'uso, avvertasi, che il massimo valore di $q = 2y^2z + 2yz^2$ è $\frac{2}{4}(y+z)^3$, ed il minimo valore di $p(y+z) = y^3 + z^3 + y^2z + yz^2$ è $\frac{2}{4}(y+z)^3$; laonde la massima ragione di $q : p(y+z)$ è $:: 2 : 2$, ragione di uguaglianza. È dunque convenevole alla natura l'uso di tale spezzamento, se sia $q < p(y+z)$, sconveniente se sia a rovescio $q > p(y+z)$, ed il limite del poterlo adoperare è $q = p(y+z)$.

Per ciò, che spetta allo spezzamento 4.°, non potendo essere $y^2z + yz^2 > \frac{1}{4}(y+z)^3$, quinci l'uso naturale di spezzamento sì fatto si è da un valore il più piccolo, che si voglia di q sino a $q = \frac{1}{4}(y+z)^3$; onde apparisce terminar esso a puntino dove lo spezzamento 1.° incomincia, e così essere *ad unguem* il compimento di lui.

Stimo bene presentare in altra maniera, e ordinatamente le estensioni dei quattro spezzamenti sin qui posti a misura.

Si estende dunque il 4.° da $q:p(y+z)$ comunque $<1:3$ sino a $q:p(y+z)::1:3$.

Si estende il 1.° da $q:p(y+z)::1:3$ sino a $q:p(y+z)$ indefinitamente $>1:3$.

Si estende il 3.° da $q:p(y+z)$ come si voglia $<1:1$ sino a $q:p(y+z)::1:1$.

Si estende il secondo da $q:p(y+z)$ indeterminatamente $<3:1$ sino a $q:p(y+z)::3:1$.

Del 5.° spezzamento pronuncia ad accusa, e lode Cardano, che *est omnibus deterius, si tamen posset inveniri esset generale, ut duo sequentia.*

Est omnibus deterius, perchè dall'equazione $x^3=px+q$ priva del secondo termine porta all'equazione $z^3+3z^2\sqrt[3]{q}=(p-3\sqrt[3]{q^2})z+p\sqrt[3]{q}$ del secondo termine fornita, volendo poi togliere il quale, con fare $z=u-\sqrt[3]{q}$, si ritorna onde si partì, trovandosi $u^3=pu+q$. Lo spezzamento però non riconosce di natura sua alcun limite, nulla essendovi che ristringa a certa misura il rapporto $y^3:z^3+3y^2z+3y^2$. Ma ella è questa una illimitata generalità infruttuosa.

Il 6.° spezzamento è da Cardano sentenziato di difforme, attesochè due aggregati simili y^3+3yz^2, z^3+3zy^2 vengono paragonati, ed uguagliati a quantità dissimili, quali sono q, e $p(y+z)$. Ma perchè sieno sostanzialmente simili gli aggregati y^3+3yz^2, z^3+3zy^2, e sia quindi vera la notata diformità, bisogna suppor simili y, z. Il difetto essenziale dello spezzamento si è di presentare due cubiche equazioni in luogo dell'una $x^3=px+q$.

La stessa taccia di diformità è da Cardano data allo spezzamento 7.°. Ciò che ha esso di particolare si è, che ambedue gli aggregati $y^3+2y^2z+yz^2$, $z^3+2z^2y+zy^2$ contengono a fattore il quadrato $(y+z)^2$; onde risolvendo si ha, $(y+z)^2 y : q :: (y+z)^2 z : p(y+z)$, e quinci $q : p(y+z) :: y : z$. Questa proporzione primieramente dimostra illimitato di sua natura lo spezzamento, potendo essere qualunque la ragione tra y, z, e qual si sia variazione ricevere al variare di p, q e dell'intero $y+z$. Secondamente ci porge l'equazione di 2.° grado $qz = p(y+z)y$. Un'altra se ne ha immediatamente dalla seconda delle due equazioni di esso spezzamento $z^3 + 2z^2 y + zy^2 = p(y+z)$, poichè dividendo per $y+z$, risulta $(z+y)z = p$.

Le altre combinazioni sono, al dire del Cardano, o anomale, come sarebbe il paragonare ed uguagliare il numero q ad un parallelepipedo, a tre, a cinque, a due non mutui, a quattro, due de' quali non fossero mutui, o ad un cubo congiunto con un parallelepipedo, o due, o tre di base differente; o sono inutili, come l'assegnare il nùmero q all'aggregato de' due cubi accresciuto di due, di quattro parallelepipedi qualunque.

§. III. Cardano fece un bel passo scoprendo la limitazione dello spezzamento tartagliano; ma a dedurre essere questa limitazione la causa del riuscire immaginarie nel caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ le parti y, z di x, ne resta a fare un altro, bisogna precisamente dimostrare tale caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ essere fuori del limite del tartagliano spezzamento. Non ho potuto ritrovare presso Cardano questa dimostrazione; onde è a credere, che accontentato si sia di vedere in qualche esempio di numerica equazione di radice razionale fornita il congiungimento delle due cose: di risultare cioè nella tartagliana risoluzione, a cagione di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, immaginarie le parti y, z di x, e di essere contro il natural limite del tartagliano spezzamento $q < \frac{1}{4}(y+z)^3$, o sia $< \frac{1}{4}x^3$. Eppure mestieri non gli era di gire a cercar lunge i principj di una generale dimostrazione. Richiede il tartagliano spezzamento, che sia $q \geqq \frac{1}{4}(y+z)^3$, e $p(y+z) \leqq \frac{3}{4}(y+z)^3$. Dalla prima parte della condizione ne viene $\frac{1}{4}q^2 \geqq \frac{1}{4^3}(y+z)^6$, e dalla seconda ne segue $p \leqq \frac{3}{4}(y+z)^2$, e quinci $\frac{1}{27}p^3 \leqq \frac{1}{4^3}(y+z)^6$; dunque di necessità $\frac{1}{4}q^2 \geqq \frac{1}{27}p^3$. Resta perciò fuori della estensione, della podestà dello spezzamento tartagliano il caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, o sia il poter dare in tal caso in reale natura le parti y, z di x, ed è un peccare contro la metafisica dello spezzamento, un volere i contraddittorj il volere nel caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ usare del tartagliano spezzamento, e volere reali le parti y, z di x. Dico volerle reali, poichè il darle immaginarie è tanto lungi, che ripugni alla natura di esso spezzamento, che gli è congruentissimo. E qui entro a dilucidare viemmeglio le idee su la natura dello spezzamento tartagliano, ed insieme ad appagare la brama, che taluno avesse nell'animo concepita d'intendere a maggiore, ed a tutta profondità, e chiarezza, come il tartagliano spezzamento non potendo dare nel caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ reali, e nella natura dell'intero x le parti sue y, z, sia capace di darle immaginarie, e tali le dia, piuttosto, che ricusare assolutamente di darle. Si avverta pertanto che le leggi da Cardano stabilite $3y^2z + 3yz^2 < \frac{3}{4}(y+z)^3$; $y^3 + z^3 > \frac{1}{4}(y+z)^3$; essendo y, z disuguali, poggiano su la 5.ª e su la 9.ª del II di Euclide, avendosi per la 5.ª $yz = \left(\frac{1}{2}x + t\right)\left(\frac{1}{2}x - t\right) = \frac{1}{4}x^2 - t^2$, e per la 9.ª $y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}x + t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - t\right)^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2t^2$. Euclide suppone t una linea, od una quantità reale, ed in tale supposto è giusto dall'equazione $yz = \frac{1}{4}x^2 - t^2$ inferire

$yz < \frac{1}{4}x^2$, e quinci $3yz(y+z) < \frac{3}{4}x^3$. Ma se alla quantità reale t se ne sostituisca una immaginaria $\sqrt{-h}$, si avrà $yz = \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{-h}\right)\left(\frac{1}{2}x - \sqrt{-h}\right) = \frac{1}{4}x^2 + h$, e la illazione sarà contraria, cioè $yz > \frac{1}{4}x^2$, e conseguentemente $3yz(y+z) > \frac{3}{4}x^3$, donde poi di necessaria deduzione ne viene $y^3 + z^3 < \frac{1}{4}x^3$. Discorrasi similmente su l'equazione $y^2 + z^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2t^2$ della 9.ª del II di Euclide. Cangiato t in $\sqrt{-h}$ risulta $y^2 + z^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2h$, e quindi $y^2 + z^2 - yz = \frac{1}{4}x^2 - 3h$, $(y^2 + z^2 - yz)(y+z) = y^3 + z^3 = \frac{1}{4}x^3 - 3xh$, per conseguenza $y^3 + z^3 < \frac{1}{4}x^3$, e correlativamente $3y^2z + 3yz^2 > \frac{3}{4}x^3$. Invertendosi, con il cangiar di reali in immaginarie le parti y, z, le condizioni in grandezza della somma dei cubi $y^3 + z^3$, e della somma dei tre mutui parallelepipedi $3y^2z + 3yz^2$, è evidente doversi invertire i rispetti dello spezzamento tartagliano, e del caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$. Distinguendo pertanto a dovere, fissiamo

Teorema I. Se y, z sieno due parti reali, e disuguali di x, è di necessità $y^3 + z^3 > \frac{1}{4}x^3$, o sia $> \frac{1}{4}(y+z)^3$; e $3y^2z + 3yz^2 < \frac{3}{4}(y+z)^3$. Ma se y, z sieno due parti di x immaginarie è altrettanto necessariamente $y^3 + z^3 < \frac{1}{4}(y+z)^3$; $3y^2z + 3yz^2 > \frac{3}{4}(y+z)^3$.

Teorema II. Supposte y, z reali e disuguali, lo spezzamento tartagliano $y^3 + z^3 = q$; $3y^2z + 3yz^2 = p(y+z)$ esige $q > \frac{1}{4}(y+z)^3$, $p(y+z) < \frac{3}{4}(y+z)^3$. Ma al rovescio supposte y, z disuguali, ed immaginarie, richiede $q < \frac{1}{4}(y+z)^3$, $p(y+z) > \frac{3}{4}(y+z)^3$, o sia $p > \frac{3}{4}(y+z)^2$.

Teorema III. Sotto condizione di y, z reali, e disuguali, con lo spezzamento tartagliano è intimamente connesso il caso $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, e ripugnante il caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$. Ma reciprocamente sotto condizione di y, z disuguali ed immaginarie, con lo spezzamento tartagliano medesimo è intimamente connesso il caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, e ripugnante il caso $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$.

Teorema IV. Lo spezzamento tartagliano è potente, e di sua natura determinato a dare y, z reali nel caso $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, e nel caso $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$; ed è altrettanto potente, e di natura sua determinato a darle immaginarie nel caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$.

Ecco dai più intimi principj renduta ragione dell'escire dalla risoluzione tartagliana le parti y, z di x reali, e nella natura dell'intero nel caso di $\frac{1}{4}q^2 \geqq \frac{1}{27}p^3$, ed all'opposto immaginarie, e diformissime dalla natura dell'intero nel caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$.

§. IV. Dagli stessi intrinseci principj si deducono i limiti della grandezza della somma $y+z$, o dell'intero x corrispondentemente a' tre casi. E primieramente sia $q > \frac{1}{4}(y+z)^3$, $p < \frac{3}{4}(y+z)^2$, come dev'essere nel caso di $\frac{1}{4}q^2 > \frac{1}{27}p^3$, e di y, z reali e disuguali. Dalla prima condizione cavasi $y+z < \sqrt[3]{4q}$, e dalla seconda $y+z > 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$; dunque la grandezza di $y+z$ è tra $\sqrt[3]{4q}$, e $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Sia in secondo luogo $q = \frac{1}{4}(y+z)^3$, $p = \frac{3}{4}(y+z)^2$, come debb'essere nel caso di $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$, e di y, z reali ed uguali. La prima equazione porge $y+z=\sqrt[3]{4q}$, e la seconda $y+z=2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, i quali due valori coincidono, supposto $\frac{1}{4}q^2=\frac{1}{27}p^3$, avendosi quinci $q=\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$, $4q=8\times\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$, $\sqrt[3]{4q}=2\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Sia per terzo $q<\frac{1}{4}(y+z)^3$, $p>\frac{3}{4}(y+z)^2$, siccome debb'essere nel caso di $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$, e di y, z disuguali, ed immaginarie. Per la condizione prima si ha $y+z>\sqrt[3]{4q}$, per la seconda $y+z<2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e conseguentemente la grandezza di $y+z$ tra $\sqrt[3]{4q}$, e $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

Congiungendo queste determinazioni con i teoremi del §. antecedente, e con le cose alla pag. 345 dimostrate, si raccoglie

1.° Essere quattro cose intimamente e necessariamente fra di loro connesse: 1.ª $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$; 2.ª unica radice reale, e due immaginarie: 3.ª grandezza della real radice $>2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, e $<\sqrt[3]{4q}$; 4.ª attitudine del tartagliano spezzamento a darla in parti reali convenientemente alla natura dell'intera.

2.° Essere del pari quattro cose intimamente, e necessariamente fra di loro connesse: 1.ª $\frac{1}{4}q^2=\frac{1}{27}p^3$: 2.ª tre radici reali, due delle quali uguali: 3.ª la maggiore, ed equivalente, prescindendo dal contrario segno, alla somma delle due uguali, o di ciascuna di loro doppia $=2\sqrt{\frac{1}{3}p}=\sqrt[3]{4q}$; 4.ª il tartagliano spezzamento idoneo a darne in reale natura le parti, ma arrivato al confine di tale sua idoneità.

3.° Essere nientemeno quattro cose intimamente, e necessariamente fra di loro connesse: 1.ª $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$; 2.ª tre radici reali, e disuguali: 3.ª la massima $> \sqrt[3]{4q}$; e $< 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$; 4.ª incapacità assoluta, e metafisica ripugnanza nel tartagliano spezzamento a darne le parti in conveniente natura reale; capacità e necessaria determinazione a darle immaginarie.

§. V. Sorta sarà curiosità di sapere il numero di tutti i possibili spezzamenti, di conoscerne la diversa indole, e dei migliori almeno vedere a quale altezza salgano, ed a quale composizione le equazioni finali, o sia risultanti dall'eliminamento di una delle due incognite y, z. Ad appagare tale curiosità si cominci a supporre, che dall'equazione totale $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 - py - pz - q = 0$ segnata (A) si separino per la prima equazione dello spezzamento due soli termini, lasciandone per la seconda cinque, e tanti saranno i possibili spezzamenti di questa sorte, quanti sono gli ambi possibili a farsi di 7. cose, cioè $\frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$.

Poscia si dieno alla prima equazione dello spezzamento tre termini, lasciandone per la seconda quattro, e gli spezzamenti di questa fatta tanti saranno, quanti i terni di 7. cose, vale dire $\frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$. Non si può proceder più oltre, poichè dando alla prima equazione quattro termini, alla seconda tre, si ricaderebbe nel già fatto. Conviene però riflettere, che nelle combinazioni sino ad ora computate ascendenti alla somma $21 + 35 = 56$ si sono conservati interi i due termini $3y^2z$, $3yz^2$, onde la conclusione è soltanto, essere 56 gli spezzamenti possibili, conservando interi i due termini $3y^2z$, $3yz^2$. Ma se questi termini si dividano, e l'equazione (A) si sciolga negli undici termini

$y^3 + y^2 z + y^2 z + y^2 z + y z^2 + y z^2 + y z^2 + z^3 - p y - p z - q = 0$, il numero degli spezzamenti salirà alla somma $\frac{11 \times 10}{1 \times 2} + \frac{11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3} + \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 55 + 165 + 310 + 434 = 964$.

Ma questa è una possibilità astratta, e bisogna osservare tra li 964 spezzamenti avervene in 1.° luogo dei ripugnanti alla integrità dell'equazione proposta $x^3 = p x + q$. Tal è lo spezzamento avente per una delle sue equazioni $y^3 + z^3 = 0$, donde ne viene $y = - z$, e sostituendo nell' altra equazione $3 y^2 z + 3 y z^2 - p y - p z - q = 0$, si distruggono tutti i termini incogniti, e non rimane che $- q = 0$; e più direttamente, da $y = - z$ seguendone $y + z = x = 0$, annullati nell'equazione data $x^3 = p x + q$ i due termini x^3, $p x$, resta $0 = q$. Cade simil accusa su l'equazione $- p y - p z = 0$, o su lo spezzamento, che l'avesse ad una delle sue; poichè, essendo $- p y - p z = - p (y + z)$, non può essere $= 0$ se non sia $- p = 0$, od $y + z = 0$: per $- p = 0$ vien l'equazione $x^3 = p x + q$ scemata del termine $p x$, e per $y + z = 0$ ridotta, come sopra, a $0 = q$. Chiamo pertanto spezzamenti di tal sorte, spezzamenti di effetto ripugnante alla integrità dell'equazione data.

Ve ne ha in 2.° luogo degli altri di effetto annullante la trasformazione dell'equazion data $x^3 = p x + q$ in (A) con rendere una delle due parti y, z di x uguale a zero. Così lo spezzamento, che avesse ad una delle sue equazioni $y^2 z + y^2 z = 0$, o sia $2 y^2 z = 0$, importerebbe di necessità $y = 0$, ovvero $z = 0$, e quinci $y + z = x$, o tramutata in $z = x$, od in $y = x$, onde l'equazione (A), renduta vana la trasformazione, ritorna nell'equazion data, cangiato soltanto il simbolo x in z, od in y.

Più copiosa d'assai è in 3.ª luogo la classe degli spezzamenti, che non importano decisamente nè questo, nè quell' effetto, ma necessariamente o l'uno, o l'altro. Di questa classe sono gli spezzamenti, che ad una delle due loro equazioni avessero una delle seguenti: $y^3+y^2z=0$; $z^3+z^2y=0$; $3y^2z+3yz^2=0$; $2y^2z+2yz^2=0$; $y^2z+yz^2=0$; $y^3+y^2z+y^2z+yz^2=0$; ec. Poichè essendo, ad esempio, $y^3+y^2z=y^2(y+z)$, non può essere $y^3+y^2z=0$ se non sia od $y=0$, od $y+z=0$, la prima delle quali cose importa il secondo, e la seconda il primo dei due notati perniciosi effetti. Ed a toccare un altro esempio, risolvendosi $3y^2z+3yz^2$ in $3yz(y+z)$, non può essere $=0$, se non sia y, ovvero z, ovver $y+z=0$, e senza conseguentemente, che ne provenga uno dei due medesimi inconvenienti.

Nell'investigamento delle equazioni finali io mi getto al generale, formando uno spezzamento, che tutti i possibili comprenda.

Spezzamento generico.

Equaz. 1.ª $az^3+bz^2y+czy^2+dy^3-epz-fpy-gq=0$.

Equaz. 2.ª $(1-a)z^3+(3-b)z^2y+(3-c)zy^2+(1-d)y^3-(1-e)pz-(1-f)py-(1-g)q=0$.

Le lettere a, d possono essere, od ambedue $=1$, od una $=1$, l'altra $=0$; le b, c possono aver ciascheduna i quattro valori 0, 1, 2, 3; le tre e, f, g non possono essere che, od $=0$, od $=1$.

Confrontando le equazioni 1.ª, 2.ª con le (I), (II) in cima alla pag. 8, si ha

$$A=a,\ B=by,\ C=cy^2-ep,\ D=dy^3-fpy-gq,$$
$$P=1-a,\ Q=(3-b)y,\ R=(3-c)y^2-(1-e)p,$$
$$S=(1-d)y^3-(1-f)py-(1-g)q.$$

Ed applicando la formola in cima alla pag. 17, risulta

Equazione finale generica degli spezzamenti.

$$
\begin{array}{l}
\quad a^3(1-d)^3-(1-d)^2(3-c)a^2b+(1-d)^2(3-b)(ab^2-2a^2c) \\
-(1-a)(1-d)^2b^3+(1-d)(3-c)a^2c+(1-d)(3-b)ac^2+ \\
(1-a)^2(1-d)c^3-(1-d)(3-b)(3-c)abc+ \\
(1-a)(1-d)(3-c)b^2c-(1-a)(1-d)(3-b)bc^2- \\
(3-c)^3a^2d+(3-b)(3-c)^2abd-(1-a)(3-c)^2b^2d- \\
(3-b)^2(3-c)acd-(1-a)^2(3-c)(c^2-2bd)+ \\
(1-a)(3-b)(3-c)bcd+a(3-b)^3d^2-(1-a)(3-b)^2bd^2+ \\
(1-a)^2(3-b)cd^2-(1-a)^3d^3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y^9 \\
\quad -3a^3(1-d)^2(1-f)+(1-d)^2(1-e)a^2b+ \\
2(1-d)(1-f)(3-c)a^2b+2(1-d)^2(3-b)a^2e- \\
2(1-d)(1-f)(3-b)(ab^2-2ac)+2(1-a)(1-d)(1-f)b^3- \\
2(1-d)(3-c)(1-e)a^2c-(1-d)(3-c)^2a^2e- \\
(1-f)(3-c)^2a^2c-(1-f)(3-b)^2(ac^2-2abd)+ \\
(1-d)(3-b)^2(2abf-2ace)-(1-a)^2(1-d)(3c^2e-3bcf)- \\
(1-a)^2(1-f)(c^3-3bcd)+(1-f)(3-b)(3-c)(abc- \\
3a^2d)+(1-d)(3-b)(1-e)abc-(1-d)(3-b)(3-c)(3a^2f- \\
abe)-(1-a)(1-d)(3-c)b^2e-(1-a)(1-f)(3-c)b^2c- \\
(1-a)(1-d)(1-e)b^2c+(1-a)(1-f)(3-b)(bc^2- \\
2b^2d)-(1-a)(1-d)(3-b)(2b^2f-2bce)+ \\
3(3-c)^2(1-e)a^2d+(3-c)^3a^2f-2(3-b)(3-c)(1-e)abd- \\
(3-b)(3-c)^2abf+2(1-a)(3-c)(1-e)b^2d+ \\
(1-a)(3-c)^2b^2f+(3-b)^2(1-e)acd+(3-b)^2(3-c)aed+ \\
(3-b)^2(3-c)acf-(1-a)^2(3-c)(2bf-2ce)d- \\
(1-a)^2(3-c)(c^2-2bd)+(1-a)^2(1-e)(c^2-2bd)- \\
(1-a)(3-b)(1-e)bcd-(1-a)(3-b)(3-c)bed- \\
(1-a)(3-b)(3-c)bcf-2a(3-b)^3df+2(1-a)(3-b)^2bdf- \\
2(1-a)^2(3-b)cdf-(1-a)^2(3-b)ed^2+3(1-a)^3d^2f\ \ldots\ py^8 \\
\quad -3a^3(1-d)^2(1-g)+2(1-d)(1-g)(3-c)a^2b- \\
2(1-d)(3-b)(1-g)(ab^2-2a^2c)+2(1-a)(1-d)(1-g)b^3-
\end{array}
$$

$(1-g)(3-c)^2 a^2 c - (1-g)(3-b)^2 (ac^2 - 2abd) +$
$2(1-d)(3-b)^2 abg + 3(1-a)^2 (1-d) bcg -$
$(1-a)^2 (1-g)(c^3 - 3bcd) + (1-g)(3-b)(3-c)(abc -$
$3a^2 d) - 3(1-d)(3-b)(3-c)a^2 g - (1-a)(3-c)(1-g) b^2 c +$
$(1-a)(3-b)(1-g)(bc^2 - 2b^2 d) - 2(1-a)(3-b)(1-d)b^2 g +$
$(3-c)^3 a^2 g - (3-b)(3-c)^2 abg + (1-a)(3-c)^2 b^2 g +$
$(3-b)^2 (3-c) acg - 2(1-a)^2 (3-c) bgd +$
$(1-a)^2 (3-c)(c^2 - 2bd) - (1-a)(3-b)(3-c) bgc -$
$2(3-b)^3 adg + 2(1-a)(3-b)^2 bdg - 2(1-a)^2 (3-b) cdg +$
$3(1-a)^3 d^2 g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad qy^6$

$+ 3a^3 (1-d)(1-f)^2 - (1-f)^2 (3-c) a^2 b -$
$2(1-d)(1-f)(1-e) a^2 b + (3-b)(1-f)^2 (ab^2 - 2a^2 c) -$
$4(3-b)(1-d)(1-f) a^2 e - (1-a)(1-f)^2 b^3 +$
$2(1-f)(3-c)(1-e) a^2 c + (1-d)(1-e)^2 a^2 c +$
$(1-f)(3-c)^2 a^2 e + 2(1-f)(3-b)^2 ace + (1-d)(3-b)^2 ae^2 +$
$(1-a)^2 (1-d)(3ce^2 - 3bef) + (1-a)^2 (1-f)(3c^2 e - 3bed) -$
$(1-f)(3-b)(1-e)(abc - 3a^2 d) - (1-f)(3-b)(3-c) abe +$
$3(1-d)(3-b)(1-e) a^2 f + (1-a)(3-c)(1-f) b^2 e +$
$(1-a)(1-e)(1-f) b^2 c - 2(1-a)(3-b)(1-f) bce -$
$(1-a)(3-b)(1-d) be^2 - 3(3-c)(1-e)^2 a^2 d -$
$3(3-c)^2 (1-e) a^2 f + (3-b)(1-e)^2 abd +$
$2(3-b)(3-c)(1-e) abf - (1-a)(1-e)^2 b^2 d -$
$2(1-a)(3-c)(1-e) b^2 f - (3-b)^2 (1-e) acf -$
$(3-b)^2 (3-c) aef - (1-a)^2 (3-c) de^2 + (1-a)^2 (3-c)(2bf -$
$2ce) f + 2(1-a)^2 (1-e) bdf - (1-a)^2 (1-e)(c^2 + 2bd) f +$
$(1-a)(3-b)(1-e) bcf + (1-a)(3-b)(3-c) bef +$
$a(3-b)^3 f^2 - (1-a)(3-b)^2 bf^2 + (1-a)^2 (3-b) cf^2 +$
$2(1-a)^2 (3-b) def - 3(1-a)^3 df^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p^2 y^2$

$+ 6a^3 (1-d)(1-f)(1-g) - 2(1-f)(1-g)(3-c) a^2 b -$
$2(1-d)(1-e)(1-g) a^2 b + 2(3-b)(1-f)(1-g)(ab^2 -$
$2a^2 c) - 4(3-b)(1-d)(1-g) a^2 e - 2(1-a)(1-f)(1-g) b^3 +$

$2(1-e)(1-g)(3-c)a^2c+(1-g)(3-c)^2a^2e-$
$(1-g)(3-b)^2(2abf-2ace)-2(1-f)(3-b)^2abg-$
$3(1-a)^2(1-d)beg-3(1-a)^2(1-f)bcg+$
$(1-a)^2(1-g)(3c^2e-3bcf-3bed)-(1-g)(3-b)(1-e)(abc$
$-3a^2d)+(1-g)(3-b)(3-c)(3a^2f-abe)+$
$3(1-f)(3-b)(3-c)a^2g+3(1-d)(1-e)(3-b)a^2g+$
$(1-a)(3-c)(1-g)b^2e+(1-a)(1-e)(1-g)b^2c+$
$(1-a)(3-b)(1-g)(2b^2f-2bce)+2(1-a)(3-b)(1-f)b^2g$
$-3(3-c)^2(1-e)a^2g+2(3-b)(3-c)(1-e)abg-$
$2(1-a)(3-c)(1-e)b^2g-(3-b)^2(1-e)acg-$
$(3-b)^2(3-c)aeg+2(1-a)^2(3-c)bfg+(1-a)^2(3-c)(2bf-$
$2ce)+2(1-a)^2(1-e)bdg-(1-a)^2(1-e)(c^2-2bd)g+$
$(1-a)(3-b)(1-e)bcg+(1-a)(3-b)(3-c)beg+$
$2(3-b)^3afg-2(1-a)(3-b)^2bfg+2(1-a)^2(3-b)cfg+$
$2(1-a)^2(3-b)deg-6(1-a)^3dfg \;.\;.\;.\;.\;.\; pqy^4$
$-a^3(1-f)^3+(1-f)^2(1-e)a^2b+2(3-b)(1-f)^2a^2e-$
$(1-f)(1-e)^2a^2c-(1-f)(3-b)^2ae^2-(1-a)^2(1-d)e^2-$
$3(1-a)^2(1-f)ce^2+(1-a)(3-b)(1-f)be^2+(1-e)^3a^2d+$
$3(3-c)(1-e)^2a^2f-(3-b)(1-e)^2abf+(1-a)(1-e)^2b^2f+$
$(1-a)^2(3-c)e^2f-2(1-a)^2(1-e)bf^2-(1-a)^2(3-b)ef^2+$
$(1-a)^3f^3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; p^2y^3$
$+3a^3(1-d)(1-g)^2-(1-g)^2(3-c)a^2b+$
$(3-b)(1-g)^2(ab^2-2a^2c)-(1-a)(1-g)^2b^3+$
$2(1-a)^2(3-c)bg^2+a(3-b)^3g^2-(1-a)(3-b)^2bg^2+$
$(1-a)^2(3-b)cg^2-3(1-a)^3dg^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; q^2y^3$
$-3a^3(1-f)^2(1-g)+2(1-f)(1-g)(1-e)a^2b+$
$4(3-b)(1-f)(1-g)a^2e-(1-g)(1-e)^2a^2c-$
$(1-g)(3-b)^2ae^2+3(1-a)^2(1-f)beg-(1-a)^2(1-g)(3ce^2-$
$3bef)-3(1-f)(3-b)(1-e)a^2g-3(1-e)(1-g)(3-b)a^2f+$
$(1-a)(1-g)(3-b)be^2+3(3-c)(1-e)^2a^2g-$
$(3-b)(1-e)^2abg+(1-a)(1-e)^2b^2g+(1-a)^2(3-c)e^2g-$

$$4(1-a)^2(1-e)bfg-2(1-a)^2(3-b)efg+$$
$$3(1-a)^3f^2g \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; p^2qy^2$$
$$-3a^2(1-f)(1-g)^2+(1-e)(1-g)^2a^2b+$$
$$2(3-b)(1-g)^2a^2e-2(1-a)^2(1-e)bg^2-(1-a)^2(3-b)eg^2+$$
$$3(1-a)^3fg^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; pq^2y$$
$$+(1-a)^2(1-f)e^3-(1-e)^3a^2f \;.\;.\;.\;.\;.\; p^4y$$
$$-a^3(1-g)^3q^3+(1-a)^2(1-g)e^2p^3q-(1-e)^3a^2gp^3q+$$
$$(1-a)^3g^3q^3.$$
$$=0.$$

Questa equazione è tanto composta, e numerosa di termini ne' suoi coefficienti, che reca all'occhio ingombro, e quasi spavento. Eppure rigettati si sono nel calcolo, e l'avverta chi la voglia concepisse di ripeterlo, rigettati si sono tutti i termini contenenti PA, ossia $(1-a)a$ siccome generalmente nulli per non poter essere a che od $=1$, od $=0$, nell'uno, e nell'altro de' quali casi $(1-a)a$ è $=0$; e per la stessa ragione rigettati del pari si sono i termini tutti contenenti alcuno dei prodotti $(1-d)d$, $(1-e)e$, $(1-f)f$, $(1-g)g$.

Essa equazione si può, come tronco in due rami, dividere in due equazioni, l'una spettante tutti gli spezzamenti a cubi uniti, l'altra spettante tutti gli spezzamenti a cubi disgiunti. Si ottiene la prima facendo $a=d=1$, e la seconda facendo $a=0$ $d=1$. Ecco la prima

Classe degli spezzamenti a cubi uniti.

Equaz. 1.ª $z^3 + b z^2 y + c z y^2 + y^3 - e p z - f p y - g q = 0$.

Equaz. 2.ª $(3-b) z^2 y + (3-c) z y^2 - (1-e) p z - (1-f) p y - (1-g) q = 0$.

Equazione finale.

$$-(3-c)^3 + (3-b)(3-c)^2 b - (3-b)^2(3-c)c + (3-b)^3 \ldots\ y^9$$

$$-(1-f)(3-c)^2 c - (1-f)(3-b)^2 c^2 + 2(1-f)(3-b)^2 b + (1-f)(3-b)(3-c)bc - 3(1-f)(3-b)(3-c) + 3(3-c)^2(1-e) + (3-c)^3 f - 2(3-b)(3-c)(1-e)b - (3-b)(3-c)^2 bf + (3-b)^2(1-e)c + (3-b)^2(3-c)e + (3-b)^2(3-c)cf - 2(3-b)^3 f \ldots\ p y^7$$

$$-(1-g)(3-c)^2 c - (1-g)(3-b)^2 c^2 + 2(1-g)(3-b)^2 b + (1-g)(3-b)(3-c)bc - 3(1-g)(3-b)(3-c) + (3-c)^3 g - (3-b)(3-c)^2 bg + (3-b)^2(3-c)cg - 2(3-b)^3 g \ldots\ q y^6$$

$$-(1-f)^2(3-c)b + (3-b(1-f)^2 b^2 - 2(3-b)(1-f)^2 c + 2(1-f)(3-c)(1-e)c + (1-f)(3-c)^2 e + 2(1-f)(3-b)^2 ce - (1-f)(3-b)(1-e)bc + 3(1-f)(3-b)(1-e) - (1-f)(3-b)(3-c)be - 3(3-c)(1-e)^2 - 3(3-c)^2(1-e)f + (3-b)(1-e)^2 b + 2(3-b)(3-c)(1-e)bf - (3-b)^2(1-e)cf - (3-b)^2(3-c)ef + (3-b)^3 f^2 \ldots\ p^2 y^5$$

$$-2(1-f)(1-g)(3-c)b + 2(3-b)(1-f)(1-g)b^2 - 4(3-b)(1-f)(1-g)c + 2(1-e)(1-g)(3-c)c + (3-c)^2(1-g)e - 2(1-g)(3-b)^2 bf + 2(1-g)(3-b)^2 ce - 2(1-f)(3-b)^2 bg - (1-g)(1-e)(3-b)bc + 3(1-g)(3-b)(1-e) + 3(1-g)(3-b)(3-c)f - (1-g)(3-b)(3-c)b + 3(1-f)(3-b)(3-c)g - 3(3-c)^2(1-e)g + 2(3-b)(3-c)(1-e)bg - (3-b)^2(1-e)cg - (3-b)^2(3-c)eg + 2(3-b)^3 fg \ldots\ p q y^4$$

$$-(1-f)^3 + (1-f)^2(1-e)b + 2(3-b)(1-f)^2 e - (1-f)(1-e)^2 c - (1-f)(3-b)^2 e^2 + (1-e)^3 + 3(3-c)(1-e)^2 f - (3-b)(1-e)bf \ldots\ p^3 y^3$$

$$-(1-g)^2(3-c)b+(3-b)(1-g)^2b^2-2(3-b)(1-g)^2c+$$
$$(3-b)^3g^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad q^2y^3$$
$$-3(1-f)^2(1-g)+2(1-f)(1-g)(1-e)b+$$
$$4(3-b)(1-f)(1-g)e-(1-g)(1-e)^2c-(1-g)(3-b)^2e^2-$$
$$3(1-f)(3-b)(1-e)g-3(1-e)(1-g)(3-b)f+$$
$$3(3-c)(1-e)^2g-(3-b)(1-e)^2bg \quad \ldots \quad p^2qy^2$$
$$-3(1-f)(1-g)^2+(1-e)(1-g)^2b+2(3-b)(1-g)e \quad . \quad pq^2y$$
$$-(1-e)^3f \quad \ldots\ldots\ldots \quad p^4y$$
$$-(1-g)^3q^3-(1-e)^3gp^3q$$
$$=0.$$

Il coefficiente di y^9 si annienta posto $b=c$; che se in oltre pongasi $e=f$, annullansi eziandio i coefficienti di py^7, e di p^2y^5. Laonde ne segue

Formola degli spezzamenti

a cubi y^3, z^3 *uniti, a linee* py, pz *pur unite*
a parallelepipedi y^2z, yz^2 *ugualmente moltiplicati, e ripartiti.*

Equaz. 1.ª $z^3+y^3+bz^2y+bzy^2-fp(y+z)-gq=0.$

Equaz. 2.ª $(3-b)z^2y+(3-b)zy^2-(1-f)p(y+z)-(1-g)q=0.$

Equazione loro finale.

$$-(3-b)^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad qy^6$$
$$(3-b)(1-f)(1-g)b^2-4(3-b)(1-f)(1-g)b+$$
$$4(3-b)^2(1-g)f+3(1-g)(3-b)(1-f)-$$
$$(1-g)(3-b)^2bf-(3-b)^2(1-f)bg+(3-b)^3fg \quad \ldots \quad pqy^4$$
$$-(3-b)^2(1-g)^2b+(3-b)^3g^2 \quad \ldots\ldots \quad q^2y^3$$
$$-(3-b)(1-f)^2(1-g)-(3-b)^2(1-g)f^2-$$
$$(3-b)(1-f)^2bg \quad \ldots\ldots\ldots \quad p^2qy^2$$
$$2(3-b)(1-g)^2f-(3-b)(1-f)(1-g)^2 \quad . \, . \quad pq^2y$$
$$-(1-g)^3q^3-(1-f)^3gp^3q$$
$$=0.$$

Facendo prima $g = 1$, poi $g = 0$ ne nascono due specie di spezzamenti, nella prima delle quali stando q nella equaz. 1.ª, dove trovansi uniti i due cubi, come nello spezzamento tartagliano, perciò chiamerolla specie dello spezzamento tartagliano, e de' suoi affini. E per contraria ragione la seconda sarà da me chiamata specie dello spezzamento anti-tartagliano, e degli affini suoi.

Specie dello spezzamento tartagliano, ed affini.

Equaz. 1.ª $z^3 + y^3 + b z^2 y + b z y^2 - f p (y + z) - q = 0$.

Equaz. 2.ª $(3 - b) z^2 y + (3 - b) z y^2 - (1 - f) p (y + z) = 0$.

Questa divisa per $y + z$ riducesi a $(3 - b) y z = (1 - f) p$.

Equazione loro finale.

$$- (3 - b)^3 y^6 - \left((3 - b)^2 (1 - f) b - (3 - b)^3 f \right) p y^4 + (3 - b)^3 q y^3 - (3 - b)(1 - f)^2 b p^2 y^2 - (1 - f)^3 p^3 = 0.$$

Specie dello spezzamento anti-tartagliano, ed affini.

Equaz. 1.ª $z^3 + y^3 + b z^2 y + b z y^2 - f p (y + z) = 0$.

Equaz. 2.ª $(3 - b) z^2 y + (3 - b) z y^2 - (1 - f) p (y + z) - q = 0$.

Equazione loro finale.

$$- (3 - b)^3 y^6 + \left((3 - b)(1 - f) b^2 - 4 (3 - b)(1 - f) b + 4 (3 - b)^2 f + 3 (3 - b)(1 - f) - (3 - b)^2 b f \right) p y^4 - (3 - b)^2 b q y^3 - \left((3 - b)(1 - f)^2 + (3 - b)^2 f^2 \right) p^2 y^2 + \left(2 (3 - b) f - (3 - b)(1 - f) \right) p q y - q^2 = 0.$$

Veniamo al particolare dei quattro primi spezzamenti tra i sette da Cardano distinti.

Spezzamento I.: il tartagliano

fatti b, c, $f = 0$.

Equaz. 1.ª $y^3 + z^3 - q = 0$ . . . . . .

Equaz. 2.ª $3 y^2 z + 3 y z^2 - p (y + z) = 0$.

Equazione finale.

$$-3^3 y^6 + 3^3 q y - p^3 = 0.$$

Spezzamento II.: l'anti-tartagliano

fatti b, $c = 0$, $f = 1$.

Equaz. 1.ª $y^3 + z^3 - p(y + z) = 0$. . . . . . .

Equaz. 2.ª $3 y^2 z + 3 y z^2 - q = 0$.

Equazione finale.

$$-3^2 y^6 + 4 . 3^2 p y^4 - 3^2 p^2 y^2 + 2 . 3 p q y - q^2 = 0.$$

Spezzamento III.: affine all'anti-tartagliano

fatti b, $c = 1$, $f = 1$.

Equaz. 1.ª $y^3 + z^3 + y^2 z + y z^2 - p(y + z) = 0$ . . . . .

Equaz. 2.ª $2 y^2 z + 2 y z^2 - q = 0$.

Equazione finale.

$$-2^2 y^6 + 3 . 2^2 p y^4 - 2^2 q y^3 + 2^2 p^2 y^2 + 2^2 p q y - q^2 = 0.$$

Spezzamento IV.: affine all'anti-tartagliano

fatti b, $c = 2$, $f = 1$.

Equaz. 1.ª $y^3 + z^3 + 2 y^2 z + 2 y z^2 - p(y + z) = 0$. . . . .

Equaz. 2.ª $y^2 z + y z^2 - q = 0$.

Equazione finale.

$$-y^6 + 3 y^4 - q y^3 - p^2 y^2 + 2 p q y - q^2 = 0.$$

Ho detto, che facendo $a = 0$, $d = 1$ si ottiene la classe degli spezzamenti a cubi disgiunti, e la rispettiva finale equazione: si ottiene cioè

Classe degli spezzamenti a cubi disgiunti.

Equaz. 1.ª $y^3 + b z^2 y + c z y^2 - e p z - f p y - g q = 0$.

Equaz. 2.ª $z^3 + (3 - b) z^2 y + (3 - c) z y^2 - (1 - e) p z - (1 - f) p y - (1 - g) q = 0$.

Equazione finale.

$$-(3-c)^2 b^2-(3-c)(c^2-2b)+(3-b)(3-c)bc-$$
$$(3-b)^2 b+(3-b)c-1 \quad \dots\dots\dots \quad y^9$$
$$-(1-f)(c^3-3bc)-(1-f)(3-c)b^2c+$$
$$(1-f)(3-b)(bc^2-2b^2)+2(3-c)(1-e)b^2+(3-c)^2b^2f-$$
$$(3-c)(2bf-2ce)-(3-c)(c^2-2b)+(1-e)(c^2-2b)-$$
$$(3-b)(1-e)bc-(3-b)(3-c)be-(3-b)(3-c)bcf+$$
$$2(3-b)^2bf-2(3-b)cf-(3-b)e+3f \quad \dots\dots \quad py^7$$
$$-(1-g)(c^3-3bc)-(3-c)(1-g)b^2c+$$
$$(3-b)(1-g)(bc^2-2b^2)+(3-c)^2b^2g-2(3-c)bg+$$
$$(3-c)(c^2-2bd)-(3-b)(3-c)bcg+2(3-b)^2bg-$$
$$2(3-b)cdg+3g \quad \dots\dots\dots \quad qy^6$$
$$-(1-f)^2b^3+(1-f)(3c^2e-3be)+(3-c)((1-f)b^2e+$$
$$(1-e)(1-f)b^2c-2(3-b)(1-f)bce-(1-e)^2b^2-$$
$$2(3-c)(1-e)b^2f-(3-c)e^2+(3-c)(2bf-2ce)f+$$
$$2(1-e)bf-(1-e)(c^2-2b)f+(3-b)(1-e)bcf+$$
$$(3-b)(3-c)bef-(3-b)^2bf^2+(3-b)cf^2+$$
$$2(3-b)ef-3f \quad \dots\dots\dots \quad p^2y^5$$
$$-2(1-f)(1-g)b^3-3(1-f)bcg+(1-g)(3c^2e-$$
$$3bcf-3be)+(3-c)(1-g)b^2e+(1-e)(1-g)b^2c+$$
$$(3-b)(1-g)(2b^2f-2bce)+2(3-b)(1-f)b^2g-$$
$$2(3-c)(1-e)b^2g+2(3-c)bfg+(3-c)(2bf-2ce)+$$
$$2(1-e)bg-(1-e)(c^2-2b)g+(3-b)(1-e)bcg+$$
$$(3-b)(3-c)beg-2(3-b)^2bfg+2(3-b)cfg+$$
$$2(3-b)eg-6fg \quad \dots\dots\dots \quad pqy^4$$
$$-3(1-f)ce^2+(3-b)(1-f)be^2+(1-e)^2b^2f+$$
$$(3-c)e^2f-2(1-e)bf^2-(3-b)ef^2+f^3 \quad \dots \quad p^3y^3$$
$$-(1-g)^2b^2+2(3-c)bg^2-(3-b)^2bg^2+(3-b)cg^2-3g^2 \,.\, q^2y^3$$
$$+3(1-f)beg-(1-g)(3ce^2-3bef)+$$
$$(1-g)(3-b)be^2+(1-e)^2b^2g+(3-c)e^2g-4(1-e)bfg+$$
$$2(3-b)efg+3f^2g \quad \dots\dots\dots \quad p^2qy^2$$

$$-2(1-e)bg^2-(3-b)eg^2+3fg^2 \;.\;.\;.\;.\; pq^2y^2$$
$$+(1-f)e^3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; p^4y$$
$$+g^3q^3+(1-g)e^3p^3q$$
$$=0.$$

Quinci scendendo ai tre ultimi dei sette particolari spezzamenti da Cardano contemplati si conseguisce

Spezzamento V.

fatti b, $c=0$, e, $f=0$, $g=1$.

Equaz. 1.ª $y^3-q=0$ . . . . .

Equaz. 2.ª $z^3+3z^2y+3zy^2-p(y+z)=0$.

Equazione finale.

$$-y^9+3qy^6-3q^2y^3+q^3=0, \text{ cioè } (-y^3+q)^3=0.$$

Spezzamento VI.

fatto $b=3$, $c=0$, e, $f=0$, $g=1$.

Equaz. 1.ª $y^3+3yz^2-q=0$ . . . . . .

Equaz. 2.ª $z^3+3y^2z-p(y+z)=0$.

Equazione finale.

$$-64y^9+66py^7+48qy^6-36p^2y^5-42pqy^4+15q^2y^3+9p^2qy^2-6pq^2y+q^3=0.$$

Spezzamento VII.

fatto $b=1$, $c=2$, e, $f=0$, $g=1$.

Equaz. 1.ª $y^3+2y^2z+yz^2-q=0$ . . . . . .

Equaz. 2.ª $z^3+y^2z+2yz^2-p(y+z)=0$.

Equazione finale.

$$-q^2y^3+p^2qy^2-2pq^2y+q^3=0.$$

Se Cardano avesse cercate le equazioni finali dei sette spezzamenti da lui distinti non avrebbe pronunciato a disfavore del 5.° essere di tutti il deteriore per recare da una equazione cubica priva del secondo termine ad una equazione cubica di tutti i termini fornita, e nel caso irreducibile quando quella; poichè il 7.° è nella stessa stessissima condizione, siccome si farà manifesto, spogliando la sua finale $y^3 - \frac{p^2}{q} y^2 + 2py - q = 0$ del secondo termine con porre $y = t + \frac{p^2}{3q}$, provenendone $t^3 - \left(\frac{p^4}{3q^2} - 2p\right)t - \left(\frac{2}{27} \cdot \frac{p^6}{q^3} - \frac{2p^3}{3q} + q\right) = 0$, e trovandosi $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{27} \cdot \frac{p^6}{q^3} - \frac{2p^3}{3q} + q\right)^2 - \frac{1}{27}\left(\frac{p^4}{3q^2} - 2p\right)^3 = -\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2$. Lo spezzamento 2.°, cioè l'anti-tartagliano, ed i suoi affini 3.° e 4.° alzano ad equazioni di sesto grado, e lo spezzamento 6.° eleva sino al grado nono. In generale, affinchè uno spezzamento riesca utile nel caso irreducibile, bisogna o che porti ad una equazione soggetta all'analisi di quelle di 2.° grado, vale dire, se non di 2.° grado propiamente, almeno derivativa di esso, o che termini ad una equazione di 3.° grado, ma che sia fuori del caso irreducibile, allorchè in tal caso si trova la proposta $x^3 = px + q$. Non vi ha che lo spezzamento tartagliano, il quale soddisfaccia all'intento nella prima maniera, e non ve ne ha alcuno idoneo ad adempierlo nella seconda; ed ognuno si convincerà dell'una, e dell'altra verità scorrendo per le varie combinazioni delle ipotesi necessarie a farsi, onde nelle finali non sussistano che i termini componenti una equazione, o propria, o derivativa di 2.° grado, od una propria similmente, o derivativa di 3.°. Troverà o di essere gettato in ripugnanze, quali le notate alla pagina 453, o di essere risospinto al caso irreducibile nella equazione $x^3 = px + q$ supposto.

§. VI. Riflettendo Cardano, che per le contrarie nature dei due spezzamenti tartagliano, ed anti-tartagliano, allorchè le parti y, z di x relative allo spezzamento tartagliano sono immaginarie, debbono per l'opposto essere reali le parti y, z di esso x relative all'anti-tartagliano spezzamento; vedendo d'altro canto, che questo in luogo di produrre, come il tartagliano, una equazione di 2.° grado, saliva oltre i gradi in podestà dell'analisi: si volse a cercare, se passava tra l'uno spezzamento, e l'altro una qualche comunicazione, per cui dalle parti y, z di x relative al tartagliano spezzamento conceduto fosse determinare le parti y, z dello stesso x all'anti-tartagliano relative; sperando forse, che quelle fossero per prendere nel calcolo, e nella espressione di queste un tale modificamento, per il quale venendo a distruggersi i termini immaginarj di contrario segno affetti, ne risultassero delle forme da mostruosità libere, ed in tutti i loro membri reali. Ma gli andò fallita questa speranza, sebbene, invocata in sussidio la 5.ª di Euclide, riuscissegli di scoprire la ideata comunicazione, e determinazione delle une parti di x per le altre. Egli è nel Capo VII *De Regula Aliza* erroneamente intitolato: *De examine aestimationum sumptarum ex regula secunda et tertia secundi capituli* in cambio di *ex regula prima, et secunda capituli primi*, che Cardano espone la via da uno spezzamento all'altro. Io la estenderò agli spezzamenti 3.°, e 4.°. A distinzione, ritenute le lettere y, z per rappresentare le parti di x relative allo spezzamento 1.°, cioè al tartagliano, si prendano a dinotare le parti di x relative ai tre spezzamenti 2.°, 3.°, 4.°, vale dire all'anti-tartagliano, ed ai due suoi affini, le lettere Y, Z. L'espressione di tutti e tre gli spezzamenti insieme si è

$$Y^3+Z^3+bY^2Z+bYZ^2-p(Y+Z)=0\ldots\ldots$$
$$(3-b)Y^2Z+(3-b)YZ^2-q=0.$$

È chiaro, che essendo $y+z=x$, $Y+Z=x$, per conseguenza è $y+z=Y+Z$. Quinci, dall'equazione seconda avendosi $YZ=\frac{q}{(3-b)(Y+Z)}$, ne viene $YZ=\frac{q}{(3-b)(y+z)}$. Ma per la 5.ª del II di Euclide posta D la differenza per eccesso, e per difetto di Y, Z da $\frac{1}{2}(Y+Z)$, ossia da $\frac{1}{2}(y+z)$, o per algebra, fatta $Y=\frac{1}{2}(y+z)+D$, $Z=\frac{1}{2}(y+z)-D$, è $YZ=\frac{1}{4}(y+z)^2-D^2$, e perciò $D=\sqrt{\left(\frac{1}{4}(y+z)^2-YZ\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}(y+z)^2-\frac{q}{(3-b)(y+z)}\right)}$; dunque

$$Y=\frac{1}{2}(y+z)+\sqrt{\left(\frac{1}{4}(y+z)^2-\frac{q}{(3-b)(y+z)}\right)}$$
$$Z=\frac{1}{2}(y+z)-\sqrt{\left(\frac{1}{4}(y+z)^2-\frac{q}{(3-b)(y+z)}\right)}.$$

Queste espressioni di Y, Z hanno una reale natura per poco, che sia $q<\frac{3-b}{4}(y+z)^3$, lo che ottimamente concorda con le podestà assegnate ai tre spezzamenti da Cardano. Relativamente allo spezzamento anti-tartagliano Y, Z hanno natura reale per la menoma cosa, che sia $q<\frac{3}{4}(y+z)^3$; relativamente al 3.° spezzamento per tantino, che sia $q<\frac{2}{4}(y+z)^3$, e relativamente allo spezzamento 4.° per un atomo, che sia $q<\frac{1}{4}(y+z)^3$. All'opposto le y, z dello spezzamento tartagliano hanno separatamente natura immaginaria per pochissimo che sia $q<\frac{1}{4}(y+z)^3$. Ma in ultimo che pro della real natura delle Y, Z, se involgono la formola tartagliana $y+z$ contaminata nelle sue parti y, z d'immaginarj?

Procedette Cardano a determinar la comunicazione tra lo spezzamento tartagliano, ed il 7.°, e la cosa fu facile. Si denotino le parti di x a questo relative per v, ζ, con che le due equazioni di lui vengono ad essere

$$v^3+2v^2\zeta+v\zeta^2=q\ldots\ldots\zeta^3+v^2\zeta+2v\zeta^2=p(v+\zeta).$$

Dividendo la seconda per la prima si ha $\frac{(\zeta+v)^2\zeta}{(v+\zeta)^2 v}=\frac{\zeta}{v}=\frac{p(v+\zeta)}{q}$, e per esser $v+\zeta=y+z$, $\frac{\zeta}{v}=\frac{p(y+z)}{q}$, e disponendo in ragione: $p(y+z):q::\zeta:v$, e componendo, $p(y+z)+q:q::\zeta+v:v::y+z:v$, onde $v=\frac{q(y+z)}{p(y+z)+q}$; e poichè per $\frac{\zeta}{v}=\frac{p(y+z)}{q}$ è $\zeta=\frac{vp(y+z)}{q}$, perciò $\zeta=\frac{pq(y+z)^2}{pq(y+z)+q^2}$.

Segnate le comunicazioni dello spezzamento tartagliano con il suo contrario, e gli affini di lui, e con lo spezzamento 7.° stimò Cardano difetto il non mostrare le comunicazioni di esso tartagliano spezzamento con gli affini suoi. Questo è ciò, che si propone sul principio del Capo LIII portante il malacconcio, anzi falso titolo *De diligenti consideratione quorundam superius dictorum Cap. 7.*, non avendo nel Capo 7. parlato, che della comunicazione tra il tartagliano, e l'anti-tartagliano spezzamento. Di ciò poi, che si propone di nuovo, non adempie che metà; ma io supplirò all'ommissione. I due spezzamenti affini al tartagliano sono

$$y^3+z^3+y^2z+yz^2=q\ldots\ldots 2y^2z+2yz^2=p(y+z)$$
$$y^3+z^3+2y^2z+2yz^2=q\ldots\ldots y^2z+yz^2=p(y+z).$$

A distinguer dalle parti di x relative allo spezzamento tartagliano le parti di esso x relative al primo dei due suoi affini segniamo queste con le lettere y, z munite di accento, cioè con y', z'. Saranno pertanto le due equazioni di tale spezzamento

$$y'^3+z'^3+y'^2z'+y'z'^2=q\ldots\ldots 2y'^2z'+2y'z'^2=p(y'+z').$$

La prima equazione si risolve in $y'^2+z'^2=\frac{q}{y'+z'}$, per conseguenza $=\frac{q}{y+z}$. Si ponga $y'=\frac{1}{2}(y+z)+h$, $z'=$

$\frac{1}{2}(y+z)-h$; per la 9.ª del II di Euclide $y'^2+z'^2=\frac{1}{2}(y+z)^2+2h^2$, e quinci $h^2=\frac{1}{2}(y'^2+z'^2)-\frac{1}{4}(y+z)^2=\frac{q}{2(y+z)}-\frac{1}{4}(y+z)^2$, $h=\sqrt{\left(\frac{q}{2(y+z)}-\frac{1}{4}(y+z)^2\right)}$, conseguentemente

$$y'=\frac{1}{2}(y+z)+\sqrt{\left(\frac{q}{2(y+z)}-\frac{1}{4}(y+z)^2\right)}$$
$$z'=\frac{1}{2}(y+z)-\sqrt{\left(\frac{q}{2(y+z)}-\frac{1}{4}(y+z)^2\right)}.$$

Le parti di x relative al secondo dei due esposti spezzamenti dinotinsi per y'', z'', e corrispondentemente le due equazioni per

$$y''^3+z''^3+2y''^2z''+2y''z''^2=q \ldots\ldots y''^2z''+y''z''^2=p(y''+z'').$$

Sciogliesi la prima equazione in $y''^2+z''^2+y''z''=\frac{q}{y''+z''}$, e cavasi dalla seconda $y''z''=p$, onde combinando si ha $y''^2+z''^2+p=\frac{q}{y''+z''}$, e trasponendo p, ed in luogo della somma $y''+z''$ sostituendo la uguale $y+z$, si ottiene $y''^2+z''^2=\frac{q}{y+z}-p$. Dopo di che, operando, come sopra, giusta la 9.ª del II di Euclide, si tira

$$y''=\frac{1}{2}(y+z)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q}{y+z}-p\right)-\frac{1}{4}(y+z)^2\right)}$$
$$z''=\frac{1}{2}(y+z)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q}{y+z}-p\right)-\frac{1}{4}(y+z)^2\right)}:$$

ed ecco per il principio stesso, onde Cardano dimostrò la prima delle due comunicazioni, dimostrata parimente la seconda, della quale pure proposto si era, ma poi non adempiè la dimostrazione.

§. VII. Si appigliò anche Cardano a cercare per approssimazione le parti di x, e stimò il più acconcio a questo oggetto lo spezzamento 3.º. Potrei in brevi tratti esporre lo spirito del metodo; ma per integrità della Storia, e per metter la face in mano a chi concepisse vaghezza di penetrare, e percorrere il bujo del libro *De Regula Aliza*, debbo riferire, ed illustrare certe particolari forme di dire, e di calcolare, che nel Capo XXXI a tale proposito Cardano introdusse, senza, a dir vero, necessità veruna, e con non altro frutto, che quello della oscurità. Si richiamino qui dalla pagina 443 le due equazioni dello spezzamento 3.°

$$y^3+z^3+2y^2z+2yz^2=p(y+z)\ldots\ldots 2y^2z+2yz^2=q.$$

La prima divisa per $y+z$ si riduce ad $y^2+z^2=p$, e la seconda divisa per 2 diviene $y^2z+yz^2=\frac{1}{2}q$. Cardano chiama la somma $y+z$ *Radice Solida* p in $\frac{1}{2}q$, volendo con ciò significare una quantità, le cui parti quadrate formano congiuntamente p, ed i reciproci parallelepipedi di una nel quadrato dell'altra compongono $\frac{1}{2}q$. Quindi procede ad insegnare le particolari regole di operare su di sì fatte Radici Solide, e di esprimerne i risultati.

Moltiplica. $\left(\text{Rad. Sol.}\, p \text{ in } \frac{1}{2}q\right)\times\sqrt{a}=$ Rad. Sol. ap in $\sqrt{\frac{1}{4}q^2a^3}$. Poichè moltiplicando $y+z$ per $\sqrt{a}$, in vece di y, z si hanno $y\sqrt{a}$, $z\sqrt{a}$, ed in vece di $y^2+z^2=p$ si ha $ay^2+az^2=ap$, ed in vece di $y^2z+yz^2=\frac{1}{2}q$ ne viene $y^2\sqrt{a^2}\times z\sqrt{a}+y\sqrt{a}\times z^2\sqrt{a^2}=\frac{1}{2}q\sqrt{a^3}=\sqrt{\frac{1}{4}q^2a^3}$.

Divisione. $\frac{\text{Rad. Sol.}\, p \text{ in } \frac{1}{2}q}{\sqrt{a}}=$ Rad. Sol. $\frac{p}{a}$ in $\sqrt{\frac{\frac{1}{4}q^2}{a^3}}$. Non ha bisogno di spiegazione dopo spiegata la moltiplica.

Addizione. Rad. Sol. p in $\frac{1}{2}q+$ Rad. Sol. b^2q in $\frac{1}{2}qb^3=$ $(1+b)$ Rad. Sol. p in $\frac{1}{2}q=$ Rad. Sol. $(1+b)^2p$ in $\frac{1}{2}q(1+b)^3$.

Vuol dire ad $y+z$ aggiugnere $(y+z)b$, la cui espressione, per il detto della moltiplica, cangiato $\sqrt{a}$ in b, viene ad essere Rad. Sol. $b^2 q$ in $\frac{1}{2} q b^3$. Ma $y+z+(y+z)b = (1+b)(y+z)$; dunque di nuovo sostituendo nella formola della moltiplica $1+b$ in luogo di $\sqrt{a}$ si troverà ciò, che qui prescrivesi per ultimo risultato dell'addizione.

Sottrazione. Rad. Sol. p in $\frac{1}{2} q$ — Rad. Sol. $b^2 q$ in $\frac{1}{2} q b^3 = (1-b)$ Rad. Sol. p in $\frac{1}{2} q =$ Rad. Sol. $(1-b)^2 p$ in $\frac{1}{2} q (1-b)^3$.

Approssimazione ai valori di y, z. Esempio: $x^3 = 6x + 1$, $x = y + z =$ Rad. Sol. 6 in $\frac{1}{2}$. Si moltiplichi per $\sqrt{16}$, e si avrà $\left(\text{Rad. Sol. } 6 \text{ in } \frac{1}{2}\right) \times \sqrt{16} =$ Rad. Sol. 96 in 32: cioè in luogo di $y^2 + z^2 = 6$, ed $y^2 z + y z^2 = \frac{1}{2}$, che si avevano per $y+z$, si avranno per $(y+z)\sqrt{16}$ le equazioni $16 y^2 + 16 z^2 = 96$; $16 y^2 \times z \sqrt{16} + y \sqrt{16} \times 16 z^2 = 4^2 y^2 \times 4z + 4y \times 4^2 z^2 = \frac{64}{2} = 32$. Si divida 96 nelle due parti $95\frac{8}{9} + \frac{1}{9}$, facendo $95\frac{8}{9} = 16 y^2$, $\frac{1}{9} = 16 z^2$, e conseguentemente $\sqrt{95\frac{8}{9}} = 4y$, $\frac{1}{3} = 4z$: sarà $4^2 y^2 \times 4z + 4y \times 4^2 z^2 = 95\frac{8}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\sqrt{95\frac{8}{9}} > 32$. Se dividasi 96 nelle due parti $95\frac{9}{10} + \frac{1}{10}$, ponendo $95\frac{9}{10} = 16 y^2$, $\frac{1}{10} = 16 z^2$, e per conseguenza $\sqrt{95\frac{9}{10}} = 4y$, $\sqrt{\frac{1}{10}} = 4z$; ne verrà $4^2 y^2 \times 4z + 4y \times 4^2 z^2 = 95\frac{9}{10}\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{1}{10}\sqrt{95\frac{9}{10}} < 32$. Donde inferisce Cardano, un prossimo valore di $4^2 y^2$ essere $95\frac{17}{19}$, e corrispondentemente il prossimo di $4^2 y^2$ la frazione $\frac{2}{19}$. Non s'intende però la ragione di formare delle due frazioni $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$ la frazione $\frac{17}{19}$, o delle due $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ la frazione $\frac{2}{19}$; piuttosto che prendere $\frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}+\frac{9}{10}\right)=\frac{161}{180}$, ed $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)=\frac{19}{180}$. Ma non ci perdiamo in queste cose di niuna utilità; poichè, quanto all'approssimazione, non avea Cardano stesso motivo di cercar nel modo testè esposto quella ai valori delle parti dopo avere insegnata la regola generale della approssimazione diretta al valore dell'intero, come io ho mostrato nella Parte II del Capo VI pag. 316.

Anche rispetto al 7.° spezzamento usa Cardano nel Capo L il titolo di *Rad. Sol.*, ma in modo alquanto differente, denominando $y+z$ semplicemente Rad. Sol. q, avuto soltanto riguardo al prodursi per le parti y, z l'equazione $y^3+2y^2z+yz^2=q$, senza punto considerare, ed inchiudere in tale denominazione l'altra $z^3+y^2z+2yz^2=p(y+z)$. Nè su questa Radice Solida prescrive forme speciali di operazioni, o metodo di approssimare ai valori delle parti y, z. In vece si propone alcuni problemi, ne' quali data la somma $y+z$, o data la ragione tra l'una, e l'altra delle parti y, z, o dati due dei termini del trinomio $y^3+2y^2z+yz^2$, o dato il termine y^3, ed insieme il valore della somma degli altri due $2y^2z+yz^2$, determina ciascheduna delle parti y, z; ma non possono cadere in conto che di esercizj di calcolo.

Per ciò intanto, che spetta all'algebraica nomenclatura si vede già introdotto a significazione di $y+z$, ossia della quantità x verificante l'equazione $x^3=px+q$ il nome di *Radice*. E l'aggiunto di Solida pare anche migliore che quello di cubica da noi usato, perchè x non solo compone il cubo x^3, ma altresì il parallelepipedo px, la differenza de' quali solidi per x prodotti debbe intendersi uguale a q. Ed ecco come relativamente ad x si cangiò il nome: Leonardo Pisano latinamente chiamolla *res*; Frate Luca italianamente *cosa*. Cardano alla idea astratta di *cosa* pensò bene sostituire la idea determinata di valutazione della cosa, con piantare sul principio del Capo III dell'*Arte magna* a definizione: *Aestimatio rei est quantitas in qua veritatem experimur propositorum in capitulo* (*aequatione*), *et quaestione*; e con usar poi per compendio il solo vocabolo *aestimatio*, sottinteso quello di *rei*. Ed egli stesso in seguito trattando della equazione solida $x^3 = px + q$ introdusse, come ho fatto vedere, il nome di Radice Solida. A Bombelli piacque servirsi di un'altra appellazione, cioè di quella di *tanto*.

§. VIII. Dopo avere per brevi momenti condisceso al genio della sola Storia riferendo a pienezza unicamente di lei alcune cose di niuna importanza per la scienza, ritorniamo a soddisfare insieme il genio dell'una e dell'altra con racconto di utili indagini, e contemplazioni. Non contento pertanto Cardano di avere investigati i limiti dell' uso dei varj spezzamenti dipendentemente dalle grandezze di p, q, prese anche a cercar quelli dipendenti dalla specie di y, z, e della somma $y+z$, voglio dire della razionalità, od irrazionalità e delle parti, e del tutto. A questo intento pigliò per guida il seguente

Teorema. Nel cubo $(y+z)^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$ è una continua progressione geometrica $y^3 : y^2z : yz^2 : z^3$, e la ragione di due termini qualunque prossimi si è di $y:z$.

Corollario. In conseguenza due termini alterni sono nella ragione duplicata $y^2 : z^2$. Di fatto $y^3 : yz^2 :: y^2 : z^2$; e parimente $y^2z : z^3 :: y^2 : z^2$.

Dal premesso teorema dedusse Cardano quest'altro:

Teorema II. Supposte y, z due parti fra loro incommensurabili della quantità irrazionale $y+z$, gli spezzamenti

2.°, 3.°, 4.°, una equazion de' quali è $(3-b)(y^2z+yz^2)=q$, non possono aver luogo. Imperciocchè per il teorema antecedente i parallelepipedi y^2z, yz^2 sono tra loro nella ragione $y:z$, dunque siccome queste, così son essi l'uno verso dell'altro incommensurabili, e la somma loro, similmente che la somma $y+z$, irrazionale; e perciò non può essere, e ripugna il fare $(3-b)(y^2z+yz^2)=q$.

Si osservi poter essere $y=t+\sqrt{u}$, $z=t-\sqrt{u}$, e quantunque $t+\sqrt{u}$, $t-\sqrt{u}$ sieno quantità fra loro incommensurabili, venirne $(t+\sqrt{u})^2(t-\sqrt{u})+(t+\sqrt{u})(t-\sqrt{u})^2$ $=(t+\sqrt{u})(t-\sqrt{u})(t+\sqrt{u}+t-\sqrt{u})=(t^2-u)\times 2t$, quantità razionale. Ma la somma $y+z=t+\sqrt{u}+t-\sqrt{u}$, in luogo di essere irrazionale, è razionale $=2t$.

Sono dunque gli spezzamenti 2.°, 3.°, 4.° per natura loro permessi in parti y, z fra loro incommensurabili, ma a condizione, che la somma $y+z$ sia razionale; il che essendo, non vi ha di essi spezzamenti verun bisogno, trovandosi la razionale radice $y+z=x$ immediatamente pel metodo, da Cardano stesso, come pag. 166, e 412 ho detto, conosciuto, dei divisori dell'omogeneo. Non avendo $x^3=px+q$ radice razionale, essendo q razionale, ed $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$, che è propiamente la combinazione costituente il caso irreducibile, gli spezzamenti 2.°, 3.°, 4.° sebbene il 2.° siccome al tartagliano contrario, ed il 4.° siccome di lui complemento paressero i nati fatti per trionfare dell'imbarazzo; sono tuttavía in realtà dalla natura loro disdetti, ricusando intrinsecamente di avere y, z fra loro incommensurabili, ed insieme componenti una quantità irrazionale. Ecco pertanto per ogni parte caduta la speranza di trarre per il caso irreducibile sussidio dagli spezzamenti, che sembravano prometterne maggiore: l'altezza di grado delle equazioni loro finali toglie di servirsene, ma questo è un difetto dell'analisi piuttosto che un limite loro, ed attacca ad essi una inutilità soltanto esterna, e relativa; ma l'escludere $y+z$ di due parti fra loro incommensurabili composta, ed in intero irrazionale è difetto intrinseco, che costituisce in essi una inutilità propria, ed assoluta.

Si è dimostrato pag. 405 *Teor. X*, che non avendo l'equazione $x^3=px+q$ alcun valore di x razionale, non vi ha per lei altra formola radicale che $\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{u}$; questa per il tartagliano spezzamento esce nelle parti $\sqrt[3]{t}$, $\sqrt[3]{u}$ immaginaria nel caso $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$: era da cercarsi, se per qualche altro spezzamento, e segnatamente per l'anti-tartagliano, o sia 2.°, e per il 4.° uscir poteva in parti reali; ma tali spezzamenti per ripugnanza di lor natura non soffrono essa radical forma $\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{u}$, come tostamente intendesi applicando la considerazione all'equazion $3\sqrt[3]{tu}(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{u})=q$, essendo affatto impossibile, poste $\sqrt[3]{t}$, $\sqrt[3]{u}$ fra loro incommensurabili, com'esser debbono per non restrignersi contro il teorema I, pag. 399 in una, che $\sqrt[3]{tu}$ sì con $\sqrt[3]{t}$, sì con $\sqrt[3]{u}$ formi prodotto razionale, di guisa che la somma dei due prodotti riesca $=q$. Dunque nella moltitudine degli spezzamenti non apparisce via ad isfuggire il paradosso della formola implicata d'immaginarj, che risulta dallo spezzamento tartagliano allora appunto, quando tutte e tre le radici dell'equazione $x^3=px+q$ sono reali, e disuguali.

§. IX. Si ricorra alla geometría: vi ricorse Cardano con prendere a costruire per l'intersecamento della parabola, e della iperbola l'equazione $x^3+q=nx^2$. Ho già esposta tale costruzione rettificando quel vagare di caso in caso che fece l'autore; giova ritornarvi sopra, ed intertenervisi un poco. Lo spirito di essa si è: data all'equazione $x^3 + q = n x^2$ la disposizione $q = (n - x) x^2$, porre $x^2 = \frac{4}{9} n y$, che è l'equazione ad una parabola del parametro $\frac{4}{9} n$, e donde subito si ha l'altra $q = \frac{4}{9} n y (n - x)$, o sia, fatto $n - x = z$, e trasposto $\frac{4}{9} n$, la seguente $\frac{9q}{4n} = y z$, che è ad una iperbola tra gli assintoti, il cui rettangolo costante sia $\frac{9q}{4n}$. Nella figura cardanica sotto il num. 20 essendo HC, CF gli assintoti della iperbola BTK, il secondo CF è insieme tangente alla parabola nel vertice F, ed è su di esso, che prender si debbono, partendo dal punto di contatto F, le ascisse x della parabola FTM, e partendo dalla punta C dell'angolo assintotico le ascisse z dell'iperbola BTK: così, essendo FP una delle ascisse x della parabola, $CF - FP = n - x = z$ è la corrispondente ascissa della iperbola, e l'ordinata PT essendo ad ambedue le curve comune, insegna essere x radice dell'equazione $x^3 + q = n x^2$, perchè nelle due equazioni $x^2 = \frac{4}{9} n y$, $\frac{9q}{4n} = y(n - x)$, supposto y lo stesso, si ha $\frac{9x^2}{4n} = \frac{9q}{4n(n-x)}$, donde $(n - x) x^2 = q$, $n x^2 = q + x^3$. Che l'iperbola da Cardano descritta sia quella rappresentata dall'equazione $z y = \frac{9q}{4n}$, si dimostra facilmente, essendo per Cardano $AC = \frac{DQ^2 \times DZ}{EB^2} = \frac{q}{EB^2} = \frac{9q}{4n^2}$, a cagion di $EB = \frac{2}{3} n$; per conseguenza il rettangolo $ACFB$ al punto B della iperbola $= \frac{9q}{4n^2} \times n = \frac{9q}{4n}$. Per la similitudine poi dei triangoli CLE, CFG si ha $CL : LE :: CF : FG$, ovvero, per essere $LE = AC$, $CF = AB$,

$CL : AC :: AB : FG$; dunque $CL \times FG = AC \times AB$, ed essendo $LK = FG$, $CL \times LK = AC \times AB = \frac{9q}{4n}$, dal che si concludono insieme due cose: e che l'iperbola descritta dal punto B con gli assintoti FC, CH passa necessariamente per il punto K; e che siccome il rettangolo dell'ascissa CL nell'ordinata LK, così il rettangolo di ogni altra ascissa z dal punto C lungo l'assintoto CF nella corrispondente ordinata y è $= \frac{9q}{4n}$, vale dire, che l'iperbola BTK è l'iperbola dell'equazione assintotica $zy = \frac{9q}{4n}$. Cardano non assegna nella sua costruzione che un intersecamento delle due curve, e per esso una radice ST, o sia FP dell'equazione $x^3 + q = nx^2$, sebbene consideri i casi $q < \frac{4}{27}n^3$, od $= \frac{4}{27}n^3$, in ambedue i quali l'equazione ha tre radici reali, con la sola differenza di essere nel primo tutte e tre disuguali, nel secondo due uguali. Ma non è malagevole supplire al difetto. È evidente, che delineando dal vertice F il destro ramo parabolico FY, e continuando a destra l'iperbola KTB nascerà un altro incontro, ed intersecamento delle due curve T', dal quale calando l'ordinata $T'P'$ si avrà FP' altra radice dell'equazione $x^3 + q = nx^2$. Rispetto alla terza radice, a comprenderne chiaro la geometrica determinazione prendiamo a contemplare il caso $q = \frac{4}{27}n^3$. Sarà in tal caso $AC = \frac{9q}{4n^2} = \frac{1}{3}n = AE$, come offre a vedere la Fig. 23, $AC \times AB = \frac{1}{3}n^2$, $CL \times LK = \frac{1}{3}n^2$, $LK = \frac{AC \times AB}{CL} = \frac{AE \times AB}{AE} = AB = n$. Se si moltiplichi n in quanto valore di LK per il valore di FN parametro della parabola, cioè per $\frac{4}{9}n$, ne proviene $\frac{4}{9}n^2$, che è il quadrato di $BE = \frac{2}{3}n$, o sia di FL. Dunque presa FL per ascissa della parabola, essendo $FL^2 = FN \times LK$, giusta l'equazione $x^2 = \frac{4}{9} n y$, rendesi palese essere K un punto alla parabola. Ma è ancora un punto alla iperbola; è dunque nel caso $q = \frac{4}{27} n^3$ il punto K un punto, in cui le due curve s'incontrano. Ma qual è la specie dell'incontro? Prolungato l'asse della parabola GF sotto F tanto, che sia $FV = FG$, si tiri VK, che sarà tangente alla parabola nel punto K. Or per i triangoli simili VGK, VFX sta $VG : VF :: GK : FX$, dunque siccome $VF = \frac{1}{2} VG$, così $FX = \frac{1}{2} GK = \frac{1}{2} LF$; onde essendo $LF = \frac{2}{3} n$, è $FX = \frac{1}{3} n = CL$, dal che manifestasi, che la retta KX è tangente all' iperbola nel punto K. Avendo pertanto le due curve in tal punto comune la tangente, egli è un punto di contatto loro, o di osculo, con cui la iperbola bacia internamente la parabola. Cotal punto equivale a due compenetrantisi in uno, rappresenta due intersecamenti avvicinatisi sino a confondersi insieme, e disegna due radici uguali del valore, ciascuna, di $\frac{2}{3} n$, quali di fatto ha nel caso $q = \frac{4}{72} n^3$ l'equazione $x^3 + q = n x^2$. Il caso $q = \frac{4}{27} n^3$ è medio tra i due $q < \frac{4}{27} n^3$, e $q > \frac{4}{27} n^3$, e gli avvenimenti in quello esser debbono medj tra gli avvenimenti in questi. I due intersecamenti, che coincidendo formano il combaciamento delle due curve al punto K nel caso $q = \frac{4}{27} n^3$, saranno disgiunti nel caso $q < \frac{4}{27} n^3$, che lo precede, e l'uno di essi intersecamenti caderà al di qua del punto K, come in T (*Fig.* 20), l'altro al di là, e le due radici x, che nel caso $q = \frac{4}{27} n^3$ si uguagliano in L, saranno innanzi, nel caso $q < \frac{4}{27} n^3$, disuguali, ed una minore di FL, l'altra maggiore. A conferma si osservi che il ramo parabolico FTM, che taglia la iperbola BTK nel punto T, per sua natura, continuato all'infinito, si discosta infinitamente dall'asse FG, e debbe perciò tagliare l'assintoto CH dell'iperbola, la quale al contrario, per legge di sua natura, anderà bensì ad esso accostandosi via via maggiormente, ma senza poter giugnere a toccarlo, non che ad oltrepassarlo: è dunque giuoco forza, che il ramo parabolico TM continuato torni a tagliare il ramo iperbolico TK continuato. Nel caso $q < \frac{4}{27} n^3$, che precede il caso medio i due intersecamenti sono disgiunti e l'uno di sotto l'altro al di là del punto K, nel caso medio $q = \frac{4}{27} n^3$ i due intersecamenti si confondono in un punto, e formano in K un contatto delle due curve, nel quale la parabola tocca al di fuori la iperbola; nel caso che segue il caso medio, cioè nel caso $q < \frac{4}{27} n^3$, il ramo parabolico FM deve (*Fig.* 24) gettarsi fuori della iperbola, e passare lontano dal punto K, i due intersecamenti si rendono impossibili, e le due radici prima disuguali, poi uguali, divengono immaginarie; vi resta però l'intersecamento T' dell'altro ramo parabolico FY con l'iperbola a destra continuata, pel quale intersecamento, calata la perpendicolare $T'P'$, è data l'ascissa FP' a negativa radice dell'equazione $x^3 + q = n x^2$, come nel caso, di cui si tratta, $q > \frac{4}{27} n^3$ vuole la formola generale al fine della pagina 165.

La costruzione geometrica dell'equazione $x^3 - n x^2 + q = 0$ comprende la costruzione dell'equazione $x^3 - p x - q = 0$, poichè siccome una equazione, che sia fornita del secondo termine si può trasformare in altra, che ne sia priva; così viceversa una, che ne sia priva, trasformar si può in altra, che di esso fornita sia, e non del terzo. Facciasi $x = t - a$, e sostituendo nell'equazione $x^3 - p x - q = 0$, ne proverrà $t^3 - 3at^2 + (3a^2 - p)t - a^3 + ap - q = 0$. A fare, che questa equazione sia priva del terzo termine, ed abbia la forma $x^3 - nx^2 + q = 0$, pongasi $3a^2 - p = 0$, onde si ha $a = \sqrt{\frac{1}{3}p}$, e quindi $t^3 - 3t^2\sqrt{\frac{1}{3}p} + \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} - q = 0$.

Ma se Cardano non costrusse espressamente per mezzo della geometría l'equazione $x^3 - px - q = 0$ nel caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, non tralasciò di riferirla in qualche modo ad essa, contemplandola, allorchè q sia negativo, come l'equazione del problema da me posto sotto il num. III nella pag. 431. E ben giustamente, imperciocchè, siccome nell'equazione di tal problema $x^3 - \frac{1}{4}H^2x + \frac{1}{2}N = 0$, per il dimostrato nel corollario del *Massimo* 1.° pag. 438, il massimo valore, che aver possa $\frac{1}{2}N$ si è $\frac{2}{3}.\frac{H^2}{4}\sqrt{\frac{H^2}{3.4}}$, così nell'equazione $x^3 - px + q = 0$ il valor massimo, che, salvo il numero di tre radici reali, possa aver q, si è $\frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3$, che è quanto $q = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ed è il limite del caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, e della connessa implicazione immaginaria nella formola tartagliana. Considerando poi un po' più attentamente il citato problema della pag. 431, che già abbiamo veduto ridursi a trovare il prodotto $\left(\frac{1}{2}H + x\right)\left(\frac{1}{2}H - x\right)2x = N$, chi non comprende mirar esso in fondo a dividere (*Fig.* 25) il diametro $AB = H$ nel punto E di guisa, che essendo $AC + CE = \frac{1}{2}H + x$, $CB - CE = \frac{1}{2}H - x$, il rettangolo $(AC + CE)(CB - CE)$, o sia per la proprietà del circolo il quadrato EP^2, moltiplicato con CE sia uguale ad $\frac{1}{2}N$? Ed essendo EP il seno, CE il coseno dell' arco BP, il problema di Cardano in ultima analisi si è di determinare l'arco BP, rispetto al quale il prodotto del quadrato del seno con il coseno sia $= \frac{1}{2} N$, ed è a questo problema, che intrinsecamente terminava il riferire, che fece Cardano, l'equazione $x^3 - px + q = 0$ a quel suo problema. E perchè nel caso $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$ questa equazione ha tre radici reali, e disuguali, perciò tre debbono essere gli archi diversi soddisfacenti, siccome BP, all'assegnata condizione: con il qual lume l'analisi ricompensa la geometría del beneficio, che le presta, in tradurre in retta reale l'involto pel propio suo operare d'immaginarj. Io non attribuirò a Cardano queste viste, ma dirò bene, che ad esse aprì, a così dir, l'orizzonte. E soggiugnerò, che la foggia di recare ai seni e coseni circolari il caso analiticamente irreducibile, adombrata per le tracce di Cardanò è la più naturale, e quella, che immediatamente l'equazione $x^3 - px + q = 0$ suggerisce. Poichè di qui avendo $q = (p - x^2)x$, è evidente, che, considerato x qual coseno di un arco, $p - x^2$ è il seno dell'arco medesimo nel cerchio di raggio $\sqrt{p}$. E riflettasi, che dovendo una delle radici dell'equazione $x^3 - px + q = 0$ essere negativa, se si contrassegni per $-x'$, ne viene $-x'^3 + px' + q = 0$, che, cangiati i segni in tutti tre i termini, convertesi in $x'^3 - px' - q = 0$; onde il recamento ai seni, e coseni circolari della equazione $x^3 - px + q = 0$ include necessariamente eziandío quello della equazione $x^3 - px - q = 0$, e viceversa. Il modo introdotto poscia dietro a Vieta di piegare il caso irreducibile ai seni o coseni, od alle corde circolari per la trisezione dell'angolo è certamente più utile, più splendido, e senza limite amplificabile, ma è all'equazione $x^3 - px + q = 0$ meno immediato, ed intimo.

§. X. La formola tartagliana nel caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ è nelle sue parti separatamente immaginaria, ma nell'intero è reale, ed è ben lungi dal significare nell'equazione $x^3 - px - q = 0$ una impossibilità assoluta di qualunque reale radice, come la significa il radicale immaginario nell'equazione di 2.° grado. Montucla dice, che Cardano esitò se la quantità rappresentata per la formola tartagliana fosse, o no nel segnato caso reale, e se significasse, o no nell'equazione $x^3 - px - q = 0$ una assoluta impossibilità di radice, e, come a scusa di tale esitazione, dice insieme non essere da farne maraviglia per l'esempio di ciò, che nelle equazioni di 2.° grado avviene. *Il étoit bien difficile de déterminer en ce cas si la valeur de l'inconnue étoit possible, ainsi déguisée sous une forme imaginaire qui, dans les équations du second degré, désigne une impossibilité absolue; et l'on ne doit pas s'étonner que Cardan ait hésité ici.... Mais depuis lui on a remarqué, et, qui plus est, démontré que le cas irréductible non seulement ne désigne point une impossibilité dans l'équation, mais qu'il ne peut avoir lieu que lorsqu'elle est possible du plus grand nombre de manieres.* Io non so trovare il Cardano in alcun luogo de' suoi scritti esitante, che l'implicazione immaginaria della formola tartagliana significasse nella equazione $x^3 - px - q = 0$ una impossibilità assoluta di reale radice, come la significa il radicale immaginario nelle equazioni di 2.° grado. E trovo per lo contrario, che Cardano conobbe essere appunto nel caso della tartagliana formola contaminata d'immaginarj, che l'equazione $x^3 - px - q = 0$ gode di tre radici reali, e disuguali, sopra pag. 340, che seppe ricavarle, essendo tutte e tre razionali, od una razionale e due della forma $t \pm \sqrt{u}$, pag. 166, che anche essendo tutte e tre irrazionali valse, chiamata in ajuto la geometría, a determinarne una coll'intersecamento della parabola e dell'iperbola, costruendo per la delineazion di tali curve l'equazione $x^3 - nx^2 + q = 0$: cose tutte diametralmente ripugnanti alla supposta esitazione. E che la formola tartagliana implicata d'immaginarj lungi dal significare nell'equazione $x^3 - px - q = 0$ una impossibilità assoluta di qualunque radice, soddisfacesse ella medesima ad essa equazione verificandola, siccome è proprio di una radice, potè Cardano accertarsene facendo uso della prova, che Tartaglia nella sua lettera, cui riferisce sotto il ques. XXXV, insegnata gli avea, in dichiarargli il senso delle regole comunicategli, ed era di formare il cubo del binomio cubico per esse ricavato, il quale trovato avrebbe uguale al prodotto dello stesso binomio cubico in p, ed al numero q congiuntamente: la formola tartagliana anche nel caso di avere le sue parti immaginarie risponde alla prova: e crederemo, che Cardano l'avrà in tal caso ommessa, o stimata falsa? Verificando la formola tartagliana d'immaginarj implicata, l'equazione $x^3 - px - q = 0$ è per noi necessaria conseguenza contener essa una delle tre reali e disuguali radici dell'equazione medesima, e sotto immaginario aspetto nascondere una quantità reale; ed a pensare che non la fosse similmente per Cardano, bisogna idearsi, che oltre ai tre verificamenti per le tre reali radici stimasse egli possibile un altro modo misterioso di verificamento: lo che non è coerente ai lumi, che già acquistati avea su la natura delle equazioni, segnatamente su la composizione del coefficiente del secondo termine, e sul numero delle radici rispettivamente al grado. Con tutto ciò io non voglio sostenere, che Cardano abbia con pieno, e fermo lume conosciuta la realità della formola tartagliana nel caso di essere implicata di immaginarj, non trovando presso di lui una dichiarazione espressa su di ciò; e succedendo non rade volte, che sfugga d'occhio una verità vicinissima a quelle che si posseggono, massimamente se v'intervenga qualche cosa, che abbagli. Ma se pur dubitò Cardano, che come nelle parti, così fosse la tartagliana formola immaginaria nell'intero come nel sembiante, così nel fondo, non potè però dubitare che significasse nell'equazione $x^3 - px - q = 0$ una assoluta impossibilità di qualunque reale radice, avendo egli stesso saputo trarre dall'analisi, e dalla geometría due classi di fatti in contrario, che in niuna maniera gli permettevan tal dubbio.

§. XI. A Bombelli debbe l'analisi l'aver posto sott'occhi la realità della formola tartagliana nel suo intero ad onta delle parti separatamente immaginarie: ciò che fece estraendo dagl'immaginarj radicali cubici tartagliani le radici, le quali risultando di parte reale, e di parte immaginaria composta, e con segno contrario nelle parti immaginarie, queste per conseguenza nell'aggregato distruggonsi, e spariscono non restando nella somma che l'unione delle reali. Così rispetto all'equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$ avendosi per la formola tartagliana $x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$, e per l'estrazione della radice trovandosi $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} = 2 + \sqrt{-1}$, e $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} = 2 - \sqrt{-1}$, si fa al guardo manifesto essere la somma $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ reale. Ho detto di tale estrazione e riguardo ai difetti del metodo di Bombelli, e riguardo al correggimento di essi, e riguardo all'ingiusto vanto datosi dal Wallis bastantemente al fine del Capo v dalla pagina 291 alla 296. Or debbo osservare, che se nella tartagliana formola

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

le quantità $\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3\right)}$, $\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3\right)}$ fossero in generale perfetti cubi, di modo che l'estrazione fosse universalmente possibile si avrebbero due cose: 1.ª estratte le radici, ed insieme sommate, si renderebbe generica la bombelliana sensibile dimostrazione della intrinseca realità, a dispetto della apparente immaginarietà, della formola tartagliana; 2.ª finito sarebbe il caso irreducibile. Ma chi può in esse quantità ravvisare una struttura, che le faccia in genere essere perfetti cubi? L'esserlo, od il non esserlo dipende dal rapporto di p, q. Nè dunque dar si può alla dimostrazione di fatto da Bombelli introdotta della realità della formola tartagliana implicata d'immaginarj una generale estensione effettiva, ma solamente analogica, nè il caso irreducibile vien risecato, e tolto, rimanendo nella irreducibilità la formola tutte le volte, che le quantità sotto i radicali cubici, per non essere quantità cubiche, non ammettono l'estrazione della radice cubica. Quanto alla realità della formola intera ad onta delle parti immaginarie studiate si sono altre dimostrazioni: la mole già troppo cresciuta del Volume non mi permette di diffondermi su di esse; e quella della sostituzione di essa formola in luogo di x nell'equazione $x^3-px-q=0$ è abbastanza convincente ed opportuna per chi voglia veder col fatto. Ma si ha in pronto un'altra dimostrazione speculativa più luminosa intrinseca, e generale, cui mi sono sempre maravigliato non essersi sin da principio posta mente, e che già altra volta, nell'anno 1782, io comunicai al Pubblico. Eccola:

Teorema generale. In qualunque modo si spezzi l'equazione $(A).\ y^3+3y^2z+3yz^2+z^3-p(y+z)-q=0$, in cui posto $x = y + z$ si trasformò la data $x^3 - px - q = 0$, giusta lo spezzamento diverso, varieranno bensì in grandezza, ed in natura le parti y, z, ma la somma $y + z$ sarà sempre valore di x, e vera radice dell'equazione $x^3 - px - q = 0$; e nel caso appunto di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ necessariamente reale.

Dimostrazione. Si dinotino per (C) (D) generalmente le due equazioni dello spezzamento; sia cioè $(A) = (C) + (D) = 0$. Qualunque e in grandezza, e in natura sieno a causa delle equazioni (C), (D) per risultare le parti y, z, la somma però $y + z$ debbe per necessaria conseguenza di calcolo essere verificatrice dell'equazione (A). Ma non può verificare la equazione (A), che non verifichi insieme l'equazione $x^3 - px - q = 0$, trasformata in (A) col porre $x = y + z$, senza condizione veruna, che le parti y, z fossero piuttosto tali, che tali altre; dunque qualunque sia lo spezzamento dell'equazione, e di qualunque grandezza o natura risultino da esso le parti y, z, la somma loro $y + z$ necessariamente verifica l'equazione $x^3 - px - q = 0$, ed è perciò radice di lei. Nel caso poi di $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ l'equazione $x^3 - px - q = 0$, che, siccome di 3.° grado, non può avere più di tre radici, le ha tutte e tre reali, e disuguali; dunque la somma $y + z$ non può in esso caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ non essere una delle reali radici, e sieno pure le parti y, z separatamente immaginarie, quali dal tartagliano spezzamento risultano, l'aggregato loro è indubitatamente reale.

§. XII. Essendo possibile l'estrazione delle radici cubiche dalle quantità $\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$, $\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3\right)}$ le forme di esse radici nel caso $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, di cui si parla, non possono essere che $A + \sqrt{-B}$, $A - \sqrt{-B}$ per le cose dimostrate alla pag. 258 del I Volume, ed alla pag. 294 di questo II; e la quantità reale A debb'essere razionale, se q sia razionale come si è sempre supposto: altrimenti, essendo A irrazionale, nel cubo $(A+\sqrt{-B})^3$, o vi sarebbero termini razionali, termini irrazionali reali, e termini immaginarj, o solamente termini irrazionali reali, e termini immaginarj: e nel primo caso nell'equazione $q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3\right)}=(A+\sqrt{-B})$ sarebbero senza simili i termini irrazionali reali del cubo $(A+\sqrt{-B})^3$; nel secondo evento, sarebbe in oltre senza simile il termine razionale q. Dicasi lo stesso rispetto all'equazione $q-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3\right)}=(A-\sqrt{-B})^3$. Quindi la radice dell'equazione $x^3-px-q=0$, essendo $=A+\sqrt{-B}+A-\sqrt{-B}=2A$, non può che essere razionale: così che sono tre cose necessariamente connesse: q, cioè ultimo termine dell'equazione $x^3-px-q=0$ razionale; estraibilità delle radici cubiche dai binomj tartagliani; razionale radice nell'equazione $x^3-px-q=0$. Conseguentemente sono cose assolutamente incomponibili: q razionale; $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$; mancanza nell'equazione $x^3-px-q=0$ di radice razionale, od irrazionalità delle radici tutte e tre; ed effettuabilità delle estrazioni cubiche nella formola tartagliana segnate dai due binomj immaginarj, che involge. È dunque tal formola nella combinazione di q razionale, di $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$, di tutte e tre le radici nell'equazione $x^3-px-q=0$ irrazionali veracemente, onninamente, essenzialmente irreducibile.

§. XIII. Se q sia irrazionale, e si possano dagli immaginarj binomj tartagliani estrarre le radici cubiche $A+\sqrt{-B}$, $A-\sqrt{-B}$, sarà A irrazionale, e di tale specie

che sia $A^3 - 3AB$ della specie di q, dovendo essere $= \frac{1}{2}q$. Ancorchè dunque sia $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$, e l'equazione $x^3 - px - q = 0$ manchi di radice razionale, se q sia irrazionale, la formola tartagliana può essere riducibile, cioè può darsi, che le estrazioni delle cubiche radici immaginarie per essa volute si possono effettuare: ciò che dipenderà dal rapporto di $\frac{1}{2}q$ a $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, che sia tale, per cui le quantità $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, $\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$ sien perfetti cubi. Che se tali quantità non sieno in lor medesime cubiche, la formola sarà irreducibile; laonde rendesi manifesto esservi anche per l'ipotesi di q irrazionale il suo caso irreducibile. E come no, se nell'una parimenti, che nell'altra ipotesi, di q razionale, e di q irrazionale possono codeste due quantità esser cubi e possono non esserlo? Quinci insieme apparisce, che il caso irreducibile per ambedue le ipotesi di q riviene alla medesima idea, ed ha la stessa cagione, la incubicità, siami lecito dire, dei binomj tartagliani. La differenza sola si è, che essendo q razionale, essa incubicità è una conseguenza necessaria, e generale dell' aver l'equazione le sue tre radici tutte reali, disuguali, ed irrazionali; ed essendo q irrazionale non è che uno dei due avvenimenti possibili, assai però più facile del contrario, cioè della cubicità. Tutte le equazioni ad ultimo termine q irrazionale, in un con le tre reali, irrazionali radici loro, esibite dal Nicole, dal Lorgna, dal Riccati sono nel primo avvenimento: in tutte cioè l'ultimo termine irrazionale q è tal funzione di p coefficiente di x, che i binomj tartagliani risultano perfetti cubi. La equazione esibita dal Nicole negli Atti dell'Accad. di Parigi l'anno 1741 si è
$x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}} = 0$.

Quella esibita dal Lorgna nella sua Opera *De casu irreductibili* 3.^{i} *gradus*: $x^3 - px \pm \frac{p}{n} \sqrt{\frac{n \mp 1}{n} p}\,) = 0$.

E quella dal Riccati esibita nel tomo I de' suoi *Opusc.* in una Lettera al Mariscotti, che forma l'Opusc. 9.°:

$$x^3 - px + \frac{2(3n^2 - 1)}{3(1+n^2)} \sqrt{\frac{p}{3(1+n^2)}} = 0.$$

Tutte queste si comprendono nella formola

$$x^3 - px - hp\sqrt{(1+h)p} = 0;$$

che io per via più metafisica, e diretta delle battute dai lodati Autori trovai, ed all'Accad. di Padova esibii l'anno 1782. Basta prender $h = -\frac{1}{3}$ per vedervi compresa la nicoliana, ed $h = \mp \frac{1}{n}$ ad iscorgervi racchiusa la lorgniana. Quanto alla riccatiana facciasi $-h = \frac{3n^2 - 1}{3(1+n^2)}$, e ne verrà $n^2 = \frac{1 - 3h}{3 + 3h}$, $3 + 3n^2 = \frac{4}{1+h}$, conseguentemente $\sqrt{\frac{p}{3(1+n^2)}} = \sqrt{\frac{(1+h)p}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+h)p}$, e quinci $\frac{2(3n^2-1)}{3(1+n^2)} \sqrt{\frac{p}{3(1+n^2)}} = -h\sqrt{(1+h)p}$: dal che si fa palese, che anche la riccatiana è contenuta nella formola mia. Or i binomj tartagliani, che da essa provengono, sono $\frac{1}{2}hp\sqrt{(1+h)p} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}h^2p^2(1+h)p - \frac{1}{27}p^3\right)}$, che sono perfetti cubi delle quantità $\frac{1}{2}\sqrt{(1+h)p} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(h - \frac{1}{3}p)}$. Dunque rimane generalmente dimostrato, che e l'equazione del Nicole, e quella del Lorgna, e quella del Riccati, tutte sono per loro struttura nel caso dei binomj tartagliani cubici.

§. XIV. Diverso si è stato il concetto del caso irreducibile dai divessi analisti formato. Pretese il Bombelli, e con maggior fasto di poi il Wallis, di aver trionfato del caso irreducibile sol per avere estratte dai binomj tartagliani le radici cubiche $A + \sqrt{-B}$, $A - \sqrt{-B}$ in A razionale, essendo nell'equazione $x^3 - p x - q = 0$ il q razionale. Esultò il Nicole, allorchè con sottile indagine rinvenne la sua equazione a q irrazionale in un con le tre irrazionali di lei radici, e gli si fece plauso di averla al caso irreducibile sottrata. Il Lorgna volle a carattere di caso irreducibile l'unione di queste tre condizioni: 1.ª $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$; 2.ª l'equazione $x^3 - p x - q = 0$ priva di radice razionale; 3.ª q razionale. Ma giusta il detto nel paragrafo antecedente vi ha il caso irreducibile anche essendo q irrazionale.

§. XV. Cardano dopo varj pensamenti su la natura delle radici della equazione $x^3 - p x - q = 0$ nel caso di non averne alcuna razionale, di essere q numerico, ed $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$, e dopo tutte le combinazioni di numero, e di radicali reali, che erano da tentarsi, niuna rinvenendone idonea a rappresentarle, si gettò a sospettare, che consistesser ciascuna in una quantità *Silvestre*, lontana da qualunque genere di radicali, e da qualsisia composizione loro *in quantitate sylvestri, scilicet quae non sit in aliquo genere radicum, nec composita ex illis, nec per detractionem relicta.* Noi le denominiamo quantità *Trascendenti*, essendo i doppj coseni della terza parte dell'arco μ, della terza parte dell' arco $\pi + \mu$, della terza parte dell'arco $2\pi + \mu$, posto μ l'arco del coseno $\frac{q}{\frac{2}{3} p}$ nel cerchio π di raggio $\sqrt{\frac{1}{3} p}$, il qual coseno compete parimente agli archi $\pi + \mu$, $2\pi + \mu$. Non è qui il luogo di diffondermi più ampiamente su di ciò; e la mole già anche di troppo cresciuta del Volume m'impone il fine.

SOMMA DELL'OPERA.

Ecco pertanto recata a quella luce, che fu possibil, maggiore quella parte della storia dell'Algebra, che di tante tenebre era involta, quella cioè riguardante la sua origine, il suo trasporto in Italia, i suoi primi progressi per opera degli italiani ingegni. Io sono qual chi al termine si ritrova di difficilissimo penosissimo viaggio. Qual via! Di qual caligine ricoperta, di quali inciampi seminata, e di quai ciechi voti interrotta? Quante falsità da combattere? Quante dovizie da trarre dalla profonda sepoltura di più secoli, e dall'inviluppo d'ogni genere di oscurità? Avessi almen avuto un ajuto fedele e sicuro, un astro rischiaratore opportuno! Ma chi mi ha seguito il dica, se, per ciò, che spetta ai fatti, un autore vi avesse, su cui io potessi riposare tranquillo; se per l'opposto costretto ad esitare d'ogni racconto, di ogni testimonianza, d'ogni citazione, non fui obbligato a comperare la verità per moltiplici combinazioni, per estesi confronti, e bilancj. Rispetto alle dottrine, elegantemente disse, ma non disse tutto, Annibal Caro del volume di Frate Luca, che un ceneraccio si era, in cui stavano sepolti minuzzoli d'oro: alcuni di tali minuzzoli vi si trovano così guasti e corrotti, che dir si possono snaturati. E poco sarebbe l'uso, che il Ximenes pag. LXIII della sua *Introduzione Storica* nell'Opera sul Gnomone Fiorentino notò, di certi segni, di certi vocaboli, e di certe riduzioni, che sono affatto ignote, e il cui linguaggio bisogna studiare per intendere la forza delle operazioni algebraiche, se esse operazioni medesime non fossero talvolta mozze, o nel cammino devianti, ed uscenti a termine non loro; se alcuni de' precetti stessi non fossero senza senso, e le materie tutte senz'ordine. Peggio, od almeno a tanto più grave incomodo, quanto in cose più sottili, in Cardano, del quale perciò sino Bombelli, lui ancor vivente, si lamentò, che fosse stato in dire oscuro. Quinci è, che su qualche luogo e dell'uno, e dell'altro autore ho dovuto ritornare più e più volte avanti di penetrarne la mente. E fu eziandio su di taluno inutile il ritorno, onde anzi che intendere dal dire loro la dottrina, mi fu mestieri crearla da me, e per il parto del mio studio intendere il dir loro. Più volte mi occupò la noja, m'invase l'animo lo spavento della difficoltà, mi assalì il pentimento, e la stanchezza mi suggerì l'abbandono dell'opera; ma mi ostinai a vincere, incitato dalla fatica già fatta, che sarebbe andata perduta, invaghito dallo splendore che già mi traluceva dei teoremi, e degli artificj, confortato dalla utilità tanto maggior del lavoro, quanto le tenebre ne rendeano più grande il bisogno. Vinsi, ma dividendo a piccole dosi il tedio, ed esilarando, e di piacer nutrendo e fortificando la massima parte del giorno lo spirito su le opere dell'Eulero, e del La-Grange, e di esse contemporaneamente tessendo un perpetuo commentario. Ogni analista debbe avere a diletto il vedere i primi germi, i crescimenti dell'algebra; ma l'italiano si dèe sentire a singolare esultazione commovere all'aspetto di tante nuove glorie de' suoi antichi compatrioti. E se di esse mi è stata forza di scemare il serto di insigni analisti esteri, io non temo, che giudici imparziali sieno per accusarmi d'ingiusto. Ho arricchito la storia di nuove Disquisizioni, non avendo voluto ommettere di approfittare del facil adito che essa storia mi apriva allo sviluppo, ed ampliamento delle dottrine, ed alla metafisica loro: onde al mio Leggitore, variato, e moltiplicato il diletto, più gradita gli riuscisse, e più utile l'opera mia, avendo in un sotto gli occhi la storia, la dottrina a sua estensione recata, e la metafisica dell'algebraico calcolo, che occorse di contemplare.

FINE.

Altri ERRORI spettanti il calcolo nel Volume I. — CORREZIONI.

Pag.	lin.	Errori	Correzioni
5	4	$a = 15$, e quindi $10 - a = -5$.	$a = 16\frac{1}{4}$, e quindi $10 - a = -6\frac{1}{4}$.
90	29	(*Fig.* 6)	(*Fig.* 7)
91	2	(*Fig.* 7)	(*Fig.* 6)
255	27	$\sqrt{(-1+\sqrt{11})}$,	$\sqrt[3]{(-1+\sqrt{11})}$,
263	14	$p^2 - q - \sqrt[3]{(P^2 - Q)}$	$p^2 - q = \sqrt[3]{(P^2 - Q)}$

ERRORI spettanti il calcolo nel Volume II. — CORREZIONI.

Pag.	lin.	Errori	Correzioni
3	21	$= 1$;	$= -1$;
18	4	$-QP^2CD^2$	$+QP^2CD^2$
33	9	$+H'(C'H'-G)$	$+H(C'H'-G)$
33	20	$+\frac{L'G'}{H})$	$+\frac{L'G'}{H'})$
92	22	$\frac{1}{A^4}$	$A^{\frac{1}{4}}$
103	29	$14 - \sqrt{32}$	$14 - \sqrt{52}$
106	3	$x^3 + px^2 = n$,	$x^3 + px = q$,
165	28	$x^3 + nx^2 + px + q = 0$,	$x^3 - nx^2 + px - q = 0$;
177	20	$+\sqrt{(n+h)(n-3h)}$	$+\frac{1}{2}\sqrt{(n+h)(n-3h)}$
189	14	$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2 + z = h\right)}$	$= \frac{1}{2}z - \sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2 + z - h\right)}$.
200	7	$(x - 2 + 2 + y - 2^2)^2$	$(x - 2 + 2 + y - 2)^2$
202	3	$-\frac{1}{2} + \sqrt{(a+h+1)}$	$-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(a + h + \frac{1}{4}\right)}$
232	26	$= \frac{2-3}{1}$	$= \frac{2-\sqrt{3}}{1}$
258	7	$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2-d)}\right.} +$	$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2(a^2+d)}\right.} +$

Pag.	lin.		
259	9	$\sqrt{\frac{64\times4\times\frac{3}{5}}{4}}$	$\sqrt{\frac{64\times5\times\frac{3}{5}}{4}}$
	19	$\frac{c}{b}=a^2$	$\frac{c}{b^2}=a$
264	11	$\sqrt{C\,D})$	$\sqrt{C\,D}$
271	14	$\sqrt{(a^2-d^2)}$	$S\sqrt{(a^2-d^2)}$
274	15	$+\frac{a^2\,c^2}{b^2-c}$	$+\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}$
291	2	$\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q\pm\sqrt{-a+(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2)}}$	$\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q\pm\sqrt{-(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}q^2)}}$
	14	$=q+d($	$=q+p($
294	13	$\frac{1}{8}h^4-$	$\frac{1}{8}h^3-$
310	9	$q^3=q^2y+y^4$	$q^3=m\,q^2y+y^4$
321	1	in $t+h-t$.	in $h=t+h-t$.
322	21	$\frac{R-r}{q-r}$,	$\frac{q-r}{R-r}$,
343	4	$x-\frac{1}{3}n$	$y-\frac{1}{3}n$
345	3	$x^3+n\,x^2+p\,x+$	$x^3-n\,x^2+p\,x-q=0$,
e	12	$q=0$,	
349	3	$\sqrt{1\frac{1}{4}+4}$.	$\sqrt{1\frac{1}{4}}$, $+4$.
357	18	$\infty>0$.	$\infty^0=0$.
369	7	$\sqrt[3]{q^2}\cdot(\frac{h}{\sqrt{q}}+\frac{h}{y})$,	$(\frac{h}{\sqrt{q}}+\frac{h}{y})\sqrt[3]{q^2}$,
411	1	$=\frac{3}{4}x^2)$	$-\frac{3}{4}x^2))$
423	28	$-y^4=$	$-y^4)=$
433	12	$D\,q$	$D\,Q$
451	4	$<\frac{1}{4}(y+z)$	$<\frac{1}{4}(y+z)^2$
459	15	$+(3-b(1-f)^2b^2$	$+(3-b)(1-f)^2b^2$
463	18	$-3f\ldots$	$-3f^2\ldots$
	21	$b^2.-$	b^2g-
471	22	prossimo di 4^2y^2	prossimo di 4^2z^2

Pag.	*lin.*		
479	15	$q < \frac{4}{27} n^3$,	$q > \frac{4}{27} n^3$,
487	8	$= (A + \sqrt{-B})$	$= (A + \sqrt{-B})^2$

Alla pag. 354 alle cinque equazioni di 4.ª grado schierate nelle linee 22.ª, 23.ª, 24.ª, aggiugni per sesta $x^4 + px + q = mx^3 + nx^2$; e corrispondentemente alla pag. 360 alla schiera tenente le linee 19.ª, 20.ª, $x^4 - mx^3 - nx^2 + px + q = 0$.

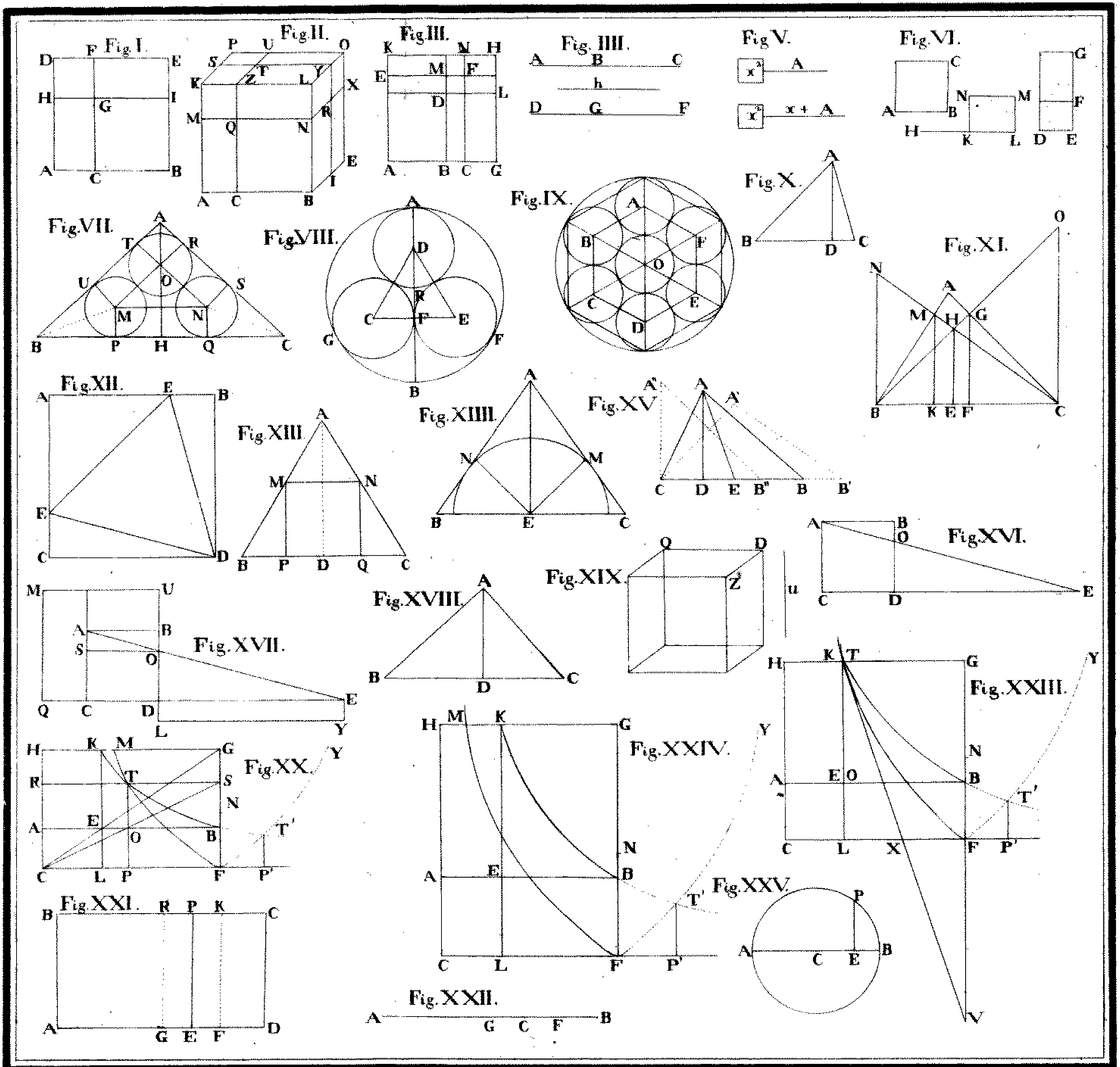
ERRORI spettanti il testo nel Volume II.			*CORREZIONI.*
Pag.	*lin.*		
48	20	dimostrò Waring	diede Waring
94	12	vale ad	vale, ad
117	31	*porteti,*	*parteti*
125	2	di essa,	di esse,
125	24	impresa, che	impresa; chè
128	11	trattate divenute	trattate, divenute
130	1	*multi*	*multis*
130	6	e cose e	e cose a
132	10	storia appartenente,	storia, appartenente
138	28	elementi, chi	elementi: chi
142	29	a comprender	e comprender
147	20	*et de l'altra della*	*et de l'altra parte della*
189	14	$x = \frac{h-y}{y+1}$ portato	$z = \frac{h-y}{y+1}$, portato
210	14	porgergli	porgerli
212	27	di quello, in cotali problemi	di quello in cotali problemi,
248	6	nella Relaz.	della Relaz.
320	26	Questo ultimo si	Questo ultimo termine si

412	28 e 29	terza moltiplica per n, seconda moltiplicata per n,	terza moltiplicata per n seconda moltiplicata per p
483	10	cui riferisce	cui questi riferisce
483	19	implicata, l'equazione $x^2 - px - q = o$ è	implicata l'equazione $x^2 - px - q = o$, è
484	7	intero come	intero, come
484	18	composta	composte

Nota alla linea 14 pag. 129.

Al fine del Capo XII dell'*Arte magna*, avvertendo Cardano il caso, in cui i radicali quadrati inchiusi nella risoluzione tartagliana divengono immaginarj, ordina: *Tunc consules librum Alize hic adjectum*. Ciò mi fece credere, che il libro dell'*Arte magna*, e quello *De regula Aliza* stati fossero da Cardano ad un tempo stesso prodotti. Ma nella edizione loro di Basilea l'anno 1570 dalla stampería Henricpetrina si premette al libro dell'*Arte magna* l'avviso di riprodursi dall'autore diligentemente revisto, ed accresciuto. All'incontro in fronte al libro *De regula Aliza*, che si chiama dell'anzidetto *necessaria coronide*, soggiugnesi: *Nunc demum in lucem editae*, con errore di stampa nel genitivo *editae* in luogo del nominativo *edita*.

Nel corso dell'Opera ho chiamato il benemerito Leonardo di Pisa, Leonardo Bonacci, laddove da altri fu detto Leonardo Fibonacci accozzando la prima sillaba *Fi* di *filius* al paterno nome Bonacci. Io ho stimato di volger questo a cognome, come assai volte si è fatto. A taluno sarebbe forse più piaciuto il dire Leonardo di Bonacci.



Gulielmo Silvestri inc.